Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε.

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξεταστική περίοδος Ιουνίου

Αιγάλεω, 25 Ιουνίου 2015

Θέμα 1^{ο}: Έστω το επιχείρημα: «Στους Ολυμπιακούς Αγώνες δημιουργήθηκαν υπόνοιες για την αθλητική εντιμότητα του αθλητή *A*. Εάν δεν γινόταν έλεγχος ανίχνευσης αναβολικών ουσιών ή εάν ο αθλητής *A* ήταν «καθαρός» τότε αυτός θα συμμετείχε στον τελικό του αγωνίσματός του. Εάν συμμετείχε στον τελικό του αγωνίσματός του τότε δεν θα είχαν δημιουργηθεί υπόνοιες για την αθλητική του εντιμότητα. Επομένως, έγινε έλεγχος ανίχνευσης αναβολικών ουσιών».

(α) Διατυπώστε το επιχείρημα στη γλώσσα του προτασιακού λογισμού. **Μονάδες 10**

(β) Εξετάστε εάν το επιχείρημα είναι έγκυρο και δικαιολογήστε την απάντησή σας, δηλαδή, είτε αποδείξτε την εγκυρότητά του είτε, εάν πιστεύετε ότι δεν είναι έγκυρο, δώστε αντιπαράδειγμα το οποίο να πιστοποιεί την άποψή σας. **Μονάδες 10**

Θέμα 2^{ο}: Α) Να προσδιορίσετε την τιμή αληθείας της δήλωσης $\exists x\ \forall y\ (x \leq y^2)$ εάν το πεδίο των μεταβλητών αποτελείται από

α) τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς,

β) τους ακεραίους αριθμούς,

γ) τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς. **Μονάδες 10**

Β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο αριθμός $n^3 + 2n$ είναι πολλαπλάσιο του 3. **Μονάδες 10**

Θέμα 3^{ο}: Έστω *P* το σύνολο όλων των σημείων του καρτεσιανού επιπέδου εκτός της αρχής των αξόνων. *R* είναι η ορισμένη επί του *P* σχέση ως ακολούθως ($R \subseteq P \times P$):

Για όλα τα p_1 και p_2 στο *P*,

$(p_1, p_2) \in R \Leftrightarrow p_1 R\, p_2 \Leftrightarrow p_1$ και p_2 κείνται επί της ίδιας ημιευθείας απορρέουσα από την αρχή.

α) Να αποδείξετε ότι η σχέση είναι μία σχέση ισοδυναμίας. **Μονάδες 15**

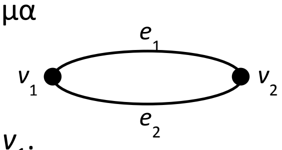
β) Να περιγράψετε τις διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας. **Μονάδες 5**

Θέμα 4^{ο}: Εξετάστε εάν για όλα τα υποσύνολα *A*, *B* και *C* ενός καθολικού συνόλου *U* ισχύει η

$$(A - B) \cap (C - B) = A - (B \cup C).$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας. **Μονάδες 20**

Θέμα 5^{ο}: Έστω *G* το (μη κατευθυνόμενο) γράφημα



και θεωρήστε τον περίπατο (διαδρομή) $v_1e_1v_2e_2v_1$.

α) Δύναται ο περίπατος αυτός να γραφεί με σαφήνεια ως $v_1v_2v_1$; Γιατί; **Μονάδες 10**

β) Δύναται ο περίπατος αυτός να γραφεί με σαφήνεια ως e_1e_2; Γιατί; **Μονάδες 10**

Θέμα 6^{ο}: Επιλύστε την αναδρομική σχέση

$$a_n - 2a_{n-2} = 8a_{n-1} - 18a_{n-2}$$

με οριακές συνθήκες $a_1 = 8$, $a_2 = 16$. **Μονάδες 20**

Να απαντήσετε σε 5 από τα 6 θέματα.

Καλή Επιτυχία

Απαντήσεις

Θέμα 1ο: Γράφουμε τις δηλώσεις σε συμβολική μορφή.
p: δημιουργήθηκαν υπόνοιες για την αθλητική εντιμότητα του αθλητή A,
q: γίνεται έλεγχος ανίχνευσης αναβολικών ουσιών,
r: ο αθλητής A είναι «καθαρός»,
s: ο αθλητής A συμμετέχει στον τελικό του αγωνίσματός του.

(α) p
$\neg q \vee r \to s$
$s \to \neg p$
$\therefore q$

(β)

Βήμα	**Αιτιολογία**
(1) $s \to \neg p$	Υπόθεση
(2) $p \to \neg s$	Αντιθετοαντιστροφή
(3) p	Υπόθεση
(4) $\neg s$	(2) και (3)
(5) $\neg q \vee r \to s$	Υπόθεση
(6) $\neg s \to \neg(\neg q \vee r)$	Αντιθετοαντιστροφή
(7) $\neg(\neg q \vee r) \equiv q \wedge \neg r$	(4) και (6)
(8) q	Ειδίκευση

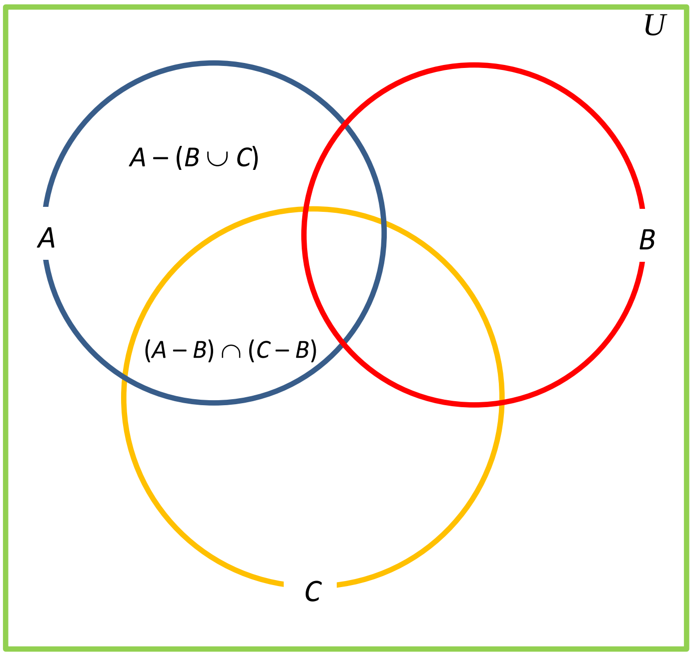
Θέμα 2ο: Α) Αυτή η πρόταση δηλώνει ότι υπάρχει ένας αριθμός μικρότερος από ή ίσος προς όλα τα τετράγωνα.
α) Είναι ψευδής, αφού ανεξαρτήτως του πόσο μικρό θετικό αριθμό x ενδέχετο να επιλέξουμε, εάν θέσουμε $y = \sqrt{x/2}$, τότε $x = 2y^2$ και δεν θα είναι αληθής ότι $x \le y^2$.
β) Είναι αληθής, αφού δυνάμεθα να λάβουμε $x = -1$, για παράδειγμα.
γ) Είναι αληθής, αφού δυνάμεθα να λάβουμε $x = -1$, για παράδειγμα.

Β) Ισχύει για $n = 1$, επειδή $1^3 + 2\cdot1 = 3$ είναι πολλαπλάσιο του 3, ισχύει για $n = 2$, επειδή $2^3 + 2\cdot2 = 8 + 4 = 12$ είναι πολλαπλάσιο του 3 και ισχύει για $n = 3$, επειδή $3^3 + 2\cdot3 = 27 + 6 = 33$ είναι πολλαπλάσιο του 3.
Υποθέτουμε ότι αληθεύει η p_n: $n^3 + 2n$ είναι πολλαπλάσιο του 3. Τότε $(n + 1)^3 + 2(n + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = n^3 + 2n + 3(n^2 + n + 1)$, δηλ. πολλαπλάσιο του 3 συν πολλαπλάσιο του 3 άρα πολλαπλάσιο του 3.

Θέμα 3ο:
α) Η R είναι ανακλαστική επειδή για κάθε σημείο p εν P, το p κείται επί της ίδιας ημιευθείας απορρέουσα από την αρχή όπως και το p.
Η R είναι συμμετρική επειδή για όλα τα σημεία p_1 και p_2 εν P, εάν το p_1 κείται επί της ίδιας ημιευθείας απορρέουσα από την αρχή όπως και το p_2 τότε το p_2 κείται επί της ίδιας ημιευθείας απορρέουσα από την αρχή όπως και το p_1.
Η R είναι μεταβατική επειδή για όλα τα σημεία p_1, p_2 και p_3 εν P, εάν το p_1 κείται επί της ίδιας ημιευθείας απορρέουσα από την αρχή όπως και το p_2 και το p_2 κείται επί της ίδιας ημιευθείας απορρέουσα από την αρχή όπως και το p_3 τότε το p_1 κείται επί της ίδιας ημιευθείας απορρέουσα από την αρχή όπως και το p_3.
Η R είναι μία σχέση ισοδυναμίας επειδή είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.
β) Υπάρχουν τόσες διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας όσα τα υπάρχοντα σημεία επί ενός κύκλου με κέντρο την αρχή. Κάθε κλάση ισοδυναμίας αποτελείται από όλα τα σημεία τα οποία κείνται επί της ίδιας ημιευθείας απορρέουσα από την αρχή.

Θέμα 4ο: Λανθασμένη. **1ος τρόπος.** Αντιπαράδειγμα: Έστω $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2\}$ και $C = \{1\}$. Τότε $A - B = \{1, 2, 3\} - \{2\} = \{1, 3\}$ και $C - B = \{1\} - \{2\} = \{1\}$ και έτσι $(A - B) \cap (C - B) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$. Από το άλλο μέρος, $B \cup C = \{1, 2\}$ και έτσι $A - (B \cup C) = \{1, 2, 3\} - \{1, 2\} = \{3\}$. Ως εκ τούτου $(A - B) \cap (C - B) \neq A - (B \cup C)$.

2^{ος} τρόπος. Χρησιμοποιώντας διάγραμμα Venn.



Θέμα 5^{ο}: Έστω G ένα γράφημα και έστωσαν v και w κορυφές εν G. Ένας **περίπατος από την *v* προς την *w*** είναι μια πεπερασμένη εναλλασσόμενη ακολουθία γειτονικών κορυφών και ακμών του G. Άρα ένας περίπατος έχει τη μορφή

$$v_0e_1v_1e_2\cdots v_{n-1}e_nv_n,$$

όπου οι v αντιπροσωπεύουν κορυφές, οι e αντιπροσωπεύουν ακμές, $v_0 = v$, $v_n = w$ και για όλους τους i = 1, 2, …, n, v_{i-1} και v_i είναι τελικά σημεία των e_i.

α) Όχι. Ο συμβολισμός $v_1v_2v_1$ θα μπορούσε να αναφέρεται εξ ίσου στον $v_1e_1v_2e_2v_1$ ή τον $v_1e_2v_2e_1v_1$, οι οποίοι είναι διαφορετικοί περίπατοι.

β) Όχι, επειδή e_1e_2 θα μπορούσε να αναφέρεται είτε στον $v_1e_1v_2e_2v_1$ είτε τον $v_2e_1v_1e_2v_2$.

Θέμα 6^{ο}: Η εν λόγω αναδρομική σχέση έχει χαρακτηριστική εξίσωση

$$t^2 - 8t + 16 = (t-4)^2 = 0$$

έχουσα ως διπλή ρίζα την $t = 4$.

Από το Θεώρημα της μίας ρίζας έπεται ότι η $a_1, a_2, a_3, \ldots$ δίδεται από τον κατηγορηματικό τύπο

$$a_n = C{\cdot}4^n + Dn\,4^n \text{ για όλους τους ακεραίους } n \geq 1.$$

Προς εύρεση των σταθερών γράφουμε

$$a_1 = 8 = C{\cdot}4 + D{\cdot}4 \text{ ή } C + D = 2.$$

$$a_2 = 16 = C{\cdot}4^2 + D{\cdot}2{\cdot}4^2 = 16C + 32D \text{ ή } C + 2D = 1.$$

Αντικαθιστώντας τα $D = -1$ και $C = 3$ συμπεραίνουμε ότι

$$a_n = (3-n)\,4^n.$$