Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε.

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξέταση προόδου

Αιγάλεω, 18 Μαΐου 2015

Θέμα 1$^{\text{ο}}$: Έστωσαν p, q, r, s, t προτάσεις της γλώσσας του προτασιακού λογισμού. Να εξετάσετε, εάν το παρακάτω επιχείρημα είναι έγκυρο και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ (q \vee s) \to t \\ \bar{t} \\ \therefore\ \bar{p} \vee \bar{r} \end{array}$$

Μονάδες 25

Θέμα 2$^{\text{ο}}$: Ένας ύποπτος εγκλήματος, όταν ηρωτήθη εάν αυτός ήταν ο δράστης, ανέφερε το εξής: Θα σας έλεγα την αλήθεια εάν, και μόνον εάν, είχα πράξει εγώ το έγκλημα. Γνωρίζουμε ότι ο ύποπτος είτε λέει πάντοτε την αλήθεια είτε λέει πάντοτε ψέματα. Είναι αυτός ο ένοχος;

Μονάδες 25

Θέμα 3$^{\text{ο}}$: Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1},$$

για όλους τους ακεραίους $n \geq 1$.

Μονάδες 25

Θέμα 4$^{\text{ο}}$: Έστω $A = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$. Ορίσατε μία σχέση R επί του A ως ακολούθως: Για όλα τα (a, b) και (c, d) εν A,

$$(a, b)\ R\ (c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b.$$

α) Να αποδείξετε ότι η R είναι μία σχέση ισοδυναμίας.

Μονάδες 15

β) Ποία η κλάση ισοδυναμίας στην οποία ανήκει το ζεύγος (2, 5);

Μονάδες 10

Θέμα 5$^{\text{ο}}$: Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας εις άτοπον απαγωγή, ότι για όλα τα υποσύνολα A, B και C ενός καθολικού συνόλου U,

$$\text{εάν } B \cap C \subseteq A, \text{ τότε } (B - A) \cap (C - A) = \varnothing.$$

Μονάδες 25

Να απαντήσετε σε 4 από τα 5 θέματα.

Καλή επιτυχία

Απαντήσεις

Θέμα 1^{ο}:

Βήμα		**Αιτιολογία**
(1)	$(q \vee s) \rightarrow t$	Υπόθεση
(2)	$\bar{t}$	Υπόθεση
(3)	$\overline{q \vee s}$	(1), (2) και Modus Tollens
(4)	$\bar{q} \wedge \bar{s}$	Νόμος de Morgan
(5)	$p \rightarrow q$	Υπόθεση
(6)	$\bar{p}$	(4), (5) και Modus Tollens
(7)	$r \rightarrow s$	Υπόθεση
(8)	$\bar{r}$	(4), (7) και Modus Tollens
(9)	$\bar{p} \wedge \bar{r}$	(6), (8) και σύζευξη
(10)	$\bar{p} \vee \bar{r}$	Γενίκευση

Θέμα 2^{ο}:

Έστω p η πρόταση «Λέω την αλήθεια» και έστω q η πρόταση «Έχω πράξει το έγκλημα». Τότε ο ισχυρισμός του υπόπτου, δηλ. «Λέω την αλήθεια *εάν, και μόνον εάν,* έχω πράξει το έγκλημα», δύναται να γραφεί ως $p \leftrightarrow q$. Ο πίνακας αληθείας του $p \leftrightarrow q$ έχει ως εξής:

p	q	$p \leftrightarrow q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α

Αρκεί να επισημάνουμε ότι οι δύο τύποι p και $p \leftrightarrow q$ πρέπει να έχουν την ίδια αληθοτιμή. Τότε, παρατηρούμε από τον ανωτέρω πίνακα αληθείας (στήλες πρώτη και τρίτη), ότι ο τύπος q παίρνει την τιμή Α. Πιο συγκεκριμένα.

Υποτεθείσθω ότι ο ύποπτος λέει πάντοτε την αλήθεια. Τότε η p είναι αληθής και από την ανωτέρω συνεπαγωγή αυτό είναι ισοδύναμο με το να έχει πράξει το έγκλημα και να παραδέχεται την ενοχή του.

Υποτεθείσθω ότι ο ύποπτος λέει πάντοτε ψέματα. Άρα η πρόταση p είναι ψευδής, όπως επίσης και ο ισχυρισμός του υπόπτου. Από τον πίνακα αληθείας, η κατάσταση αυτή αντανακλάται στην τρίτη γραμμή, όπου η q είναι αληθής. Άρα ο ύποπτος είναι ένοχος.

Θέμα 3^{ο}:

Βάση: $n = 1$ $\quad \dfrac{1}{1(1+1)} = \dfrac{1}{1+1}$.

Επαγωγικό βήμα:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]}$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Θέμα 4^{ο}:

α) Πρέπει να αποδείξουμε ότι η εν λόγω σχέση είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

Έστω (a, b) οιοδήποτε στοιχείο του $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$. Πρέπει να δείξουμε ότι $(a, b)\ R\ (a, b)$. Εξ ορισμού της R, η σχέση αυτή ισχύει εάν, και μόνον εάν, $a + b = b + a$. Αλλά αυτή η εξίσωση αληθεύει λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας της πρόσθεσης για πραγματικούς αριθμούς. Ως εκ τούτου η R είναι ανακλαστική.

Έστωσαν (a, b) και (c, d) οιαδήποτε στοιχεία του $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$. Πρέπει να δείξουμε ότι εάν $(a, b)\ R\ (c, d)$ τότε $(c, d)\ R\ (a, b)$. Εξ ορισμού της R, η $(a, b)\ R\ (c, d)$ ισχύει εάν, και μόνον εάν, $a + d = c + b$, δηλ $c + b = a + d$. Ως εκ τούτου η R είναι συμμετρική.

Έστωσαν (a, b), (c, d) και (e, f) οιαδήποτε στοιχεία του $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$. Πρέπει να δείξουμε ότι εάν $a + d = c + b$ and $c + f = d + e$, τότε $a + f = b + e$. Αθροίζοντας κατά μέλη έχουμε $a + d + c + f = c + b + d + e$ από το οποίο συνάγεται η αποδεικτέα.

β) $[(2, 5)] = \{(a, b) \in A : (a, b)\ R\ (2, 5)\} = \{(a, b) \in A : a + 5 = 2 + b\} = \{(a, b) \in A : b - a = 3\}$. Μία ενδεχόμενη απάντηση: (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8) κ.ο.κ.

Θέμα 5^o:

Υποθέτουμε ότι $(B - A) \cap (C - A) \neq \varnothing$. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο $x \in (B - A) \cap (C - A)$. Εξ ορισμού της τομής, $x \in B - A$ και $x \in C - A$, δηλ. $x \in B \cap A^c$ και $x \in C \cap A^c$, δηλ. $x \in B \cap C$ και $x \in A^c$. Τότε, αφού $B \cap C \subseteq A$, $x \in A$ εξ ορισμού του υποσυνόλου και $x \in A^c$, το οποίο είναι αντίφαση. Έτσι, η προϋπόθεση ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο $x \in (B - A) \cap (C - A)$ είναι λανθασμένη. Άρα $(B - A) \cap (C - A) = \varnothing$.