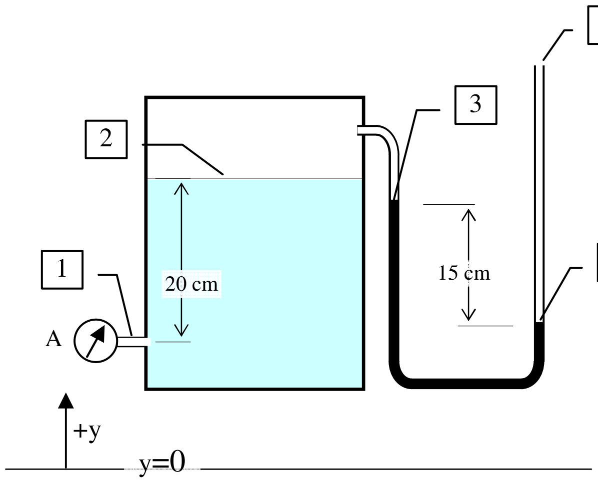
Συλλογή Ασκήσεων Υδροστατικής

Άσκηση 2.2[ℵ]

Να βρεθεί η τιμή της πίεσης που δείχνει το πιεσόμετρο Α, σε mmHg. Δίνονται οι πυκνότητες υδραργύρου ρ_{Hg}=13600kg/m^3, νερού ρ_N=1000 kg/m^3 και αέρα ρ_A=1,293 kg/m^3.



Επίλυση

Αρχικά επιλέγουμε μια στάθμη αναφοράς υψομέτρων (y=0) και τη φορά των θετικών y (βλέπε σκαρίφημα). Στη συνέχεια, με βάση αυτό το σύστημα αναφοράς, γράφουμε τις υδροστατικές εξισώσεις, που θα ισχύουν σε κάθε μέσο (νερό, αέρας, υδράργυρος, αέρας) εάν ακολουθήσουμε μια διαδρομή (1-2-3-4-5) μέσα από ρευστά (υγρά & αέρα), δηλαδή από το σημείο άγνωστης πίεσης (1) ή Α στο σημείο της γνωστής πίεσης (5), η οποία στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ίση με την ατμοσφαιρική (p_5=p_{atm}).

Α) Πλήρης και ακριβής ανάλυση

Κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις υδροστατικής συνδέει τις υδροστατικές πιέσεις που επικρατούν στις συνοριακές στάθμες του κάθε μέσου (διεπιφάνειες μεταξύ δύο μέσων).

$$p_1 - p_2 = -\rho_N g(y_1 - y_2) \quad \text{για το νερό} \qquad (1.\alpha)$$

$$p_2 - p_3 = -\rho_A g(y_2 - y_3) \quad \text{για τον αέρα στο κλειστό δοχείο} \qquad (1.\beta)$$

$$p_3 - p_4 = -\rho_{Hg} g(y_3 - y_4) \quad \text{για τον υδράργυρο} \qquad (1.\gamma)$$

$$p_4 - p_5 = -\rho_A g(y_4 - y_5) \quad \text{για τον ατμοσφαιρικό αέρα στο μανομετρικό σωλήνα} \qquad (1.\delta)$$

Το παραπάνω σετ εξισώσεων μετά από πρόσθεση κατά μέλη δίνει:

$$p_1 - p_5 = -\rho_N g\left[(y_1 - y_2) + \frac{\rho_A}{\rho_N}(y_2 - y_3) + \frac{\rho_{Hg}}{\rho_N}(y_3 - y_4) + \frac{\rho_A}{\rho_N}(y_4 - y_5)\right] \qquad (2)$$

[ℵ] Άσκηση 9 (Κεφ.2 σελ.79-80) από το Βιβλίο «Μηχανική των Ρευστών» του Π. Κορωνάκη

Στην παραπάνω εξίσωση, άγνωστα μεγέθη είναι τα p_1, (y_2-y_3) και (y_4-y_5). Εάν γνωρίζαμε τις τιμές των δύο τελευταίων θα επιλύαμε με ακρίβεια ως προς p_1. Επειδή όμως δε γνωρίζουμε τις τιμές (y_2-y_3) και (y_4-y_5), μπορούμε να κάνουμε το παρακάτω υπολογιστικό «τέχνασμα».

Παρατηρούμε, από τις σχεδιαστικές αναλογίες του σκαριφήματος, ότι τα (y_2-y_3) και (y_4-y_5) (που έχουν συγκρίσιμη τιμή με την τιμή των (y_1-y_2) και (y_3-y_4) δηλαδή έχουν «ίδια τάξη μεγέθους»[1]), πολλαπλασιάζονται με το λόγο πυκνοτήτων αέρα-νερού (ρ_A/ρ_N), ο οποίος, ως αριθμός, έχει πολύ μικρότερη τιμή από το 1 αλλά και από το λόγο πυκνοτήτων υδραργύρου-νερού (ρ_{Hg}/ρ_N).

Δηλαδή

$$0<(y_1-y_2),(y_2-y_3),(y_3-y_4),(y_4-y_5)<1\text{m}$$

Επομένως, για τις τάξεις μεγέθους αυτών των μεταβλητών ισχύει

$$O(y_1-y_2)=O(y_2-y_3)=O(y_3-y_4)=O(y_4-y_5)=0 \tag{3}$$

Επίσης

$$\frac{\rho_A}{\rho_N}=\frac{1{,}29\times10^{-3}\,\text{kg/m}^3}{1000\,\text{kg/m}^3}=1{,}29\times10^{-3} \ll 1 \quad \text{και} \quad O\left(\frac{\rho_A}{\rho_N}\right)=O\left(1{,}29\times10^{-3}\right)=-3 \tag{4}$$

$$\frac{\rho_{Hg}}{\rho_N}=\frac{13600\,\text{kg/m}^3}{1000\,\text{kg/m}^3}=13{,}6 > 1 \quad \text{και} \quad O\left(\frac{\rho_{Hg}}{\rho_N}\right)=O(13{,}6)=O\left(1{,}36\times10^{1}\right)=1 \tag{5}$$

Για να παραλείψουμε ή κρατήσουμε όρους από το άθροισμα (2) πρέπει να συγκρίνουμε τις τάξεις μεγέθους των όρων του. Κάθε όρος του αθροίσματος (2) αποτελείται από γινόμενο δύο παραγόντων των οποίων τις τάξεις μεγέθους τις εκτιμήσαμε παραπάνω. Έτσι, η τάξη μεγέθους κάθε όρου του αθροίσματος (2) εκτιμάται ως:

$$O(y_1-y_2)=0$$

$$O\left((y_2-y_3)\frac{\rho_A}{\rho_N}\right)=O(y_2-y_3)+O\left(\frac{\rho_A}{\rho_N}\right)=0-3=-3$$

$$O\left((y_3-y_4)\frac{\rho_{Hg}}{\rho_N}\right)=O(y_3-y_4)+O\left(\frac{\rho_{Hg}}{\rho_N}\right)=0+1=1$$

$$O\left((y_4-y_5)\frac{\rho_A}{\rho_N}\right)=O(y_4-y_5)+O\left(\frac{\rho_A}{\rho_N}\right)=0-3=-3$$

Συνεπώς, ο $2^{ος}$ και ο $4^{ος}$ όρος του αθροίσματος στην αγκύλη της εξίσωσης (2) είναι αμελητέοι σε σχέση με τον $1^{ο}$ και τον $3^{ο}$, αφού διαφέρουν κατά 3[=0-(-3)] τάξεις μεγέθους (ο $2^{ος}$ & ο $4^{ος}$ είναι $1.000=10^3$ φορές μικρότεροι από τον $1^{ο}$) και 4[=1-(-3)] τάξεις μεγέθους (ο $2^{ος}$ & ο $4^{ος}$ είναι $10.000=10^4$ φορές μικρότεροι από τον $3^{ο}$) αντίστοιχα. Έτσι δικαιολογείται γιατί θα μπορούσαμε να είχαμε καταστρώσει τις εξισώσεις επίλυσης του προβλήματος συντομότερα με την προσεγγιστική ανάλυση που ακολουθεί παρακάτω.

Β) Προσεγγιστική ανάλυση

$$p_1-p_2=-\rho_N g(y_1-y_2) \qquad \text{για το νερό} \tag{1.α}$$

[1] Βλέπε Σημείωση στο τέλος της Ασκησης

$p_2 \approx p_3$ για τον αέρα στο κλειστό δοχείο (1.β)

$p_3 - p_4 = -\rho_{Hg} g (y_3 - y_4)$ για τον υδράργυρο (1.γ)

$p_4 \approx p_5$ για τον ατμοσφαιρικό αέρα στο μανομετρικό σωλήνα (1.δ)

οι οποίες με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν

$$p_1 - p_5 = -\rho_N g \left[(y_1 - y_2) + \frac{\rho_{Hg}}{\rho_N}(y_3 - y_4) \right] \Rightarrow \tag{6}$$

$$p_1 = p_5 - \rho_N g \left[(y_1 - y_2) + \frac{\rho_{Hg}}{\rho_N}(y_3 - y_4) \right] \Rightarrow$$

με αντικατάσταση των τιμών

$$p_1 = 1\text{atm} - 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times [-0{,}2\text{m} + 13{,}6 \times 0{,}15\text{m}] = 10^5\,\text{Pa} - 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 1{,}84\text{m}$$

$$= 10^5\,\text{Pa} - 18050{,}4\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \text{m} = 10^5\,\text{Pa} - 18050{,}4\frac{\text{Nt}}{\text{m}^2} = 10^5\,\text{Pa} - 18050{,}4\text{Pa} = 81949{,}6\text{Pa}$$

Άρα

$$\boxed{p_1 = 81949{,}6\ \text{Pa} = 0{,}819\ \text{atm}} \tag{7}$$

ΤΑΞΗ ΜΕΓΕΘΟΥΣ

Κάθε αριθμός x μπορεί να γραφεί ως $x = a \cdot 10^b$ με $1 \le a < 10$.

Το σύμβολο O σημαίνει «τάξη μεγέθους» και ορίζεται ως $O(x) = b$

Στην ουσία το O(x) είναι ένας τελεστής (ένα εργαλείο) που 'μετρά' τις δυνάμεις του 10 ενός αριθμού x π.χ.

$$O(2) = O(2 \times 10^0) = 0,$$

$$O(45) = O(4{,}5 \times 10^1) = 1,$$

$$O(10^3) = O(1 \times 10^3) = 3,$$

$$O(0{,}0024) = O(2{,}4 \times 10^{-3}) = -3,$$

$$O(325423{,}38) = O(3{,}2542338 \times 10^5) = 5$$

Επίσης είναι προφανές ότι

$$O(ab) = O(a) + O(b) \text{ και } O(a/b) = O(a) - O(b)$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος για την εύρεση της τάξης μεγέθους, b, ενός αριθμού, $x = a \cdot 10^b$, με $1 \le a < 10$ είναι και ο

$$b = [\log_{10} x] = \mathrm{int}(\log_{10} x)$$

όπου οι αγκύλες [ ] ή το int( ) σημαίνουν την πράξη «ο μικρότερος ακέραιος»

Έτσι $O(x) = [\log_{10} x] = \mathrm{int}(\log_{10} x)$

π.χ.

$O(23879{,}4) = O(2{,}38794 \times 10^4) = 4$ ή και $O(23879{,}4) = [\log_{10} 23879{,}4] = [4{,}3780] = 4$

$O(398107{,}14) = O(3{,}98107 \times 10^5) = 5$ ή και
$O(398107{,}14) = \mathrm{int}(\log_{10} 398107{,}14) = \mathrm{int}(5{,}60) = 5$

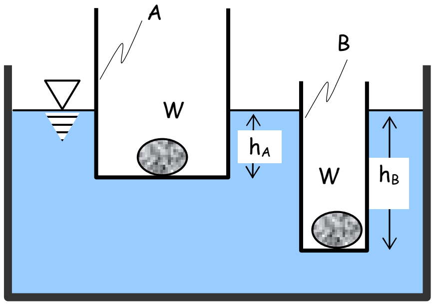
Άσκηση 2.3

Το κυλινδρικό δοχείο Α έχει τριπλάσια διάμετρο από τη διάμετρο του κυλινδρικού δοχείου Β ($D_A=3D_B$). Το απόβαρο του δοχείου Β είναι $A_B=1kp$ και το απόβαρο του δοχείου Α είναι $A_A=4A_B$.

Απαντήστε στα παρακάτω:

(α) Εάν τοποθετηθεί έρμα, του ίδιου βάρους W=6 kp και στα δύο δοχεία, δώστε τη βύθιση του Α σχετικά με τη βύθιση του Β (h_A/h_B=?)

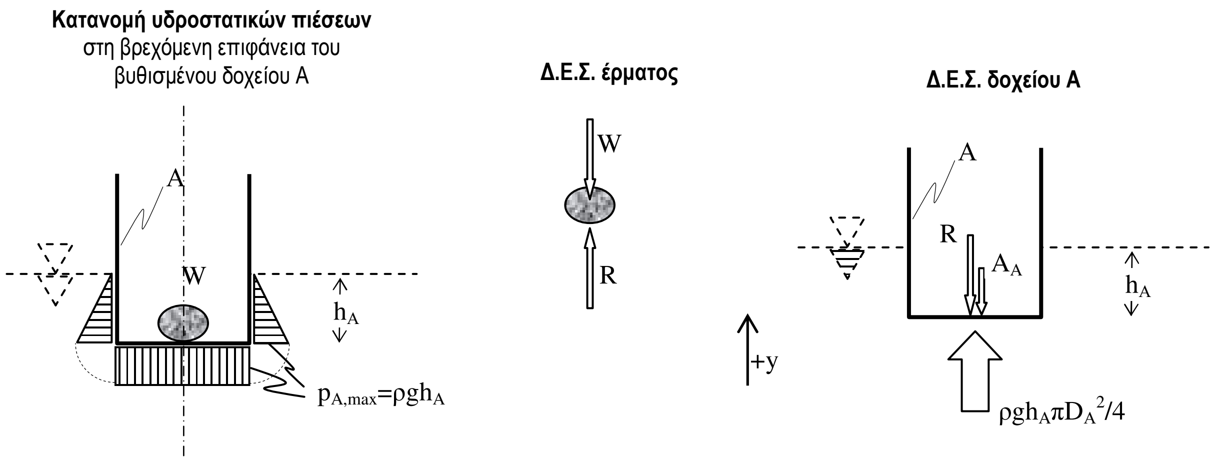
(β) Ποιά πρέπει να είναι η αναλογία βάρους, $e=W_A/W_B$, των ερμάτων στα δοχεία Α & Β, ώστε οι πυθμένες των δύο κυλίνδρων να έχουν το ίδιο βύθισμα ($h_A=h_B$)?



Επίλυση

(α) *Εάν τοποθετηθεί έρμα, του ίδιου βάρους W=6 kp και στα δύο δοχεία, δώστε τη βύθιση του Α σχετικά με τη βύθιση του Β (h_A/h_B=?)*

Διαγράμματα ελευθέρου σώματος (Δ.Ε.Σ.) έρματος & δοχείου Α



Ισορροπία δυνάμεων στη δ/νση y:

Δ.Ε.Σ. έρματος

$$\sum Fy = 0 \;\Rightarrow\; R - W = 0 \;\Rightarrow\; R = W \tag{1}$$

Δ.Ε.Σ. δοχείου Α

$$\sum Fy = 0 \Rightarrow \rho g h_A \frac{\pi D_A^2}{4} - A_A - R = 0 \;\Rightarrow\; \rho g h_A \frac{\pi D_A^2}{4} = A_A + W \;\Rightarrow\; h_A = \frac{4(A_A + W)}{\rho g \pi D_A^2} \tag{2}$$

Ομοίως, από τα ΔΕΣ έρματος & δοχείου Β, προκύπτει η σχέση για το βύθισμα, h_B, του δοχείου Β.

$$h_B = \frac{4(A_B + W)}{\rho g \pi D_B^2} \tag{3}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο εκφράσεις προκύπτει η γενική έκφραση

$$\frac{h_A}{h_B} = \frac{\dfrac{4(A_A + W)}{\rho g \pi D_A^2}}{\dfrac{4(A_B + W)}{\rho g \pi D_B^2}} = \frac{(A_A + W)D_B^2}{(A_B + W)D_A^2} \tag{4}$$

η οποία μετά από αντικατάσταση των δεδομένων αναλογιών μεταξύ των δοχείων Α & Β γίνεται

$$\frac{h_A}{h_B} = \frac{(A_A + W)D_B^2}{(A_B + W)D_A^2} = \frac{(4A_B + W)D_B^2}{(A_B + W)(3D_B)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{h_A}{h_B} = \frac{1}{9}\frac{(4A_B + W)}{(A_B + W)} \tag{5}$$

και μετά από αντικατάσταση των δεδομένων τιμών των απόβαρων και του έρματος γίνεται

$$\frac{h_A}{h_B} = \frac{1}{9}\frac{(4A_B + W)}{(A_B + W)} = \frac{1}{9}\frac{(4\times 1kp + 6kp)}{(1kp + 6kp)} = \frac{1}{9}\frac{10kp}{7kp} \quad \Rightarrow \quad \frac{h_A}{h_B} = \frac{10}{63} \tag{6}$$

(β) *Ποιά πρέπει να είναι η αναλογία βάρους, $e=W_A/W_B$, των ερμάτων στα δοχεία Α & Β, ώστε οι πυθμένες των δύο κυλίνδρων να έχουν το ίδιο βύθισμα ($h_A=h_B$)?*

Εάν τα έρματα Α & Β έχουν διαφορετικά βάρη, (W_A & W_B), τότε οι σχέσεις για το βύθισμα κάθε δοχείου γίνονται

$$h_A = \frac{4(A_A + W_A)}{\rho g \pi D_A^2} \quad \text{και} \quad h_B = \frac{4(A_B + W_B)}{\rho g \pi D_B^2} \tag{7}$$

Επομένως για να έχουν το ίσο βύθισμα τα δύο δοχεία

$$h_A = h_B \quad \Rightarrow \quad \frac{4(A_A + W_A)}{\rho g \pi D_A^2} = \frac{4(A_B + W_B)}{\rho g \pi D_B^2} \tag{8}$$

και για τις δεδομένες αναλογίες μεταξύ των δύο δοχείων προκύπτει

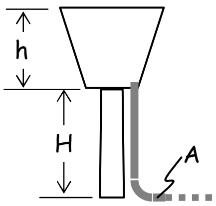
$$\frac{4(A_A + W_A)}{\rho g \pi D_A^2} = \frac{4(A_B + W_B)}{\rho g \pi D_B^2} \underset{\substack{D_A = 3D_B \\ A_A = 4A_B}}{\Rightarrow} W_A = 5A_B + 9W_B \quad \Rightarrow \tag{9}$$

$$e = \frac{W_A}{W_B} = \frac{5A_B}{W_B} + 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{W_A}{W_B} = \frac{5kp}{W_B} + 9 \tag{10}$$

Όταν τα απόβαρα των δοχείων Α & Β θεωρηθούν αμελητέα ($A_A=A_B=0$), οι σχέσεις (5) & (9) γίνονται:

$$\frac{h_A}{h_B} = \frac{1}{9} \quad \text{και} \quad h_A = h_B \quad \Rightarrow \quad W_A = 9W_B \quad \Rightarrow \quad e = \frac{W_A}{W_B} = 9$$

Άσκηση 2.4



Σε έναν αρδευτικό υδατόπυργο η **κωνική δεξαμενή**, ύψους h=[12+(**N**/3)]m και μέσης διαμέτρου D=10m, στηρίζεται σε πυλώνα ύψους H=[21+(**N**/2)]m από την επιφάνεια του εδάφους.

Να βρείτε την ελάχιστη ($p_{0,min}$) και τη μέγιστη ($p_{0,max}$) πίεση του νερού που θα αναπτύσσεται στο άκρο κατώτερο άκρο A του αγωγού εκροής της δεξαμενής στην επιφάνεια του εδάφους. (Ο αγωγός εκροής ξεκινάει από τον πυθμένα της δεξαμενής και καταλήγει στην επιφάνεια του εδάφους για την τροφοδοσία του αρδευτικού συστήματος).

Επίλυση

Απλό πρόβλημα υδροστατικής… Το σχήμα και οι διαστάσεις του υδατόπυργου δεν παίζουν κανένα ρόλο. Μόνο τα ύψη στις ακραίες στάθμες του νερού, H και (H+h).

Μέγιστη πίεση $P_{max}=\rho g(H+h)$ και

ελάχιστη πίεση $P_{min}= \rho gH$

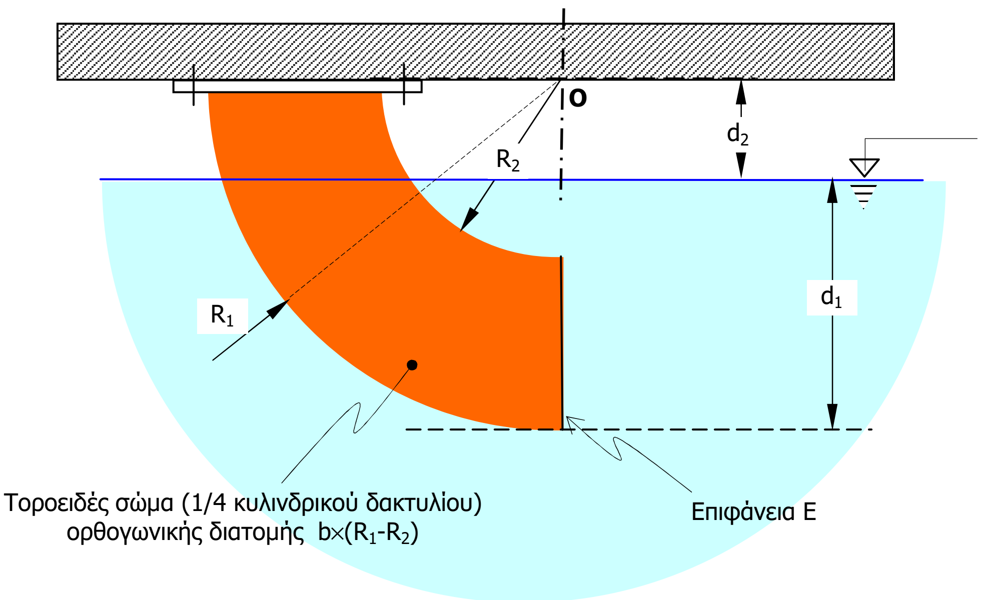
Άσκηση 2.5

Σε μια μεγάλη στεθερή πλάκα προσαρμόζεται ένα τοροειδές σώμα (δηλαδή το 1/4 από ένα κυλινδρικό δακτύλιο) ορθογωνικής διατομής $b\times(R_1\text{-}R_2)$, όπου b=75mm είναι η αξονική διάσταση του κυλίνδρου (το μήκος του κυλίνδρου), R_1=200mm και R_2=100mm η εξωτερική & εσωτερική ακτίνα του κυλινδρικού δακτυλίου, και O το κέντρο του κυλίνδρου που συμπίπτει με την ακμή της στήριξης του ζυγού. Αυτό το τοροειδές σώμα βυθίζεται σε νερό που ηρεμεί σε διαφορετικές κάθε φορά τελικές στάθμες. Το ύψος κάθε στάθμης μετριέται από το κατώτερο μέρος του σώματος με την απόσταση d_1.

Αρχικά η δεξαμενή γεμίζεται με νερό μέχρι το κατώτερο σημείο του τοροειδούς σώματος.

Στη συνέχεια, προστίθεται νερό στη δεξαμενή και η τελική στάθμη της επιφάνειας του νερού ανέρχεται σε κάποιο ύψος d_1 ως προς την αρχική στάθμη.

Να προσδιορισθεί το μέγεθος, η διεύθυνση /φορά και το σημείο εφαρμογής (κέντρο πίεσης) της συνισταμένης των υδροστατικών δυνάμεων που αναπτύσσονται στο τμήμα του κυλινδρικού τοροειδούς σώματος, που βυθίζεται σε νερό για διαφορετικά ύψη d_1 της στάθμης του νερού $0<d_1<R_1$.



Επίλυση

Ο προσδιορισμός του κέντρου πίεσης της συνισταμένης δύναμης θα γίνει με εφαρμογή των γνωστών εκφράσεων της υδροστατικής

Η τιμή της συνισταμένης υδροστατικής δύναμης F υπολογίζεται από την έκφραση

$$F=\rho g y_{\kappa\beta} \tag{1}$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του νερού και $y_{\kappa\beta}$ είναι το βάθος του κέντρου βάρους της <u>βρεχόμενης</u> επιφάνειας του τόρου.

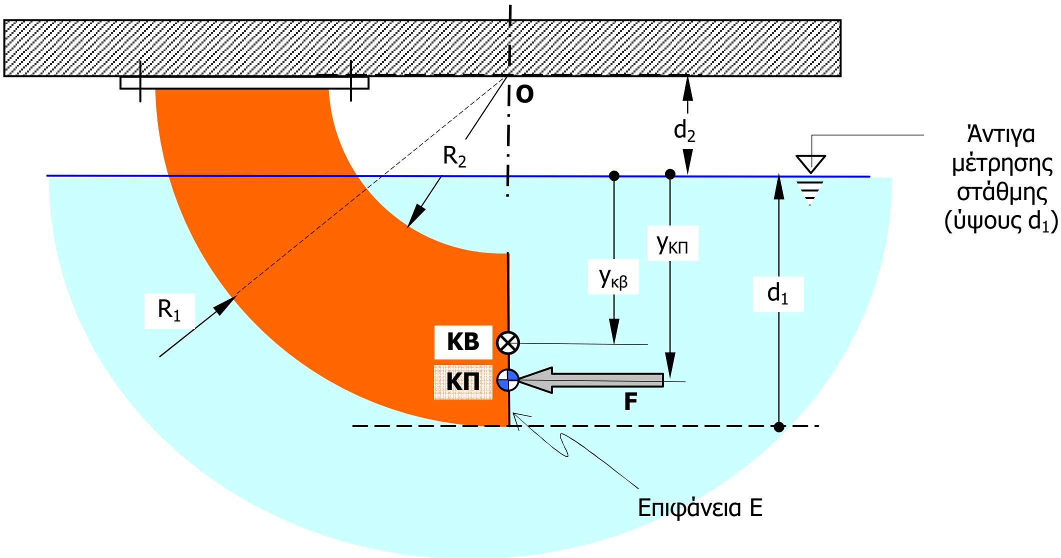
Η θέση του κέντρου πίεσης, $y_{K\Pi}$, μπορεί να προσδιορισθεί αναλυτικά από την έκφραση

$$y_{K\Pi}=I_{XX}/(y_{\kappa\beta}A) \tag{2}$$

όπου I_{XX} η δευτεροβάθμια ροπή αδράνειας της επιφάνειας Ε ως προς άξονα X πάνω στην επιφάνεια του νερού και παράλληλο στον OO'. Η I_{XX} μπορεί να υπολογισθεί από την έκφραση

$$I_{XX}=I_{XoXo}+y_{\kappa\beta}^2 A \tag{3}$$

όπου I_{XoXo} η δευτεροβάθμια ροπή αδράνειας της επιφάνειας ως προς κεντροβαρικό άξονα, παράλληλο στον άξονα ΟΟ'.



Εικόνα 1 Σχεδιάγραμμα των γεωμετρικών μεγεθών που είναι απαραίτητα για την υδροστατική ανάλυση του τοροειδούς σώματος

Το βάθος του κέντρου βάρους, $y_{κβ}$, και το βάθος του κέντρου πίεσης, $y_{κπ}$, υπολογίζονται ως ακολούθως

Πάντα θα ισχύει $R_1 = d_2 + d_1$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

(Α)

μέρος της επιφάνειας Ε είναι βυθισμένη,

δηλαδή όταν $R_2<d_2<R_1 \Leftrightarrow 0<d_1<(R_1-R_2)$

$$y_{κβ} = \frac{d_1}{2}$$

$$I_{x_o x_o} = \frac{d_1^3 b}{12}$$

(Β)

ολόκληρη η επιφάνεια Ε είναι βυθισμένη

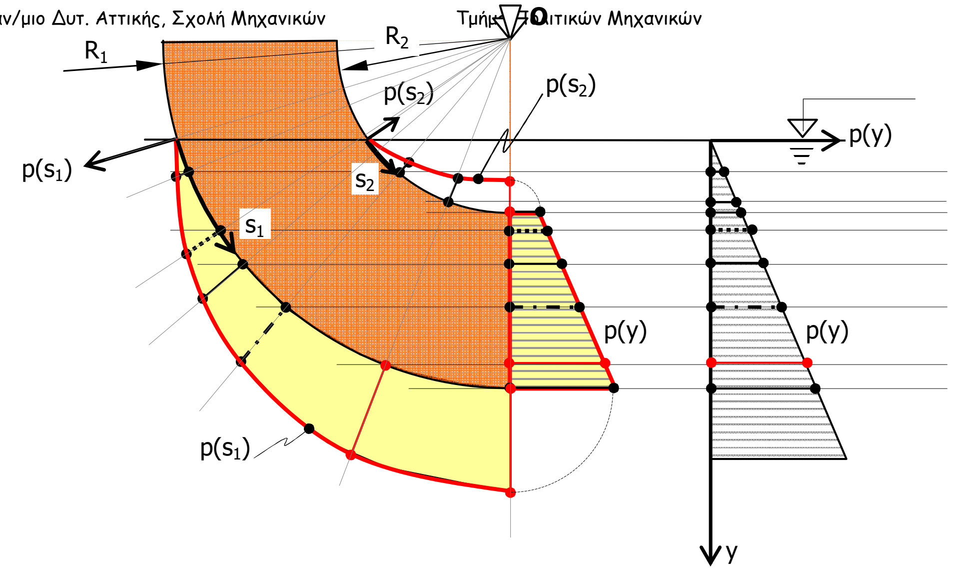
δηλαδή όταν $0<d_2<R_2 \Leftrightarrow (R_1-R_2)<d_1<R_1$

$$y_{κβ} = d_1 - \frac{R_1 - R_2}{2}$$

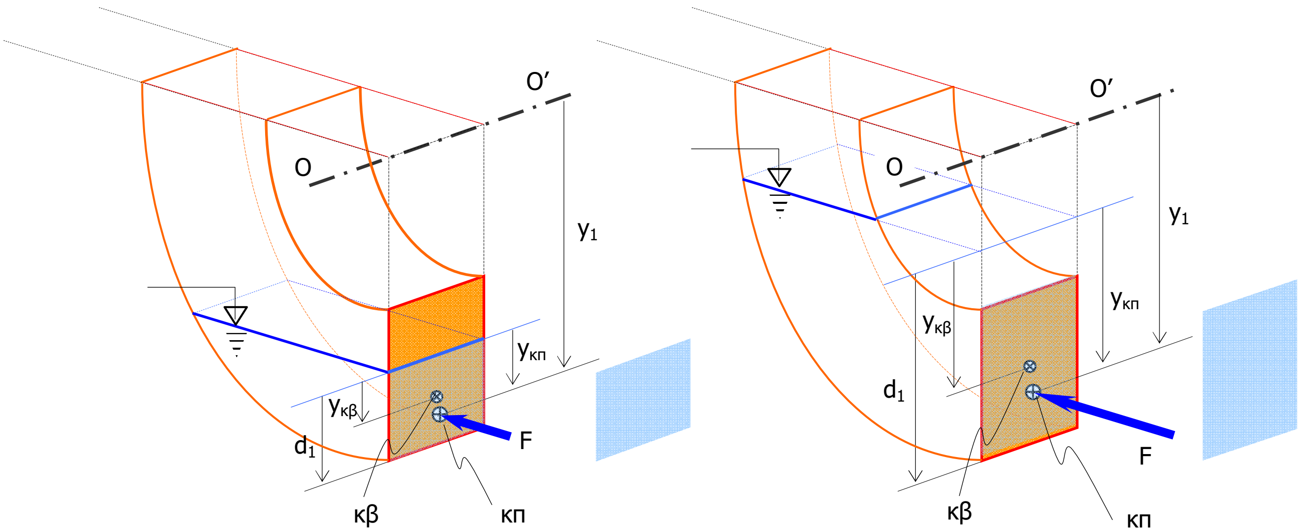
$$I_{x_o x_o} = \frac{(R_1 - R_2)^3 b}{12}$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>! Ολες οι διαστάσεις και μεγέθη θα πρέπει να υπολογίζονται για το <u>βρεχόμενο τμήμα</u> της ορθογώνιας επίπεδης επιφάνειας Ε (βλέπε και Εικόνες 2 & 3).

Λεπτομέρειες για τους τύπους (1), (5) & (6) παρουσιάζονται στο αντίστοιχο τυπολόγιο του e-class του μαθήματος https://education.teiath.gr/claroline/document/document.php και στη συνέχεια επιλέξτε «**Σημειώσεις-Τυπολόγια**» και ανοίξτε το αρχείο «**PressureInclinedSurf_moments.pdf**»



Εικόνα 2 Διάγραμμα της κατανομής της πίεσης του νερού επί της βυθισμένης επιφάνειας του σώματος. Απεικονίζονται τα χαρακτηριστικά των διαγραμμάτων πίεσης τόσο στην κατακόρυφη επίπεδη επιφάνεια, p(y), όσο και στις δύο κυλινδρικές επιφάνειες (σε ακτίνες R_1 & R_2), $p(s_1)$ & $p(s_2)$. Επίσης, απεικονίζεται ο συσχετισμός των χαρακτηριστικών των διαγραμμάτων κατανομής πίεσης που βοηθά στο γραφικό σχεδιασμό της κατανομής της πίεσης στις βυθισμένες επιφάνειες του σώματος, $p(s_1)$ & $p(s_2)$, με βάση τη βαθομετρική κατανομή της πίεσης, p(y).

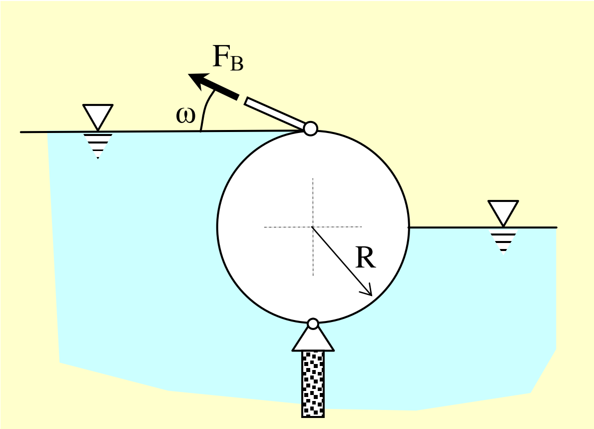


(A) **(B)**

Εικόνα 3 Τρισδιάστατη απεικόνιση δύο διαφορετικών περιπτώσεων βύθισης του τοροειδούς δακτυλίου στο νερό. (A) Μερική βύθιση της κατακόρυφης επιφάνεια του δακτυλίου (B) Πλήρης βύθιση της κατακόρυφης επιφάνεια του δακτυλίου. Δεξιά σε κάθε σκαρίφημα εμφανίζεται (με γαλάζιο χρώμα) η βρεχόμενη κατακόρυφη επιφάνεια του δακτυλίου Σε όλες τις περιπτώσεις οι θέσεις του γεωμετρικού κέντρου βάρους (κβ) της βρεχόμενης επιφάνειας και του κέντρου πίεσης (κπ) στο οποίο εφαρμόζεται η συνισταμένη υδροστατική δύναμη δίνονται ως βάθη από την εκάστοτε στάθμη του νερού.

Άσκηση 2.6

Σε μια δεξαμενή χρησιμοποιείται ένα ευθύγραμμο κυλινδρικό φράγμα μήκους L. Το φράγμα διαχωρίζει δύο διαφορετικές στάθμες νερού όπως στο διπλανό σκαρίφημα. Το φράγμα συγκρατείται στη θέση του από μια συνεχή ευθύγραμμη άρθρωση A και από μια ντίζα B. Να ευρεθούν:



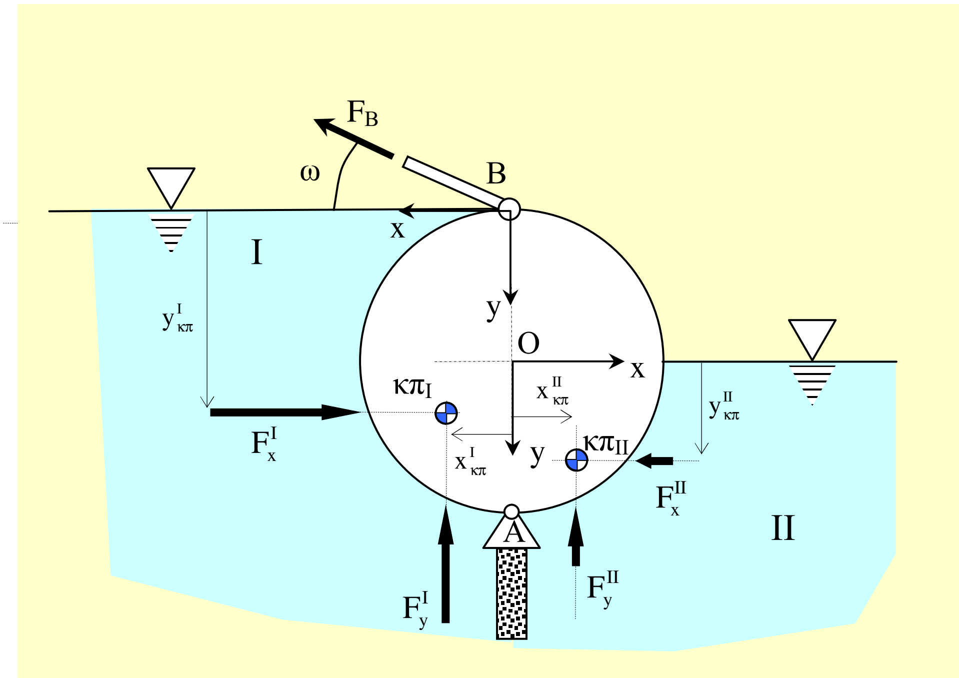
(α) για ποιά γωνία, ω, της ντίζας B, η δύναμη, F_B, η οποία παραλαμβάνεται είναι η ελάχιστη δυνατή,

(β) για τον προσανατολισμό του ερωτήματος (α), να ευρεθούν τα φορτία που αναπτύσσονται στην άρθρωση A.

Δίνονται: Πυκνότητα νερού: ρ=1000 kg/m^3, σχετική πυκνότητα υλικού κυλινδρικού φράγματος ρ*=1

Επίλυση

Με ένα κατακόρυφο επίπεδο θα διαιρέσουμε τον κύλινδρο και τη δεξαμενή σε δύο τμήματα, (I) και (II), ώστε να υπολογίσουμε ξεχωριστά τις υδροστατικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στο αριστερό και δεξί τμήμα του κυλίνδρου.



Εικόνα 3.1 Οι υδροστατικές δυνάμεις που εξασκούνται στα δύο τμήματα του κυλίνδρου. Προσέξτε τα δύο διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων Bxy και Oxy, στο αριστερό και δεξί τμήμα του κυλίνδρου αντίστοιχα.

Για τον υπολογισμό των υδροστατικών δυνάμεων θα χρησιμοποιήσουμε τη σχετική θεωρία για κεκλιμένες καμπύλες επιφάνειες.

<u>Στο Τμήμα (Ι)</u>

Η συνισταμένη υδροστατική δύναμη στο αριστερό τμήμα αναλύεται σε δύο συνιστώσες, την οριζόντια F_x^I και την κατακόρυφη F_y^I.

Τα μέτρα τους δίνονται από τις γνωστές εκφράσεις

$$F_x^I = \rho g A_x^I y_{\kappa\beta}^I = \rho g(2RL)R = 2\rho g R^2 L \qquad \text{και} \qquad F_y^I = \rho g V_y^I = \frac{\pi}{2}\rho g R^2 L \tag{1}$$

όπου

$A_x^I = 2RL$ είναι το εμβαδό της *προβολής* της βυθισμένης ημι-κυλινδρικής επιφάνειας ως προς κατακόρυφο επίπεδο παράλληλο στον άξονα του κυλίνδρου,

$y_{\kappa\beta}^I = R$ είναι η τεταγμένη του κέντρου βάρους της βυθισμένης ημικυλινδρικής επιφάνειας, και

$V_y^I = \frac{1}{2}\pi R^2 L$ είναι ο όγκος του νερού που εκτοπίζεται από το βυθισμένο τμήμα του κυλίνδρου στο αριστερό τμήμα της δεξαμενής.

Έτσι, τα μέτρα των υδροστατικών δυνάμεων δίνονται από τις εκφράσεις

$$F_x^I = 2\rho g R^2 L \quad \text{και} \qquad F_y^I = \frac{\pi}{2}\rho g R^2 L \tag{2}$$

Οι ευθείες εφαρμογής των προηγούμενων υδροστατικών δυνάμεων απέχουν αποστάσεις $y_{\kappa\pi}^I$ από την ελεύθερη στάθμη του νερού στο αριστερό τμήμα, και $x_{\kappa\pi}^I$ από το κατακόρυφο επίπεδο που περιέχει τον άξονα του κυλίνδρου, τα οποία δίνονται από τις εκφράσεις

$$y_{\kappa\pi}^I = \frac{I_{zz}^I}{y_{\kappa\beta}^I A_x^I} = \frac{I_{z0z0}^I + \left(y_{\kappa\beta}^I\right)^2 A_x^I}{y_{\kappa\beta}^I A_x^I} = \frac{\frac{1}{12}L(2R)^3 + R^2 L2R}{RL2R} = \frac{4}{3}R \tag{3}$$

$$x_{\kappa\pi}^I = x_{\kappa\beta}^I = \frac{4R}{3\pi} \tag{4}$$

Η συνισταμένη των F_x^I και F_y^I θα περνά από τον άξονα του κυλίνδρου. (Γιατί?)

<u>Στο Τμήμα (ΙΙ)</u>

Η συνισταμένη υδροστατική δύναμη στο δεξί τμήμα αναλύεται σε δύο συνιστώσες, την οριζόντια F_x^{II} και την κατακόρυφη F_y^{II}.

Τα μέτρα τους δίνονται από τις εκφράσεις

$$F_x^{II} = \rho g A_x^{II} y_{\kappa\beta}^{II} \qquad \text{και} \qquad F_y^{II} = \rho g V_y^{II} \tag{5}$$

όπου

$A_x^{II} = RL$ είναι το εμβαδό της *προβολής* της βυθισμένης 1/4-κυλινδρικής επιφάνειας ως προς κατακόρυφο επίπεδο παράλληλο στον άξονα του κυλίνδρου,

$y_{κβ}^{II} = R/2$ είναι η τεταγμένη του κέντρου βάρους της βυθισμένης ημικυλινδρικής επιφάνειας, και

$V_y^{II} = \frac{1}{4}\pi R^2 L$ είναι ο όγκος του νερού που εκτοπίζεται από την ύπαρξη του βυθισμένου τμήματος του κυλίνδρου στο δεξιό τμήμα της δεξαμενής.

Έτσι, τα μέτρα των υδροστατικών δυνάμεων δίνονται από τις εκφράσεις

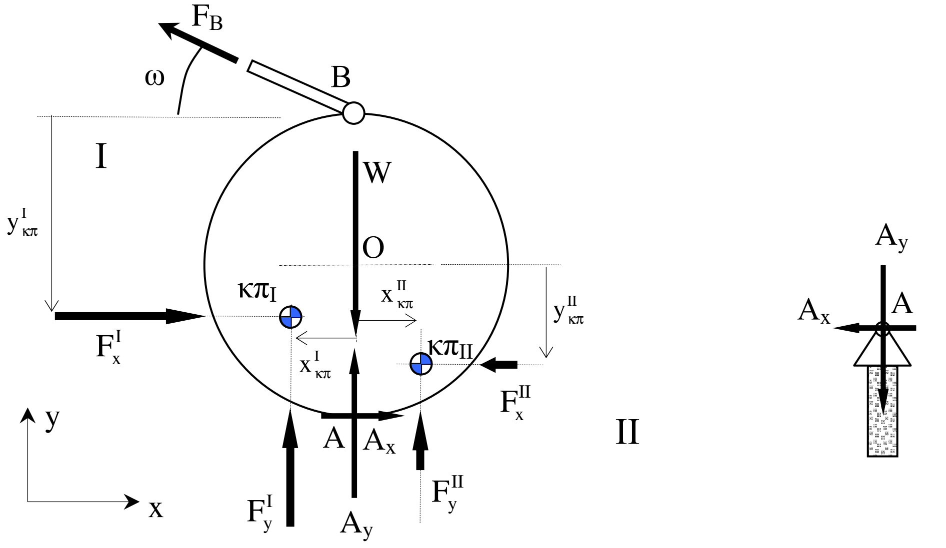
$$F_x^{II} = \frac{1}{2}\rho g R^2 L \qquad \text{και} \qquad F_y^{II} = \frac{\pi}{4}\rho g R^2 L \tag{6}$$

Οι ευθείες εφαρμογής των προηγούμενων υδροστατικών δυνάμεων απέχουν αποστάσεις $y_{κπ}^{II}$ από την ελεύθερη στάθμη του νερού στο δεξιό τμήμα, και $x_{κπ}^{II}$ από το κατακόρυφο επίπεδο που περιέχει τον άξονα του κυλίνδρου, τα οποία δίνονται από τις εκφράσεις

$$y_{κπ}^{II} = \frac{I_{zz}^{II}}{y_{κβ}^{II} A_x^{II}} = \frac{I_{z0z0}^{II} + \left(y_{κβ}^{II}\right)^2 A_x^{II}}{y_{κβ}^{II} A_x^{II}} = \frac{\frac{1}{12}LR^3 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 LR}{\frac{R}{2}LR} = \frac{2}{3}R \tag{7}$$

$$x_{κπ}^{II} = x_{κβ}^{II} = \frac{4R}{3\pi} \tag{8}$$

Με γνωστά τα μέτρα και τις ευθείες εφαρμογής των υδροστατικών δυνάμεων, ο υπολογισμός των αντιδράσεων στην άρθρωση Α και της φόρτισης της ντίζας αποτελεί ένα απλό ισοστατικό πρόβλημα. Θα λυθεί εξετάζοντας το Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος του κυλίνδρου συνολικά (Τμήματα Ι & ΙΙ).



Εικόνα 3.2 Διαγράμματα ελευθέρου σώματος του κυλίνδρου και της άρθρωσης Α.

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 2RF_B \cos\omega - \left(2R - y^{I}_{\kappa\pi}\right)F^{I}_x - x^{I}_{\kappa\pi}F^{I}_y + x^{II}_{\kappa\pi}F^{II}_y + \left(R - y^{II}_{\kappa\pi}\right)F^{II}_x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2RF_B \cos\omega - \left(2R - \frac{4}{3}R\right)2\rho g R^2 L - \frac{4R}{3\pi}\frac{\pi}{2}\rho g R^2 L + \frac{4R}{3\pi}\frac{\pi}{4}\rho g R^2 L + \left(R - \frac{2}{3}R\right)\frac{1}{2}\rho g R^2 L = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2RF_B \cos\omega = \left[2\left(\frac{2}{3}R\right) + \frac{4R}{6} - \frac{R}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}R\right)\right]\rho g R^2 L \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_B \cos\omega = \frac{3}{4}\rho g R^2 L} \qquad (9)$$

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο $F_B\cos\omega$ είναι σταθερό. Επειδή $0<\cos\omega<1$, η ελάχιστη τιμή του $F_B = \frac{3}{4}\rho g R^2 L$, προκύπτει για $\cos\omega=1$ δηλαδή για $\omega=0$.

(β) Για $\omega=0$ οι αντιδράσεις A_x και A_y, της άρθρωσης A έχουν τιμή:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow \quad RF_B \cos\omega + RA_x = 0 \quad \overset{\omega=0}{\Longrightarrow} \quad F_B + A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_x = -F_B = -\frac{3}{4}\rho g R^2 L} \quad (10)$$

και

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F^{I}_y - B + A_y + F_B \sin\omega + F^{II}_y = 0 \quad \overset{\omega=0}{\Longrightarrow} \quad A_y = -F^{I}_y + B - F^{II}_y \quad \Rightarrow$$

$$A_y = -\frac{\pi}{2}\rho g R^2 L + \rho\rho^* g\pi R^2 L - \frac{\pi}{4}\rho g R^2 L = \frac{1}{4}\left[4\rho^* - 3\right]\pi\rho g R^2 L \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{A_y = \frac{\pi}{4}\left[4\rho^* - 3\right]\rho g R^2 L} \qquad (11)$$

Η κατακόρυφη αντίδραση στην άρθρωση A μηδενίζεται όταν η σχετική πυκνότητα του κυλίνδρου γίνει $\rho^*=3/4$.