ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ :

“ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ”

ΓΡΑΜΜΑΤΗ ΠΑΝΤΖΙΟΥ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ

1.2 **Προτασιακός Λογισμός**

1.1.1 Η Γλώσσα του Προτασιακού Λογισμού

Πρόταση στη Λογική είναι μια φράση η οποία μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής. Για παράδειγμα οι φράσεις "Ο 17 είναι άρτιος ακέραιος" και "Αν x=2 τότε 4-x>0" είναι προτάσεις, ενώ η φράση "Ο x+5 είναι άρτιος ακέραιος" δεν είναι πρόταση. Μέσω της *γλώσσας του προτασιακού λογισμού* θα μελετήσουμε την λογική των προτάσεων. `Εστω οι προτάσεις:

α) p: Τα Διακριτά Μαθηματικά είναι υποχρεωτικό μάθημα.
β) q: Είμαι σπουδαστής του Τμήματος Πληροφορικής.
γ) r: Το φωτοτυπικό μηχάνημα του Τμήματος είναι χαλασμένο σήμερα.

Οι προτάσεις αυτές είναι *απλές προτάσεις* διότι δεν είναι δυνατόν να τις αναλύσουμε και να τις απλοποιήσουμε περαιτέρω. Κάθε πρόταση μπορεί να πάρει μια από τις εξής δύο τιμές αληθείας: αλήθεια (1) ή ψεύδος (0). Οι απλές προτάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν μαζί με λογικούς συνδέσμους προκειμένου να σχηματίσουμε *σύνθετες προτάσεις*. Συγκεκριμένα, η άρνηση μιας πρότασης και η σύνθεση δύο προτάσεων ορίζονται ως εξής:

1. *`Αρνηση:* Η άρνηση μιας πρότασης p δηλώνεται με $\bar{p}$ ή p'ή $\neg$p, και διαβάζεται "όχι p". Αν p είναι η πρόταση που ορίστηκε παραπάνω, τότε $\neg$p είναι η πρόταση: "Τα Διακριτά Μαθηματικά δεν είναι υποχρεωτικό μάθημα". Η πρόταση $\neg$p είναι αληθής όταν η p είναι ψευδής και αντίστροφα.

2. *Σύζευξη:* Η σύζευξη των προτάσεων p και q δηλώνεται με p $\wedge$ q, και διαβάζεται "p και q". Στο παράδειγμά μας, p $\wedge$ q είναι η πρόταση: "Τα Διακριτά Μαθηματικά είναι υποχρεωτικό μάθημα, *και* είμαι σπουδαστής του Τμήματος Πληροφορικής". Η πρόταση είναι αληθής μόνον όταν και οι δύο προτάσεις p και q είναι αληθείς.

3. *Διάζευξη:* Η έκφραση p $\vee$ q δηλώνει τη διάζευξη των προτάσεων p και q, και διαβάζεται "p ή q". Στο παράδειγμά μας, p $\vee$ q είναι η πρόταση: "Τα Διακριτά Μαθηματικά είναι υποχρεωτικό μάθημα, *ή* είμαι σπουδαστής του Τμήματος Πληροφορικής". Το "ή" δεν χρησιμοποιείται με την αποκλειστική του μορφή. Δηλαδή, η πρόταση p $\vee$ q είναι αληθής όταν μία από τις προτάσεις p και q ή και οι δύο είναι αληθείς. Το αποκλειστικό "ή" δηλώνεται με p $\veebar$ q. Η σύνθετη πρόταση p $\veebar$ q είναι αληθής όταν η *μία* εκ των προτάσεων p, q (αλλά όχι και οι δύο) είναι αληθής.

4. *Συνεπαγωγή:* Λέμε ότι "η p συνεπάγεται την q" ή "αν p, τότε q" και γράφουμε "p $\rightarrow$ q" για να εκφράσουμε την συνεπαγωγή της q από την p. Με βάση το παραπάνω παράδειγμα,

$p \to q$ είναι η πρόταση: "*Αν* τα Διακριτά Μαθηματικά είναι υποχρεωτικό μάθημα, *τότε* είμαι σπουδαστής του Τμήματος Πληροφορικής". Η πρόταση p καλείται υπόθεση της συνεπαγωγής, ενώ η q καλείται συμπέρασμα. Η πρόταση $p \to q$ είναι αληθής σε όλες τις περιπτώσεις, εκτός εάν η p είναι αληθής και η q ψευδής. Για παράδειγμα, η πρόταση "αν 2+1=3, τότε 3+2=4" είναι ψευδής, ενώ η πρόταση "αν 2+1=5, τότε 3+2=4" είναι αληθής, μολονότι οι προτάσεις "2+1=5" και "3+2=4" είναι και οι δύο ψευδείς.

5. *Ισοδυναμία:* Η έκφραση $p \leftrightarrow q$ δηλώνει τη διάζευξη των προτάσεων p και q, και διαβάζεται "p είναι ισοδύναμη με την q", ή "p αν και μόνον αν (ανν) q", ή "η p είναι αναγκαία και ικανή για την q". Με βάση το παραπάνω παράδειγμα, $p \leftrightarrow q$ είναι η πρόταση: "Τα Διακριτά Μαθηματικά είναι υποχρεωτικό μάθημα αν και μόνον αν είμαι σπουδαστής του Τμήματος Πληροφορικής". Η πρόταση $p \leftrightarrow q$ είναι αληθής αν οι προτάσεις p και q έχουν την ίδια τιμή αληθείας (δηλαδή είναι και οι δύο αληθείς ή και οι δύο ψευδείς).

Οι πίνακες αληθείας οι οποίοι ακολουθούν, συνοψίζουν τις τιμές αληθείας των σύνθετων προτάσεων σε σχέση με τις τιμές αληθείας των προτάσεων p και q.

p	$\neg p$
0	1
1	0

Πίνακας 1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Upsilon q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

Πίνακας 2

Ακολουθεί ο τυπικός ορισμός της γλώσσας L του προτασιακού λογισμού και των προτάσεων της γλώσσας αυτής.

Ορισμός. Η γλώσσα L του *προτασιακού λογισμού* αποτελείται από τα εξής:

- Ενα αριθμήσιμο πλήθος μεταβλητών, οι οποίες λέγονται *προτασιακές* μεταβλητές.
- Τους λογικούς συνδέσμους $\neg$, $\wedge$, $\vee$, Υ, $\to$, $\leftrightarrow$.
- Τις παρενθέσεις (και).

Το σύνολο T(L) προτάσεων της γλώσσας L ορίζεται ως εξής:

1) Κάθε προτασιακή μεταβλητή είναι πρόταση.
2) Αν p και q είναι προτάσεις της L, τότε οι: $(\neg p)$, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \Upsilon q)$, $(p \to q)$, $(p \leftrightarrow q)$ είναι προτάσεις της L.

3) Δεν υπάρχουν άλλες προτάσεις της L εκτός από αυτές που ορίζονται στα 1) και 2) του ορισμού αυτού.

Οι παρενθέσεις χρησιμοποιούνται για να τηρείται κάποια προτεραιότητα κατά την εφαρμογή των λογικών συνδέσμων. Πολλές φορές παραλείπουμε κάποιες παρενθέσεις σύμφωνα με τους εξής κανόνες:

- Οι εξωτερικές παρενθέσεις μιας πρότασης παραλείπονται.
- Ο σύνδεσμος $\neg$ έχει προτεραιότητα έναντι όλων των άλλων συνδέσμων.
- Οι σύνδεσμοι $\wedge$, $\vee$, ϒ έχουν προτεραιότητα έναντι των $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
- Οι $\wedge$, $\vee$, ϒ είναι ισοδύναμοι μεταξύ τους. Επίσης, οι $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ είναι ισοδύναμοι μεταξύ τους.

Ορισμός. Μια πρόταση η οποία είναι πάντα αληθής καλείται *ταυτολογία*. Μια πρόταση η οποία είναι πάντα ψευδής καλείται *αντίφαση*.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο To για να δηλώνουμε μια ταυτολογία, και το σύμβολο Fo για να δηλώνουμε μια αντίφαση.

1.1.2 Ταυτολογική Ισοδυναμία: Οι Νόμοι της Λογικής

Στον προτασιακό λογισμό χρησιμοποιούμε τους πίνακες αληθείας των προτάσεων προκειμένου να μελετήσουμε, πότε δύο προτάσεις *είναι ουσιαστικά οι ίδιες (ταυτολογικά ισοδύναμες)*. `Εστω οι παρακάτω πίνακες αληθείας.

p	q	$\neg$p	$\neg$p$\vee$ q	p $\rightarrow$ q
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Πίνακας 3

Παρατηρούμε ότι στους πίνακες αυτούς, οι αντίστοιχες τιμές αληθείας για τις προτάσεις $\neg p\vee q$ και $p \rightarrow q$ είναι ακριβώς οι ίδιες.

Ορισμός. Δύο προτάσεις s1 και s2 καλούνται *ταυτολογικά ισοδύναμες* και γράφουμε s1 $\Leftrightarrow$ s2, όταν οι πίνακες αληθείας των s1, s2 είναι ίδιοι.

Κατά τον ίδιο τρόπο από τους πίνακες αληθείας του Πίνακα 4 που ακολουθεί έχουμε ότι

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \qquad (1)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτολογική ισοδυναμία που προκύπτει από τον Πίνακα 3, η παραπάνω έκφραση (1) γράφεται ως εξής:

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \qquad (2)$$

Η έκφραση (2) στην πραγματικότητα δηλώνει ότι εφόσον ειθυμούμε, μπορούμε να εξαλείψουμε την συνεπαγωγή και την ισοδυναμία από τις σύνθετες προτάσεις.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Πίνακας 4

Παρατηρώντας τον Πίνακα 5 συμπεραίνουμε ότι η άρνηση μαζί με τους λογικούς συνδέσμους “και” ($\wedge$) και “ή” ($\vee$) μπορούν να αντικαταστήσουν τον σύνδεσμο “αποκλειστικό ή” (Υ). Επίσης, εφόσον επιθυμούμε μπορούμε να αντικαταστήσουμε ακόμη και τους συνδέσμους $\wedge$ και $\vee$.

p	q	$p \Upsilon q$	$p \vee q$	$\neg(p \wedge q)$	$(q \vee p) \wedge \neg(p \wedge q)$
0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0

Πίνακας 5

Ορισμός. `Εστω $A \subseteq \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \Upsilon\}$. Το Α καλείται *επαρκές* αν κάθε πρόταση $p \in T(L)$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμη με μια πρόταση που περιέχει μόνο συνδέσμους που ανήκουν στο σύνολο Α.

Για παράδειγμα, είδαμε παραπάνω ότι το σύνολο $\{\neg, \wedge, \vee\}$ είναι επαρκές. Μπορούμε επίσης να δείξουμε ότι τα σύνολα $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$ είναι επαρκή ενώ τα $\{\wedge, \rightarrow\}$, $\{\neg, \Upsilon\}$ δεν είναι επαρκή. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την ιδέα της ταυτολογικής ισοδυναμίας προκειμένου να εξετάσουμε μερικές σημαντικές ιδιότητες του προτασιακού λογισμού.

Παράδειγμα: Ο Πίνακας 6 περιέχει τους πίνακες αληθείας των προτάσεων $\neg(p \wedge q)$, $\neg p \vee \neg q$, $\neg(p \vee q)$, $\neg p \wedge \neg q$.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0

Πίνακας 6

Παρατηρώντας τις στήλες 4 και 5 του Πίνακα 6, συμπεραίνουμε ότι:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

Ενώ παρατηρώντας τις στήλες 7 και 8 του Πίνακα 6, συμπεραίνουμε ότι:

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

Οι δύο αυτές σχέσεις είναι γνωστές σαν νόμοι του De Morgan. Με άλλα λόγια, οι νόμοι του De Morgan λένε ότι η άρνηση της σύζευξης δύο προτάσεων είναι ισοδύναμη με την διάζευξη των αρνήσεων των προτάσεων, ενώ η άρνηση της διάζευξης δύο προτάσεων είναι ισοδύναμη με την σύζευξη των αρνήσεων τους.

□

Παράδειγμα: Ο Πίνακας 7 περιέχει τους πίνακες αληθείας των προτάσεων $p \wedge (q \vee r)$, $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r)$, $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

p	q	r	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Πίνακας 7

Παρατηρώντας τις στήλες 4 και 5 του Πίνακα 7, συμπεραίνουμε ότι:

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (*Επιμεριστικός Νόμος του* $\wedge$ *ως προς τον* $\vee$)

Ενώ παρατηρώντας τις στήλες 6 και 7 του Πίνακα 6, συμπεραίνουμε ότι:

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (*Επιμεριστικός Νόμος του* $\vee$ *ως προς τον* $\wedge$)

□

Παρατήρηση: Αν s1 και s2 είναι προτάσεις τέτοιες ώστε η s1 $\leftrightarrow$ s2 είναι ταυτολογία, τότε οι s1, s2 έχουν τους ίδιους πίνακες αληθείας, και επομένως s1 $\Leftrightarrow$ s2. Επίσης, ισχύει και το αντίστροφο.

Οι Νόμοι της Λογικής

1. $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	Νόμος της διπλής άρνησης
2. $\neg(p \lor q) \Leftrightarrow \neg p \land \neg q$ $\neg(p \land q) \Leftrightarrow \neg p \lor \neg q$	Νόμοι De Morgan
3. $p \lor q \Leftrightarrow q \lor p$ $p \land q \Leftrightarrow q \land p$	Αντιμεταθετικός Νόμος
4. $p \lor (q \lor r) \Leftrightarrow (p \lor q) \lor r$ $p \land (q \land r) \Leftrightarrow (p \land q) \land r$	Προσεταιριστικός Νόμος
5. $p \lor (q \land r) \Leftrightarrow (p \lor q) \land (p \lor r)$ $p \land (q \lor r) \Leftrightarrow (p \land q) \lor (p \land r)$	Επιμεριστικός Νόμος
6. $p \lor p \Leftrightarrow p$ $p \land p \Leftrightarrow p$	
7. $p \lor \mathrm{Fo} \Leftrightarrow p$ $p \land \mathrm{To} \Leftrightarrow p$	
8. $p \lor \neg p \Leftrightarrow \mathrm{To}$ $p \land \neg p \Leftrightarrow \mathrm{Fo}$	Νόμοι συμπληρώματος
9. $p \lor \mathrm{To} \Leftrightarrow \mathrm{To}$ $p \land \mathrm{Fo} \Leftrightarrow \mathrm{Fo}$	
10. $p \lor (p \land q) \Leftrightarrow p$ $p \land (p \lor q) \Leftrightarrow p$	Νόμοι απορρόφησης

Πίνακας 8

Οι παραπάνω εκφράσεις (νόμοι) μπορούν να αποδειχθούν χρησιμοποιώντας πίνακες αληθείας και συγκρίνοντας τις αντίστοιχες τιμές αληθείας. Παρατηρούμε ότι, εκτός από το νόμο της διπλής άρνησης, όλοι οι άλλοι νόμοι έχουν δοθεί κατά ζευγάρια.

Ορισμός. `Εστω s μια πρόταση η οποία περιέχει μόνο τους λογικούς συνδέσμους της άρνησης, της σύζευξης, και της διάζευξης. Η δυϊκή πρόταση της s είναι η πρόταση s^d την οποία παίρνουμε αν αντικαταστήσουμε κάθε εμφάνιση (στην s) του $\wedge$ ($\vee$) με $\vee$ ($\wedge$), και κάθε εμφάνιση του To (Fo) με Fo (To).

Παράδειγμα: Οι προτάσεις $p \vee$ Fo και $p \wedge$To είναι δυϊκές μεταξύ τους, όπως είναι και οι προτάσεις $p \vee \neg p$ και $p \wedge \neg p$.

□

Το παρακάτω θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί.

Θεώρημα *(Αρχή του Δυϊσμού).* Εστω s και t δύο προτάσεις όπως αυτές περιγράφονται στον προηγούμενο ορισμό. Αν $s \Leftrightarrow t$, τότε $s^d \Leftrightarrow t^d$.

Με βάση το θεώρημα αυτό, προκειμένου να αποδείξουμε τους νόμους της Λογικής, είναι αρκετό για κάθε ζευγάρι νόμων να αποδεικνύουμε τον ένα από τους δύο νόμους και να επικαλούμαστε την αρχή του δυϊσμού για την απόδειξη του άλλου.

Οι ακόλουθοι *Κανόνες Αντικατάστασης* μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την απόδειξη ταυτολογικών ισοδυναμιών:

1. Εστω P μια σύνθετη πρόταση η οποία είναι ταυτολογία. Αν p είναι κάποια πρόταση η οποία εμφανίζεται στην P, και αντικαταστήσουμε κάθε εμφάνιση της p με την *ίδια* πρόταση q, τότε η σύνθετη πρόταση P_1 η οποία προκύπτει, είναι ταυτολογία.

2. Εστω P μια σύνθετη πρόταση, p κάποια πρόταση η οποία εμφανίζεται στην P, και q μια πρόταση τέτοια ώστε $q \Leftrightarrow p$. `Εστω επίσης, ότι αντικαθιστούμε κάθε εμφάνιση της p στην P με την q, και P_1 είναι η νέα πρόταση η οποία προκύπτει από την αντικατάσταση. Τότε, έχουμε ότι $P_1 \Leftrightarrow P$.

Παράδειγμα: Από τους νόμους De Morgan έχουμε ότι η σύνθετη πρόταση

$$P: \neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

είναι ταυτολογία. Αντικαθιστούμε κάθε εμφάνιση της p με την $r \wedge s$ και με βάση τον πρώτο κανόνα αντικατάστασης έχουμε ότι η πρόταση

$$P_1: \neg((r \wedge s) \vee q) \leftrightarrow \neg(r \wedge s) \wedge \neg q$$

είναι ταυτολογία. Αντικαθιστούμε κάθε εμφάνιση της q με την $t \rightarrow u$ και με βάση ξανά, τον πρώτο κανόνα αντικατάστασης έχουμε ότι η παρακάτω πρόταση είναι ταυτολογία.

$$P_2: \neg((r \wedge s) \vee (t \rightarrow u)) \leftrightarrow \neg(r \wedge s) \wedge \neg(t \rightarrow u)$$

Επομένως, έχουμε την ταυτολογική ισοδυναμία:

$$\neg((r \wedge s) \vee (t \rightarrow u)) \Leftrightarrow \neg(r \wedge s) \wedge \neg(t \rightarrow u)$$

□

1.1.3 Ταυτολογική Συνεπαγωγή

Θεώρημα είναι μια μαθηματική έκφραση η οποία *μπορεί να αποδειχθεί* ότι είναι αληθής. Πολλα θεωρήματα μπορούν να δοθούν στην εξής μορφή:

Αν οι προτάσεις $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ εκφράζουν την υπόθεση μιας συνεπαγωγής και q είναι το συμπέρασμα, τότε λέμε ότι η συνεπαγωγή

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$$

είναι θεώρημα (και ταυτολογία) όταν αληθείς τιμές για τις προτάσεις $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ οδηγούν σε αληθή τιμή για την πρόταση q. Αν κάποια από τις $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ ψευδής, τότε η συνεπαγωγή $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$ είναι αληθής ανεξάρτητα από την τιμή της q.

Στην ερώτηση πώς αποδεικνύουμε ότι μια δοθείσα πρόταση είναι θεώρημα δεν υπάρχει σαφής απάντηση, διότι δεν υπάρχει μεθοδολογία απόδειξης. Η ικανότητα κατασκευής αποδείξεων αποκτάται με την μελέτη και την εξάσκηση.

Θεωρούμε τον βασικό τύπο πρότασης για την οποία θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι θεώρημα:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$$

Οι προτάσεις $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ αποτελούν υποθέσεις της συνεπαγωγής οι οποίες είναι είτε ορισμοί και αξιώματα τα οποία δεχόμαστε χωρίς απόδειξη, ή θεωρήματα τα οποία έχουμε ήδη αποδείξει. Στη προσπάθειά μας να αποδείξουμε ότι η πρόταση είναι θεώρημα, θέλουμε να δείξουμε ότι όταν όλες οι υποθέσεις $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ είναι αληθείς, τότε και η q είναι αληθής. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι η πρόταση $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$ είναι ταυτολογία. Το ακόλουθο παράδειγμα εξηγεί την τεχνική αυτή.

Παράδειγμα: \`Εστω οι εξής προτάσεις:

p_1: Αν ο Γιώργος μελετήσει θα περάσει τα Διακριτά Μαθηματικά.

p_2: Αν ο Γιώργος δεν παίζει ποδόσφαιρο, τότε θα μελετήσει.

p_3: Ο Γιώργος δεν πέρασε τα Διακριτά Μαθηματικά

q: Επομένως, ο Γιώργος έπαιζε ποδόσφαιρο.

Θέλουμε να ξέρουμε άν η αλήθεια των υποθέσεων p_1, p_2, p_3 οδηγεί στην αλήθεια του συμπεράσματος q. Προκειμένου να το εξετάσουμε θεωρούμε τις εξής προτάσεις:

p: Ο Γιώργος μελετάει

r: Ο Γιώργος περνάει τα Διακριτά Μαθηματικά

s: Ο Γιώργος παίζει ποδόσφαιρο

Οι προτάσεις p_1, p_2, p_3, και q μπορούν να γραφούν ως εξής:

$p_1: p \rightarrow r$ $\quad$ $p_2: \neg s \rightarrow p$ $\quad$ $p_3: \neg r$ $\quad$ $q: s$

Μπορούμε να προσδιορίσουμε αν η πρόταση $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow q$ είναι θεώρημα μελετώντας τον πίνακα αληθείας της πρότασης

$$((p \rightarrow r) \wedge (\neg s \rightarrow p) \wedge \neg r) \rightarrow s$$

p	q	r	$p \rightarrow r$	$\neg s \rightarrow p$	$\neg r$	$((p \rightarrow r) \wedge (\neg s \rightarrow p) \wedge \neg r) \rightarrow s$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1

Από τον παραπάνω πίνακα αληθείας βλέπουμε ότι η πρόταση $((p \rightarrow r) \wedge (\neg s \rightarrow p) \wedge \neg r) \rightarrow s$ είναι ταυτολογία. Επομένως, η πρόταση $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow q$ είναι θεώρημα.

□

Ορισμός. Αν p, q προτάσεις τέτοιες ώστε $p \rightarrow q$ είναι ταυτολογία, τότε γράφουμε $p \Rightarrow q$ και λέμε ότι η p *ταυτολογικά συνεπάγεται* την q.

Για παράδειγμα, είδαμε παραπάνω ότι για οποιεσδήποτε προτάσεις p, q η πρόταση $p \rightarrow (p \vee q)$ είναι ταυτολογία. Επομένως η p ταυτολογικά συνεπάγεται την $p \vee q$, και μπορούμε να γράψουμε ότι $p \Rightarrow (p \vee q)$.

Η εξής πρόταση μπορεί να αποδειχθεί:

Πρόταση. `Εστω p, q δύο προτάσεις. Τότε $p \Leftrightarrow q$ αν και μόνον αν $p \Rightarrow q$ και $q \Rightarrow p$.

Απόδειξη. Η απόδειξη αποτελείται από δύο μέρη.

1) Αν $p \Leftrightarrow q$ τότε η πρόταση $p \leftrightarrow q$ είναι ταυτολογία, και επομένως οι p και q έχουν τον ίδιο πίνακα αληθείας. `Αρα, οι προτάσεις $p \rightarrow q$, $q \rightarrow p$ είναι πάντα αληθείς, και ισχύει ότι $p \Rightarrow q$ και $q \Rightarrow p$.

2) Αντίστροφα, έστω ότι $p \Rightarrow q$ και $q \Rightarrow p$. Η $p \Rightarrow q$ σημαίνει ότι δεν μπορεί η p να είναι αληθής και η q να είναι ψευδής. Είναι όμως δυνατόν η q να είναι αληθής και η p να είναι ψευδής; Αν συνέβαινε αυτό, τότε δεν θα ήταν δυνατόν να ισχύει ότι $q \Rightarrow p$. `Αρα, όταν $p \Rightarrow q$ και $q \Rightarrow p$, τότε οι προτάσεις p, q έχουν τις ίδιες τιμές αληθείας, και επομένως, $p \Leftrightarrow q$.

□

Είδαμε παραπάνω ότι για να ελέγξουμε αν $p \Rightarrow q$, όπου $p, q \in T(L)$, κατασκευάζουμε τους πίνακες αληθείας των p, q. Στη συνέχεια, θα δούμε πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε αποδείξεις στηριζόμενοι σε κάποιες προτάσεις-αξιώματα του προτασιακού λογισμού και σε βασικούς αποδεικτικούς κανόνες. Τα αξιώματα του προτασιακού λογισμού είναι προτάσεις οι οποίες είναι πάντα αληθείς (ταυτολογίες). Η επιλογή των συγκεκριμένων ταυτολογιών για αξιώματα γίνεται με πρακτικά κριτήρια (κατά πόσο δηλαδή, εξυπηρετούν να αποδεικνύουμε με βάση τα αξιώματα αυτά, την αλήθεια άλλων προτάσεων). Εστω ότι έχουμε τα εξής τρία αξιώματα του προτασιακού λογισμού: Για κάθε $p, q, r \in T(L)$,

(A1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

(A2) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

(A3) $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow p)$

Επίσης, θεωρούμε τον αποδεικτικό κανόνα ο οποίος καλείται Modus Ponens, εκφράζεται από τη ταυτολογική συνεπαγωγή $(p \wedge (p \rightarrow q)) \Rightarrow q$ και γράφεται σε μορφή πίνακα ως εξής

$$\begin{array}{c} p \\ \underline{p \rightarrow q} \\ \therefore q \end{array}$$

Ο κανόνας αυτός λέει ότι η το συμπέρασμα q είναι συνέπεια των υποθέσεων p και $p \rightarrow q$ που βρίσκονται πάνω από την οριζόντια γραμμή. Το σύμβολο $\therefore$ αντικαθιστά τη λέξη "επομένως". Επίσης, λέμε ότι η q *αποδεικνύεται τυπικά* από τις p και $p \rightarrow q$.

Τα αξιώματα (Α1), (Α2), (Α3) και ο αποδεικτικός κανόνας Modus Ponens ορίζουν ένα αξιωματικό σύστημα του προτασιακού λογισμού. Οι λογικοί σύνδεσμοι της άρνησης και της συνεπαγωγής θεωρούνται πρωταρχικοί σύνδεσμοι σε αυτό το σύστημα, ενώ η σύζευξη και η διάζευξη θεωρούνται παράγωγες πράξεις.

Ορισμός. `Εστω $H \subseteq T(L)$ και $q \in T(L)$. Τυπική απόδειξη της q από το H λέγεται μια πεπερασμένη ακολουθία προτάσεων $q_1, q_2, \ldots, q_n$ τέτοια ώστε $q_n = q$ και κάθε q_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\text{-}1\}$, είναι:

(α) πρόταση του H ή

(β) αξίωμα ή

(γ) παράγεται με τον κανόνα Modus Ponens από δύο προηγούμενες προτάσεις της ακολουθίας, δηλαδή, υπάρχουν $j, k < i$ τέτοια ώστε $q_j = q_k \rightarrow q_i$

Μια πρόταση η οποία αποδεικνύεται τυπικά σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, χρησιμοποιώντας τα αξιώματα και τους αποδεικτικούς κανόνες ενός αξιωματικού συστήματος, αποτελεί θεώρημα του συστήματος.

Παράδειγμα (*Νόμος του Επιχειρήματος ή του Συλλογισμού)***:** Να αποδειχθεί ότι $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$. Σε μορφή πίνακα έχουμε

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \underline{q \rightarrow r} \\ \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

Βήμα	**Αιτιολόγηση**
(1) $p \rightarrow q$	Υπόθεση
(2) $q \rightarrow r$	Υπόθεση
(3) $(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$	(Α1) για $p = q \rightarrow r$ και $q = p$
(4) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$	(2), (3) και Modus Ponens

(5) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$	(A2)
(6) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	(4), (5) και Modus Ponens
(7) $(p \rightarrow r)$	(1), (6) και Modus Ponens

Ο κανόνας ο οποίος μόλις αποδείχθηκε, καλείται *νόμος του επιχειρήματος ή του συλλογισμού* και συναντάται σε πολλές μαθηματικές αποδείξεις και επιχειρήματα, όπως για παράδειγμα, σε αυτό που ακολουθεί:

1. Αν $2x + 3 = 15$, τότε $2x = 12$	$p \rightarrow q$
2. Αn $2x = 12$, τότε $x = 6$	$q \rightarrow r$
3. Επομένως, αν $2x + 3 = 15$, τότε $x = 6$	$\therefore p \rightarrow r$

□

Παράδειγμα:

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ q \end{array}}{\therefore p \rightarrow r}$$

Βήμα	**Αιτιολόγηση**
(1) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$	Υπόθεση
(2) q	Υπόθεση
(3) $p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$	(A2)
(4) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	(1), (3) και Modus Ponens
(5) $q \rightarrow (p \rightarrow q)$	(A1)
(6) $(p \rightarrow q)$	(2), (5) και Modus Ponens
(7) $(p \rightarrow r)$	(4), (6) και Modus Ponens

□

Παράδειγμα: `Εστω το εξής επιχείρημα:

(1) Οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσες. (*Πρόταση* p)

(2) Αν ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει δύο πλευρές ίσες, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές. (*Πρόταση* $p \rightarrow q$)

(3) Αν ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, τότε οι γωνίες οι οποίες βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές είναι ίσες. (*Πρόταση* $q \rightarrow r$)

(4) Επομένως, οι γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσες. (*Συμπέρασμα* $\therefore$ r)

Το επιχείρημα γράφεται συνοπτικά σε μορφή πίνακα ως εξής:

$$\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \\ \underline{q \rightarrow r} \\ \therefore r \end{array}$$

Η απόδειξη του επιχειρήματος είναι η εξής:

Βήμα	**Αιτιολόγηση**
(1) $p \rightarrow q$	Υπόθεση
(2) $q \rightarrow r$	Υπόθεση
(3) $p \rightarrow r$	(1), (2) και νόμος επιχειρήματος
(4) p	Υπόθεση
(5) r	(4), (3) και Modus Ponens

□

Στη συνέχεια αναφερόμαστε στις έννοιες της συνέπειας και της πληρότητας ενός αξιωματικού συστήματος.

Ορισμός. `Ενα σύνολο $H \subseteq T(L)$ λέγεται συνεπές (ή μη αντιφατικό) αν δεν υπάρχει πρόταση $q \in T(L)$ τέτοια ώστε, να υπάρχουν ταυτόχρονα τυπική απόδειξη της q από το H, και τυπική απόδειξη της $\neg q$ από το H.

Η ακόλουθη πρόταση μπορεί να αποδειχθεί.

Πρόταση. Αν $H \subseteq T(L)$ και H ασυνεπές, τότε για κάθε $q \in T(L)$, υπάρχει τυπική απόδειξη της q από το H.

Η συνέπεια ενός αξιωματικού συστήματος εξασφαλίζεται όταν και μόνον όταν δεν μπορούν να αποτελούν θεωρήματα του συτήματος ταυτόχρονα, μια πρόταση q και η άρνηση της q. Η πληρότητα ενός αξιωματικού συστήματος εξασφαλίζεται όταν και μόνον όταν αποδειχθεί ότι κάθε αληθής πρόταση αποτελεί θεώρημα του συστήματος, δηλαδή μπορεί να αποδειχθεί στο σύστημα. Στο αξιωματικό σύστημα το οποίο ορίστηκε παραπάνω μπορεί να αποδειχθεί τόσο η συνέπεια όσο και η πληρότητα.

Στη συνέχεια δίνονται επιπλέον αποδεικτικοί κανόνες και αποδεικνύονται ταυτολογικές συνεπαγωγές με βάση αποδεικτικούς κανόνες, νόμους της λογικής, ταυτολογικές ισοδυναμίες, και ταυτολογικές συνεπαγωγές που έχουν ήδη αποδειχθεί.

Παράδειγμα (*Modus Tollens*): Ο αποδεικτικός κανόνας Modus Tollens, εκφράζεται από τη ταυτολογική συνεπαγωγή $((p \to q) \land \neg q) \Rightarrow \neg p$ και γράφεται σε μορφή πίνακα ως εξής

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \underline{\neg q \quad} \\ \therefore p \end{array}$$

Ο κανόνας αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του εξής επιχειρήματος:

$$\begin{array}{c} p \to r \\ r \to s \\ t \lor \neg s \\ \neg t \lor u \\ \underline{\neg u \quad} \\ \therefore \neg p \end{array}$$

Η απόδειξη του επιχειρήματος είναι η εξής:

Βήμα	**Αιτιολόγηση**
(1) $p \to q$, $q \to r$	Υποθέσεις
(2) $p \to s$	(1) και νόμος επιχειρήματος
(3) $t \lor \neg s$	Υπόθεση
(4) $\neg s \lor t$	(3) και αντιμεταθετικός νόμος
(5) $s \to t$	(4) και η ταυτολογική ισοδυναμία $\neg s \lor t \Leftrightarrow s \to t$
(6) $p \to t$	(2), (5) και ο νόμος του επιχειρήματος
(7) $\neg t \lor u$	Υπόθεση
(8) $t \to u$	(7) και η ταυτολογική ισοδυναμία $\neg t \lor u \Leftrightarrow t \to u$
(9) $p \to u$	(6), (8) και ο νόμος του επιχειρήματος
(10) $\neg u$	Υπόθεση
(11) $\therefore \neg p$	(9), (10) και Modus Tollens

□

Παράδειγμα (*Κανόνας σύζευξης*): Σε μορφή πίνακα γράφεται ως εξής:

$$p$$

$$\frac{q}{\therefore\ p \wedge q}$$

Προκύπτει από το γεγονός ότι αν p, q προτάσεις τέτοιες ώστε $p \Leftrightarrow To$ και $q \Leftrightarrow To$, τότε $p \wedge q \Leftrightarrow To$.

□

Παράδειγμα (*Απόδειξη δια της μεθόδου της σε άτοπο απαγωγή*): Σε μορφή πίνακα γράφεται ως εξής:

$$\frac{\neg s \Rightarrow Fo}{\therefore s}$$

Προκύπτει από το γεγονός ότι αν s πρόταση τέτοια ώστε $\neg s \Rightarrow Fo$, τότε η πρόταση $\neg s \rightarrow Fo$ είναι πάντα αήθής, οπότε η $\neg s$ είναι ψευδής και η s αληθής.

Θα δείξουμε τη χρήση της μεθόδου στην παρακάτω απόδειξη. Πρώτα ας θυμηθούμε ότι ένας ακέραιος n καλείται *άρτιος* αν υπάρχει ακέραιος k τέτοιος ώστε $n = 2k$, ενώ καλείται *περιττός* αν υπάρχει ακέραιος k τέτοιος ώστε $n = 2k+1$. `Ενας πραγματικός αριθμός x καλείται *ρητός* αν υπάρχουν ακέραιοι a, b τέτοιοι ώστε $x = a/b$, $(b \neq 0)$. `Ενας πραγματικός αριθμός καλείται *άρρητος* αν δεν είναι ρητός. `Εστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε την πρόταση

s: Ο πραγματικός αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός.

Αντί να αποδείξουμε "κατ' ευθείαν" την πρόταση, θα δείξουμε ότι $\neg s \Rightarrow (r \wedge \neg r)$ για κάποια πρόταση r.
`Εστω ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε $\sqrt{2} = a/b$, όπου a, b $(b \neq 0)$ ακέραιοι τέτοιοι ώστε, ο μόνος θετικός ακέραιος ο οποίος διαιρεί και τους δύο, είναι ο 1. Επομένως, η παρακάτω πρόταση r είναι αληθής:

r: Ο μόνος θετικός ακέραιος ο οποίος διαιρεί ταυτόχρονα τους a, b είναι ο 1.

`Εχουμε $\sqrt{2} = a/b$, επομένως $(a/b)^2 = 2$, ή $a^2 = 2b^2$. Επομένως, ο $a^2$ είναι άρτιος και ο a είναι άρτιος. `Αρα, $a = 2k$, για κάποιον ακέραιο k. Αλλά τότε $2b^2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2$. `Αρα ο b^2 είναι άρτιος και ο b είναι άρτιος. Επειδή, οι a, b είναι άρτιοι, η πρόταση $\neg r$ είναι επίσης, αληθής. Αλλά τί μας οδήγησε στην αντίφαση $r \wedge \neg r$; Η απάντηση είναι ότι οδηγηθήκαμε σε αντίφαση διότι υποθέσαμε ότι η s είναι ψευδής. Συγκεκριμένα, $\neg s \Rightarrow (r \wedge \neg r)$ και επομένως, $\neg s \Rightarrow Fo$. Ετσι, έχουμε ότι η s είναι αληθής.

□

Παράδειγμα: `Εστω το επιχείρημα:

$$\begin{array}{c} \neg p \leftrightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \underline{\neg r} \\ \therefore\ p \end{array}$$

Προκειμένου να αποδείξουμε την ορθότητα του επιχειρήματος υποθέτουμε ότι η άρνηση $\neg p$ του συμπεράσματος αποτελεί μια επιπλέον υπόθεση του επιχειρήματος. Σκοπός είναι χρησιμοποιώντας τις τέσσερες υποθέσεις να καταλήξουμε σε αντίφαση Fo.

Βήμα	**Αιτιολόγηση**
(1) $\neg p \leftrightarrow q$	Υπόθεση
(2) $(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p)$	(1) και $(\neg p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p)$
(3) $\neg p \rightarrow q$	(2)
(4) $q \rightarrow r$	Υπόθεση
(5) $\neg p \rightarrow r$	(3), (4) και νόμος επιχειρήματος
(6) $\neg p$	Υπόθεση
(7) r	(5), (6) και Modus Ponens
(8) $\neg r$	Υπόθεση
(9) $r \wedge \neg r$	(7), (8) και κανόνας της σύζευξης
(10) $\therefore\ p$	(6), (9) και απόδειξη με την μέθοδο της σε άτοπο απαγωγής

□

Το επόμενο παράδειγμα παρουσιάζει μια έμεση μέθοδο για να δείχνουμε ότι ένα επιχείρημα **δεν** είναι έγκυρο, δηλαδή μολονότι οι υποθέσεις είναι αληθείς, το συμπέρασμα είναι ψευδές.

Παράδειγμα: `Εστω το επιχείρημα

$$\begin{array}{c} p \\ p \vee q \\ q \rightarrow (r \rightarrow s) \\ \underline{t \rightarrow r} \\ \therefore \neg s \rightarrow \neg t \end{array}$$

Για να δείξουμε ότι το επιχείρημα δεν είναι έγκυρο αρκεί να δείζουμε ότι είναι δυνατόν όλες οι υποθέσεις να είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές.

Το συμπέρασμα $\neg s \rightarrow \neg t$ είναι ψευδές όταν η τιμή αληθείας για την s είναι 0, και για την t είναι1. Επειδή p είναι μια από τις υποθέσεις θα πρέπει η τιμή αληθείας της να είναι

1. Η υπόθεση $p \vee q$ είναι αληθής ανεξάρτητα από την τιμή αληθείας της q. Η $t \rightarrow r$ είναι αληθής όταν r παίρνει την τιμή 1. Επειδή η r είναι αληθής και η s είναι ψευδής, η υπόθεση $q \rightarrow (r \rightarrow s)$ είναι αληθής όταν η q παίρνει την τιμή 0. Επομένως, έχουμε δείξει ότι είναι δυνατόν όλες οι υποθέσεις να είναι αληθείς και το συμπέρασμα να είναι ψευδές.

□

Γενικεύοντας, μπορούμε να πούμε ότι για να δείξουμε ότι ένα επιχείρημα δεν είναι έγκυρο ή ότι ένα συμπέρασμα είναι ψευδές, αρκεί να προσδιορίζουμε ένα στιγμιότυπο (δηλαδή, ανάθεση τιμών αληθείας στις προτάσεις του επιχειρήματος) σύμφωνα με το οποίο το επιχείρημα δεν είναι έγκυρο. Το στιγμιότυπο αυτό καλείται *αντιπαράδειγμα.*

`**Άσκηση:** Είναι έγκυρο το παρακάτω επιχείρημα ή όχι;

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow s \\ r \rightarrow \neg s \\ \underline{\neg p \ \Upsilon \ r} \\ \therefore \neg p \end{array}$$

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζουμε τους αποδεικτικούς κανόνες τους οποίους είδαμε παραπάνω, και παρουσιάζουμε κάποιους επιπλέον.

Κανόνας	**Αντίστοιχη ταυτολογική συνεπαγωγή ή ισοδυναμία**	**Ονομασία**
p $p \to q$ $\therefore q$	$[\, p \wedge (p \to q)\,] \Rightarrow q$	Modus Ponens
$p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$	$[\, (p \to q) \wedge (q \to r)\,] \Rightarrow p \to r$	Νόμος του Επιχειρήματος ή του Συλλογισμού
$p \to q$ $\neg q$ $\therefore \neg p$	$[\, (p \to q) \wedge \neg q\,] \Rightarrow \neg p$	Modus Tollens
p q $\therefore p \wedge q$		Κανόνας Σύζευξης
$\neg s \Rightarrow Fo$ $\therefore s$	$(\neg s \Rightarrow Fo) \Rightarrow (s \Leftrightarrow To)$	Απόδειξη με τη μέθοδο της εις άτοπο απαγωγή
$p \wedge q$ $\therefore p$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	Κανόνας της συζευκτικής απλοποίησης
p $\therefore p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$	Κανόνας της διαζευκτικής γενίκευσης
$p \vee q$ $\neg p$ $\therefore q$	$[\, (p \vee q) \wedge \neg p\,] \Rightarrow q$	Κανόνας του διαζευκτικού συλλογισμού

1.2 Κατηγορηματικός Λογισμός

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι οι εκφράσεις, οι οποίες περιέχουν μεταβλητές, δεν είναι αναγκαστικά προτάσεις στην Λογική. Για παράδειγμα, η έκφραση "Ο x+5 είναι άρτιος ακέραιος" δεν είναι πρόταση.

Ορισμός. Μια έκφραση καλείται *ανοικτή πρόταση (ή προτασιακός τύπος)* αν

1. Περιέχει μία ή περισσότερες μεταβλητές, και
2. δεν είναι πρόταση, αλλά
3. μπορεί να γίνει πρόταση αν κάθε μεταβλητή αντικατασταθεί από συγκεκριμένο αντικείμενο (ή έννοια, ή έκφραση), το οποίο επιλέγεται από μια συγκεκριμένη συγκέντρωση (ή σύνολο) αντικειμένων (ή εννοιών, ή εκφράσεων). Η συγκέντρωση αυτή καλείται πεδίο αναφοράς των μεταβλητών.

Μια ανοικτή πρόταση μιας μεταβλητής x συμβολίζεται με p(x) ή (q(x), r(x) κ.λ.π.), δύο μεταβλητών x, y συμβολίζεται με p(x,y) ή (q(x,y), r(x,y) κ.λ.π.), και γενικά, n μεταβλητών συμβολίζεται με $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Κάθε ανοικτή πρόταση (προτασιακός τύπος) προσδιορίζεται από μία *ιδιότητα* η οποία περιγράφεται στη φυσική ή μαθηματική γλώσσα και λέγεται *κατηγόρημα.* Αν q(x) μία ανοικτή πρόταση μιας μεταβλητής x και α μια τιμή της x, τότε λέμε ότι η α κατέχει την ιδιότητα που προσδιορίζει η ανοικτή πρόταση q(x), δηλαδή, το αντίστοιχο κατηγόρημα. Για παράδειγμα, αν q(x) η πρόταση "x είναι άρτιος αριθμός" τότε το αντίστοιχο κατηγόρημα είναι: "είναι άρτιος αριθμός", και η πρόταση q(6) είναι αληθής δηλαδή, ο αριθμός 6 κατέχει την ιδιότητα που προσδιορίζει το κατηγόρημα αυτό.

Οι τιμές αληθείας ενός προτασιακού τύπου εξαρτώνται από τις τιμές των μεταβλητών (μέσα στα πεδία αναφοράς τους), τις τιμές αληθείας των προτασιακών μεταβλητών και τους χρησιμοποιούμενους λογικούς συνδέσμους. `Ενας προτασιακός τύπος μπορεί να μετατραπεί σε προτάσεις, οι οποίες είναι αληθείς ή ψευδείς για όλες τις τιμές των μεταβλητών (μέσα στα πεδία αναφοράς τους), για καμμία τιμή ή για μερικές τιμές. Για να αποδώσουμε τις έννοιες αυτές συμβολοικά στον κατηγορηματικό λογισμό, χρησιμοποιούμε τον *καθολικό ποσοδείκτη* $\forall$ και τον *υπαρξιακό ποσοδείκτη* $\exists$. Ο καθολικός χρησιμοποιείται για να συμβολίσει την έννοια "κάθε ένα" και ο υπαρξιακός για να συμβολίσει την έννοια "υπάρχει ένα".

Πρόταση	Η πρόταση είναι αληθής όταν:	Η πρόταση είναι ψευδής όταν:
$\exists x\ p(x)$	Για κάποιες (τουλάχιστον μία) τιμές α στο πεδίο αναφοράς, η p(α) είναι αληθής	Για κάθε α στο πεδίο αναφοράς, η p(α) είναι ψευδής
$\forall x\ p(x)$	Για κάθε α στο πεδίο αναφοράς η p(α) είναι αληθής	Υπάρχει κάποια τιμή α στο πεδίο αναφοράς για την οποία η p(α) είναι ψευδής
$\exists x\ (\neg\ p(x))$	Για κάποιες (τουλάχιστον μία) τιμές α στο πεδίο αναφοράς, η p(α) είναι ψευδής	Για κάθε α στο πεδίο αναφοράς, η p(α) είναι αληθής
$\forall x\ (\neg\ p(x))$	Για κάθε α στο πεδίο αναφοράς η p(α) είναι ψευδής	Υπάρχει κάποια τιμή α στο πεδίο αναφοράς για την οποία η p(α) είναι αληθής

Πίνακας 9

Παράδειγμα: `Εστω ότι το πεδίο αναφοράς είναι οι πραγματικοί αριθμοί και ότι δίνονται οι ακόλουθοι προτασιακοί τύποι:

$$p(x):\ x \geq 0$$
$$q(x):\ x^2 \geq 0$$
$$r(x):\ x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$s(x):\ x^2 - 3 > 0$$

Τότε οι εξής προτάσεις είναι αληθείς:

1. $\exists x\ [\ p(x) \wedge r(x)\ ]$

Για παράδειγμα οι προτάσεις p(4) και r(4) είναι αληθείς.

2. $\forall x\ [\ p(x) \rightarrow q(x)\ ]$

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν η μεταβλητή x αντικατασταθεί από έναν μη αρνητικό πραγματικό αριθμό α, τότε οι προτάσεις p(α), q(α) είναι αληθείς, επομένως, και η πρόταση

$$p(\alpha) \rightarrow q(\alpha)$$

είναι αληθής. Αν η μεταβλητή x αντικατασταθεί από έναν αρνητικό πραγματικό αριθμό β, τότε η p(β) είναι αληθής, επομένως, η πρόταση

$$p(\beta) \rightarrow q(\beta)$$

είναι αληθής ανεξάρτητα από το αν είναι αληθής η q(β).

Οι επόμενες προτάσεις είναι ψευδείς:

1. $\forall x\, [\, q(x) \rightarrow s(x)\,]$

Αρκεί να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα, δηλαδή, έναν πραγματικό αριθμό για τον οποίο η πρόταση δεν ισχύει. Πραγματικά, για x = 1, η πρόταση $q(1) \rightarrow s(1)$ είναι ψευδής.

2. $\forall x\, [\, r(x) \vee s(x)\,]$

Μερικά αντιπαραδείγματα είναι οι αριθμοί 1, ½, και 0.

□

Παράδειγμα: `Εστω ότι το πεδίο αναφοράς είναι οι ακέραιοι αριθμοί και ότι δίνονται οι ακόλουθοι προτασιακοί τύποι:

$$r(x):\quad 2\chi + 1 = 5$$
$$s(x):\quad x^2 = 9$$

Η πρόταση $\exists x\, [\, r(x) \wedge s(x)\,]$ είναι ψευδής διότι δεν υπάρχει ακέραιος α τέτοιος ώστε 2α + 1 = 5 και $\alpha^2 = 9$. Ως τόσο, υπάρχει ακέραιος β (=2) τέτοιος ώστε 2β + 1 = 5, και άλλος ακέραιος δ (=3) τέτοιος ώστε $\delta^2 = 9$. Επομένως, η πρόταση $\exists x\; r(x) \wedge \exists x\, s(x)$ είναι αληθής. Το αντιπαράδειγμα αυτό δείχνει ότι η παρακάτω ταυτολογική συνεπαγωγή **δεν** ισχύει:

$$[\exists x\;\, r(x) \wedge \exists x\, s(x)\,] \Rightarrow \exists x\, [\, r(x) \wedge s(x)\,]$$

Επομένως, δεν ισχύει η ταυτολογική ισοδυναμία

$$\exists x\, [\, r(x) \wedge s(x)\,] \Leftrightarrow [\, \exists x\;\, r(x) \wedge \exists x\, s(x)\,]$$

Εξετάζοντας τώρα την πρόταση

$$\exists x\, [\, p(x) \wedge q(x)\,] \rightarrow [\, \exists x\ p(x) \wedge \exists x\, q(x)\,]$$

παρατηρούμε ότι όταν η υπόθεση $\exists x\, [\, p(x) \wedge q(x)\,]$ είναι αληθής, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο α στο πεδίο αναφοράς για το οποίο η πρόταση $p(\alpha) \wedge q(\alpha)$ είναι αληθής. Από τον κανόνα της "συζευκτικής απλοποίησης"

$$[\, p(\alpha) \wedge q(\alpha)\,] \Rightarrow p(\alpha)$$

έχουμε ότι η πρόταση $p(\alpha)$ είναι αληθής και επομένως, η $\exists x\ p(x)$ είναι αληθής. Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η πρόταση $\exists x\ q(x)$ είναι αληθής. `Αρα, από τον κανόνα της σύζευξης η πρόταση $[\, \exists x\ p(x) \wedge \exists x\, q(x)\,]$ είναι αληθής. Συνεπώς,

$$\exists x\, [\, p(x) \wedge q(x)\,] \Rightarrow [\, \exists x\ p(x) \wedge \exists x\, q(x)\,]$$

□

Παράδειγμα:

$$\exists x\, [\, p(x) \rightarrow q(x)\,] \Leftrightarrow \exists x\, [\neg p(x) \vee q(x)\,]$$

Για κάθε α στο πεδίο αναφοράς, έχουμε ότι

$$[\, p(\alpha) \rightarrow q(\alpha)\,] \Leftrightarrow [\, \neg p(\alpha) \vee q(\alpha)\,]$$

Επομένως, οι προτάσεις $\exists x\, [\, p(x) \rightarrow q(x)\,]$ και $\exists x\, [\neg p(x) \vee q(x)\,]$ είναι είτε και οι δύο αληθείς είτε και οι δύο ψευδείς. Συνεπώς,

$$\exists x\, [\, p(x) \rightarrow q(x)\,] \Leftrightarrow \exists x\, [\neg p(x) \vee q(x)\,]$$

□

Επιχειρήματα ανάλογα με το παραπάνω μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την απόδειξη των παρακάτω:

1. $\exists x\ [\ p(x) \wedge q(x)\ ] \Rightarrow\ [\ \exists x\ \ p(x) \wedge \exists x\ q(x)\ ]$

2. $\exists x\ [\ p(x) \vee q(x)\ ] \Leftrightarrow\ [\ \exists x\ \ p(x) \vee \exists x\ q(x)\ ]$

3. $\forall x\ [\ p(x) \wedge q(x)\ ] \Leftrightarrow\ [\ \forall x\ \ p(x) \wedge \forall x\ q(x)\ ]$

4. $[\ \forall x\ \ p(x) \vee \forall x\ q(x)\ ] \Rightarrow \forall x\ [\ p(x) \vee q(x)\ ]$

5. $\forall x\ [\ p(x) \wedge (\ q(x) \wedge r(x)\ )\ ] \Leftrightarrow\ \ \forall x\ \ [\ (p(x) \wedge\ \ q(x)\ ) \wedge r(x)\ ]$

6. $\exists x\ [\ p(x) \rightarrow\ \ q(x)\ ] \Leftrightarrow\ \ \exists x\ \ [\neg p(x) \vee q(x)\ ]$

7. $\forall x\ \ [\neg(\neg p(x)\ )\ ]\ \Leftrightarrow \forall x\ \ p(x)$

8. $\forall x\ [\neg\ (\ p(x) \wedge q(x)\ )\ ] \Leftrightarrow \forall x\ [\neg p(x) \vee \neg q(x)\ ]$

9. $\forall x\ [\neg\ (\ p(x) \vee q(x)\ )\ ] \Leftrightarrow \forall x\ [\neg p(x) \wedge \neg q(x)\ ]$

Πίνακας 10

Οι ταυτολογικές ισοδυναμίες 7, 8, και 9 ισχύουν και όταν όλοι οι καθολικοί ποσοδείκτες αντικατασταθούν με υπαρξιακούς.

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει κανόνες προκειμένου να σχηματίζουμε την άρνηση προτάσεων οι οποίες περιέχουν ποσοδείκτες.

$\neg\ [\ \forall x\ \ p(x)\ ] \Leftrightarrow \exists x\ [\ \neg\ p(x)\ ]$

$\neg\ [\ \exists x\ \ p(x)\ ] \Leftrightarrow \forall x\ [\ \neg\ p(x)\ ]$

$\neg\ [\ \forall x\ \ \neg p(x)\ ] \Leftrightarrow \exists x\ [\neg\ [\ \neg\ p(x)\ ]\ ] \Leftrightarrow \exists x\ \ p(x)$

$\neg\ [\ \exists x\ \ \neg p(x)\ ] \Leftrightarrow \forall x\ [\neg\ [\ \neg\ p(x)\ ]\ ] \Leftrightarrow \forall x\ \ p(x)$

Πίνακας 11

Παράδειγμα. `Εστω οι προτασιακοί τύποι:

$$r(x):\ \ 2x + 1 = 5$$

$$s(x):\ \ x^2 = 9$$

Η πρόταση $\exists x\ [\ r(x) \wedge s(x)\ ]$ είναι ψευδής. Επομένως, η άρνησή της

$\neg\ [\ \exists x\ [\ r(x) \wedge s(x)\ ]\ ] \Leftrightarrow\ \forall x\ [\ \neg\ [\ r(x) \wedge s(x)\ ]\ ] \Leftrightarrow\ \forall x\ [\ \neg\ r(x) \vee \neg\ s(x)\ ]$

είναι αληθής, και διαβάζεται "Για κάθε ακέραιο x, $2x + 1 \neq 5$ ή $x^2 \neq 9$.".

□

Θεώρημα. `Εστω q μία πρόταση η οποία δεν περιέχει την μεταβλητή x. Τότε

$$[\ (\ \forall x\ \ p(x)\ ) \wedge q\ ] \Leftrightarrow\ [\ \forall x\ \ (\ p(x) \wedge q\ )\ ]$$

Απόδειξη: Διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. Η q είναι αληθής. Τότε το αριστερό μέρος της ταυτολογικής ισοδυναμίας γίνεται:

$$[\ (\ \forall x\ \ p(x)\ ) \wedge 1\ ] \Leftrightarrow [\ (\ \forall x\ \ p(x)\ ) \wedge 1\ \ ] \Leftrightarrow (\ \forall x\ \ p(x)\ )$$

διότι $p(x) \wedge 1 \Leftrightarrow p(x)$. Το δεξύ μέρος της ταυτολογικής ισοδυναμίας γίνεται:

$$[\ \forall x\ \ (\ p(x) \wedge q\ )\ ] \Leftrightarrow [\ \forall x\ \ (\ p(x) \wedge 1\ )\ ] \Leftrightarrow (\ \forall x\ \ p(x)\ )$$

για τον ίδιο λόγο. Επομένως, τα δύο μέρη έχουν την ίδια τιμή αληθείας.

Περίπτωση 2. Η q είναι ψευδής. Τότε το αριστερό μέρος της ταυτολογικής ισοδυναμίας γίνεται:

$$[\ (\ \forall x\ \ p(x)\ ) \wedge q\ ] \Leftrightarrow [\ (\ \forall x\ \ p(x)\ ) \wedge 0\ \ ] \Leftrightarrow 0$$

διότι $p(x) \wedge 0 \Leftrightarrow 0$. Το δεξύ μέρος της ταυτολογικής ισοδυναμίας γίνεται:

$$[\ \forall x\ \ (\ p(x) \wedge q\ )\ ] \Leftrightarrow [\ \forall x\ \ (\ p(x) \wedge Fo\ )\ ] \Leftrightarrow (\ \forall x\ \ Fo\ ) \Leftrightarrow Fo$$

για τον ίδιο λόγο. Επομένως, τα δύο μέρη έχουν την ίδια τιμή αληθείας.

□

Ανάλογα θεωρήματα μπορούν να αποδειχθούν για τη λογική πράξη της διάζευξης και τον υπαρξιακό ποσοδείκτη.

Εφαρμογή. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να μετακινήσουμε όλους τους ποσοδείκτες μιας έκφρασης στην αρχή της. Τότε λέμε ότι η έκφραση είναι στην “Prenex Normal Form”.

Παράδειγμα. `Εστω η έκφραση

$$\neg ((\forall x\ p(x) \wedge \exists x\ q(x)) \rightarrow \forall x\ \ r(x))$$

Θα δείξουμε πως θα φέρουμε την έκφραση αυτή στην “Prenex Normal Form”. Πρώτα θα αλλάξουμε τα ονόματα των μεταβλητών που είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. `Ετσι έχουμε:

$$\neg ((\forall x\ p(x) \wedge \exists k\ q(k)) \rightarrow \forall b\ \ r(b))$$

Χρησιμοποιούμε την ταυτολογική ισοδυναμία $q_1 \rightarrow q_2 \Leftrightarrow \neg q_1 \vee q_2$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\neg ((\forall x\ p(x) \wedge \exists k\ q(k)) \rightarrow \forall b\ \ r(b)) \Leftrightarrow \\
&\neg (\neg (\forall x\ p(x) \wedge \exists k\ q(k)) \vee \ \mathbf{(}\ \forall b\ \ r(b)) \Leftrightarrow \\
&((\forall x\ p(x) \wedge \exists k\ q(k)) \wedge \ \neg \mathbf{(}\ \forall b\ \ r(b)) \Leftrightarrow \\
&\forall x\ p(x) \wedge [\exists k\ q(k) \wedge \ \exists b\ (\neg r(b))] \qquad\qquad (A)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
(A) &\Leftrightarrow \forall x\ p(x) \wedge \ \exists k\ [q(k) \wedge \ \exists b\ (\neg r(b))] \\
&\Leftrightarrow \forall x\ [p(x) \wedge \ \exists k\ [q(k) \wedge \ \exists b\ (\neg r(b))]] \\
&\Leftrightarrow \forall x\ [p(x) \wedge \ \exists k\ [\exists b\ (\neg r(b)) \wedge q(k) \ ]] \\
&\Leftrightarrow \forall x\ [p(x) \wedge \ \exists k\ [\exists b\ [\neg r(b) \wedge q(k) \ ]]] \qquad\qquad (B)
\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε τον αντιμεταθετικό νόμο και έχουμε:

$$(B) \Leftrightarrow \forall x\ [\exists k\ [\exists b\ [\neg r(b) \wedge q(k) \ ]] \wedge p(x)] \qquad\qquad (\Gamma)$$

Επειδή η έφραση p(x) δεν περιέχει την k, έχουμε:

$$(\Gamma) \Leftrightarrow \forall x\ [\exists k\ [\exists b\ [\neg r(b) \wedge q(k) \ ] \wedge p(x)]] \qquad\qquad (\Delta)$$

Αλλά, η p(x) δεν περιέχει ούτε b. Επομένως, γράφουμε

$$\begin{aligned}
(\Delta) &\Leftrightarrow \forall x\ [\exists k\ [\exists b\ [\neg r(b) \wedge q(k) \wedge p(x)]]] \\
&\Leftrightarrow \forall x\ \exists k\ \exists b\ [\neg r(b) \wedge q(k) \wedge p(x)]
\end{aligned}$$

`Ετσι έχουμε την έκφραση στην “Prenex Normal Form”.

□

Αν μια πρόταση με περισσότερες της μιας μεταβλητής περιέχει μόνο υπαρξιακούς ή μόνο καθολικούς ποσοδείκτες, τότε δεν ενδιαφέρει η σειρά με την οποία οι ποσοδείκτες είναι γραμμένοι. Συγκεκριμένα, οι ακόλουθες δύο προτάσεις μπορούν να αποδειχθούν.

Πρόταση: `Εστω p(x,y) ένας προτασιακός τύπος δύο μεταβλητών x, y. Τότε οι προτάσεις $\forall x\ \forall y\ p(x,y)$ και $\forall y\ \forall x\ p(x,y)$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμες, δηλαδή,

$$\forall x\ \forall y\ p(x,y) \Leftrightarrow \forall y\ \forall x\ p(x,y)$$

Ανάλογες προτάσεις ισχύουν για τρεις ή περισσότερες μεταβλητές (και καθολικούς ποσοδείκτες).

Πρόταση: `Εστω p(x,y) ένας προτασιακός τύπος δύο μεταβλητών x, y. Τότε οι προτάσεις $\exists x\ \exists y\ p(x,y)$ και $\exists y\ \exists x\ p(x,y)$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμες, δηλαδή,

$$\exists x\ \exists y\ p(x,y) \Leftrightarrow \exists y\ \exists x\ p(x,y)$$

Ανάλογες προτάσεις ισχύουν για τρεις ή περισσότερες μεταβλητές (και υπαρξιακούς ποσοδείκτες).

Ως τόσο, αν μια πρόταση περιέχει υπαρξιακούς και καθολικούς ποσοδείκτες συγχρόνως, τότε θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί με τη σειρά με την οποία οι ποσοδείκτες είναι γραμμένοι.

Παράδειγμα. `Εστω ότι το πεδίο αναφοράς είναι το σύνολο των ακεραίων και p(x,y) είναι ο προτασιακός τύπος “ $x + y = 15$”.

1. Η πρόταση

$$\forall x\ \exists y\ p(x,y)$$

διαβάζεται “Για κάθε ακέραιο x, υπάρχει ακέραιος y τέτοιος ώστε $x + y = 15$” Η πρόταση αυτή είναι αληθής.

2. `Εστω τώρα η πρόταση

$$\exists y\ \forall x\ p(x,y)$$

Η πρόταση αυτή διαβάζεται “Υπάρχει ένας ακέραιος y, τέτοιος ώστε για όλους τους ακεραίους x, ώστε $x + y = 15$” Η πρόταση αυτή είναι ψευδής.

Επομένως, υπάρχουν περιπτώσεις για τις οποίες οι προτάσεις $\forall x\ \exists y\ p(x,y)$ και $\exists y\ \forall x\ p(x,y)$ δεν είναι ταυτολογικά ισοδύναμες. □

Παράδειγμα. `Εστω η πρόταση

$$\forall x\ \exists y\ [\ (\ p(x, y) \wedge q(x,y)\ ) \rightarrow r(x,y)\ ]$$

Η άρνηση της πρότασης αυτής υπολογίζεται ως εξής:

$\neg\ [\ \forall x\ \exists y\ [\ (\ p(x, y) \wedge q(x,y)\ ) \rightarrow r(x,y)\ ]$

$\Leftrightarrow \exists x\ \neg\ [\ \exists y\ [\ (\ p(x, y) \wedge q(x,y)\ ) \rightarrow r(x,y)\ ]$

$\Leftrightarrow \exists x\ \forall y\ \neg\ [\ (\ p(x, y) \wedge q(x,y)\ ) \rightarrow r(x,y)\ ]$

$\Leftrightarrow \exists x\ \forall y\ \ \neg[\ \neg\ (\ p(x, y) \wedge q(x,y)\ ) \vee r(x,y)\ ]$

$\Leftrightarrow \exists x\ \forall y\ \ [\ \neg[\ \neg\ (\ p(x, y) \wedge q(x,y)\ )\ ] \wedge \neg\ r(x,y)\ ]$

$\Leftrightarrow \exists x\ \forall y\ \ [\ (\ p(x, y) \wedge q(x,y)\ )\ \wedge \neg\ r(x,y)\ ]$

□

2. ΣΥΝΟΛΑ, ΣΧΕΣΕΙΣ, ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

2.1 Σύνολα και Υποσύνολα

Είναι δύσκολο να δώσουμε ένα τυπικό ορισμό της έννοιας "σύνολο", διότι συνήθως στην προσπάθειά μας να δώσουμε έναν ορισμό, χρησιμοποιούμε συνώνυμους όρους όπως "συλλογή", "συγκέντρωση", "κλάση", κ.λ.π. Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε ένα *σύνολο* θα εννοούμε μια *καλά-ορισμένη* συλλογή αντικειμένων. Τα αντικείμενα αυτά θα λέμε ότι *ανήκουν στο σύνολο*, και θα καλούνται *στοιχεία* ή *μέλη* του συνόλου. Ο προσδιορισμός "καλά-ορισμένη συλλογή αντικειμένων" συνεπάγεται ότι, δοθέντος ενός συνόλου και κάποιου αντικειμένου, μπορεί με σαφήνεια, να προσδιοριστεί εάν το αντικείμενο είναι μέλος του συνόλου ή όχι.

Χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα για να δηλώσουμε σύνολα και μικρά για να δηλώσουμε στοιχεία συνόλων. Επίσης, για κάποιο σύνολο Α γράφουμε $x \in A$ για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο του συνόλου Α, και $x \notin A$ για να δηλώσουμε ότι το x δεν είναι στοιχείο του συνόλου Α. Υπάρχουν δύο τρόποι "περιγραφής" ενός συνόλου Α:

(α) Τα στοιχεία του συνόλου παρατίθενται το ένα μετά το άλλο μεταξύ δύο αγκυλών. Π.χ. γράφουμε $A = \{1, 2, 3, 4\}$, προκειμένου να δηλώσουμε ότι το σύνολο Α έχει σαν στοιχεία του τους τέσσερες πρώτους θετικούς ακεραίους.

(β) Περιγράφεται η ιδιότητα των στοιχείων του συνόλου Α ως εξής: $A = \{x \mid x$ έχει την ιδιότητα ότι …$\}$. Π.χ. $A = \{x \mid x$ είναι ακέραιος τέτοιος ώστε $1 \le x \le 4\}$. Θα μπορούσαμε να γράψουμε $A = \{x \mid 1 \le x \le 4\}$ μόνον εάν είχαμε εκ των προτέρων προσδιορίσει ότι το σύνολο αναφοράς είναι οι ακέραιοι αριθμοί. Διαφορετικά, γράφοντας $A = \{x \mid 1 \le x \le 4\}$ δεν είναι καθαρό ποιό σύνολο περιγράφουμε. Το σύνολο αναφοράς στη συνέχεια θα δηλώνεται με το γράμμα $\boldsymbol{U}$.

Παράδειγμα. `Εστω $\boldsymbol{U}$ το σύνολο των θετικών ακεραίων. Τα σύνολα Α και Β ορίζονται ως εξής:

$A = \{1, 4, 9,\ldots, 64, 81\} = \{x^2 \mid x \in \boldsymbol{U}, x^2 < 100\}$

$B = \{2, 4, 6, 8,\ldots\} = \{2k \mid k \in \boldsymbol{U}\}$

Το σύνολο Α είναι πεπερασμένο σύνολο ενώ το Β είναι άπειρο σύνολο. Ο αριθμός των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου Α καλείται *πληθικός αριθμός* ή *μέγεθος* του Α και παριστάνεται με $|A|$.

Ορισμός 2.1 `Εστω C και D δύο σύνολα με σύνολο αναφοράς $\boldsymbol{U}$. Λέμε ότι το C είναι *υποσύνολο* του D και γράφουμε $C \subseteq D$ ή $D \supseteq C$, εάν κάθε στοιχείο του C είναι και στοιχείο του D. Εάν επιπλέον, υπάρχει κάποιο στοιχείο του D το οποίο δεν είναι και στοιχείο του C, τότε το C καλείται *γνήσιο υποσύνολο* του D και γράφουμε $C \subset D$ ή $D \supset C$.

Ορισμός 2.2 `Εστω C και D δύο σύνολα με σύνολο αναφοράς ***U***. Λέμε ότι τα σύνολα C και D είναι *ίσα* και γράφουμε C = D, εάν $C \subseteq D$ και $D \subseteq C$.

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς, μπορούμε να πούμε ότι η διάταξη των στοιχείων, ή/και η επανάληψη στοιχείων μέσα σε ένα σύνολο, δεν επηρεάζουν την ταυτότητα του συνόλου. Επομένως, για παράδειγμα, έχουμε ότι {1, 4, 5} = {4, 1, 5, 1} = {5, 4, 1}.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τους ποσοδείκτες για να μελετήσουμε τις αρνήσεις των παραπάνω εννοιών. `Εστω A, B δύο σύνολα του συνόλου αναφοράς ***U***. Τότε,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\, [\, x \in A \rightarrow x \in B\,]$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} A \not\subset B \text{ (δηλαδή, A δεν είναι υποσύνολο του B)} \\ &\Leftrightarrow \neg\, [\, \forall x\, [\, x \in A \rightarrow x \in B\,]] \\ &\Leftrightarrow \exists x\, \neg\, [\, x \notin A \vee x \in B\,] \\ &\Leftrightarrow \exists x\, [\, x \in A \wedge x \notin B\,] \end{aligned}$$

Επομένως, $A \not\subset B$ αν υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο x του συνόλου αναφοράς, το οποίο είναι μέλος του A αλλά δεν είναι μέλος του B. Κατά παρόμοιο τρόπο, επειδή

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

έχουμε ότι

$$A \neq B \Leftrightarrow A \not\subset B \vee B \not\subset A$$

Επίσης, αν A, B δύο σύνολα του συνόλου αναφοράς ***U*** τότε έχουμε ότι

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

Θεώρημα 2.1 `Εστω A, B, C $\subseteq$ ***U.***

(α) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq C$, τότε $A \subseteq C$.
(β) Αν $A \subset B$ και $B \subseteq C$, τότε $A \subset C$.
(γ) Αν $A \subseteq B$ και $B \subset C$, τότε $A \subset C$.
(δ) Αν $A \subset B$ και $B \subset C$, τότε $A \subset C$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε τα (α) και (β). Η απόδειξη των (γ) και (δ) είναι παρόμοια.

(α) Για να δείξουμε ότι $A \subseteq C$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in \boldsymbol{U}$, αν $x \in A$ τότε $x \in C$. `Εστω λοιπόν, x ένα στοιχείο του A. Επειδή $A \subseteq B$, $x \in A$ συνεπάγεται $x \in B$. Αλλά τότε, επειδή $B \subseteq C$, $x \in B$ συνεπάγεται $x \in C$. Επομένως, με βάση τον νόμο του επιχειρήματος, $x \in A$ συνεπάγεται $x \in C$, και $A \subseteq C$.

(β) Επειδή $A \subset B$, $x \in A$ συνεπάγεται $x \in B$. Επειδή $B \subseteq C$, έχουμε ότι $x \in C$. Επομένως, $A \subseteq C$. Αλλά $A \subset B$ συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο στοιχείο $b \in B$ τέτοιο ώστε $b \notin A$. Επειδή $B \subseteq C$, $b \in B$ συνεπάγεται $b \in C$. `Ετσι έχουμε ότι $A \subseteq C$ και υπάρχει ένα στοιχείο $b \in C$ και $b \notin A$. Επομένως, $A \subset C$.

□

Παράδειγμα. `Εστω $\boldsymbol{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$, και $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Τότε μεταξύ των υποσυνόλων ισχύουν οι εξής σχέσεις:

(α) $A \subseteq C$
(β) $A \subset C$
(γ) $B \subset C$
(δ) $A \subseteq A$
(ε) $B \not\subset A$

Ορισμός 2.3 Το *κενό* σύνολο ($\varnothing$ ή $\{\}$) είναι ένα σύνολο το οποίο δεν περιέχει στοιχεία.

Θεώρημα 2.2 Για κάθε σύνολο A, έχουμε ότι $\varnothing \subseteq A$ και ότι $\varnothing \subset A$ αν $A \neq \varnothing$.

Απόδειξη. `Εστω ότι το κενό σύνολο δεν είναι υποσύνολο του A. Τότε υπάρχει κάποιο στοιχείο x το οποίο ανήκει στο κενό σύνολο και δεν ανήκει στο A. Αλλά δεν είναι δυνατόν να υπάρχει κάποιο στοιχείο το οποίο ανήκει στο κενό σύνολο. `Αρα, $\varnothing \subseteq A$.

Αν $A \neq \varnothing$, τότε υπάρχει κάποιο στοιχείο x το οποίο ανήκει στο A και δεν μπορεί να ανήκει στο κενό σύνολο. `Αρα, $\varnothing \subset A$.

□

Ορισμός 2.4 `Εστω A ένα σύνολο από το σύνολο αναφοράς . Το *δυναμοσύνολο* P(A) (ή 2^A) του συνόλου A είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A.

Παράδειγμα. `Εστω $A=\{1, 2, 3 ,4\}$. Τότε $P(A) = \{ \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$. Γενικά, αν το A έχει n στοιχεία ($|A| = n$), τότε έχει 2^n υποσύνολα ($|P(A)| = 2^n$).

2.2 Οι Νόμοι της Θεωρίας Συνόλων

Ορισμός 2.5 Αν $A, B \subseteq \boldsymbol{U}$, τότε ορίζουμε:

α) Την ένωση $A \cup B$ των A και B:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee x \in B\}$$

β) Την τομή $A \cap B$ των A και B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge x \in B\}$$

γ) Τη συμμετρική διαφορά $A \Delta B$ των A και B:

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$$

Παρατηρούμε ότι αν $A, B \subseteq \boldsymbol{U}$, τότε $A \cup B$, $A \cap B$, $A \Delta B \subseteq P(\boldsymbol{U})$. Επομένως, οι πράξεις $\cup$, $\cap$, Δ είναι δυαδικές πράξεις στο $P(\boldsymbol{U})$. Με άλλα λόγια, το $P(\boldsymbol{U})$ είναι κλειστό ως προς αυτές τις πράξεις.

Ορισμός 2.6 `Εστω $A, B \subseteq \boldsymbol{U}$. Τα A, B καλούνται *ξένα μεταξύ τους* αν $A \cap B = \emptyset$.

Θεώρημα 2.3 Αν $A, B \subseteq \boldsymbol{U}$, τότε τα A, B είναι ξένα μεταξύ τους αν και μόνον αν $A \cup B = A \Delta B$.

Ορισμός 2.7 Αν $A \subseteq \boldsymbol{U}$, τότε το *συμπλήρωμα* ($\boldsymbol{U} - A$ ή $\overline{A}$ ή $\neg A$) του A είναι το σύνολο $\{x \mid x \in \boldsymbol{U} \wedge x \notin A\}$.

Για κάθε σύνολο αναφοράς $\boldsymbol{U}$ και κάθε $A \subseteq \boldsymbol{U}$ έχουμε ότι $\overline{A} \subseteq \boldsymbol{U}$. Επομένως, το $P(\boldsymbol{U})$ είναι κλειστό και ως προς την πράξη του συμπληρώματος.

Ορισμός 2.8 Αν $A, B \subseteq \boldsymbol{U}$, τότε το *σχετικό συμπλήρωμα* (ή *η διαφορά*) $B - A$ του συνόλου A ως προς το σύνολο B είναι το σύνολο $\{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$.

Θεώρημα 2.4 `Εστω $A, B \subseteq \boldsymbol{U}$. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

α) $A \subseteq B$
β) $A \cup B = B$
γ) $A \cap B = A$
δ) $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το θεώρημα θα δείξουμε ότι (α) $\Rightarrow$ (β), (β) $\Rightarrow$ (γ), (γ) $\Rightarrow$ (δ) και (δ) $\Rightarrow$ (α).

(i) (α) $\Rightarrow$ (β) Αν Α και Β είναι δύο οποιαδήποτε σύνολα, τότε $B \subseteq A \cup B$. Αρκεί επομένως, να δείξουμε ότι $A \cup B \subseteq B$. Αλλά αν $x \in A \cup B$ τότε $x \in A$ ή $x \in B$. και επειδή $A \subseteq B$, και στις δύο περιπτώσεις $x \in B$. `Αρα $A \cup B = B$.

(ii) (β) $\Rightarrow$ (γ) Αν Α και Β είναι δύο οποιαδήποτε σύνολα, τότε $A \cap B \subseteq A$. Αρκεί επομένως, να δείξουμε ότι $A \subseteq A \cap B$. Αλλά επειδή $A \cup B = B$, $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$. Επομένως, $A = A \cap B$.

(iii) (γ) $\Rightarrow$ (δ) $x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B$. Επειδή $A \cap B = A$, $x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in \overline{A}$. Επομένως, $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

(iv) (δ) $\Rightarrow$ (α) $x \in A \Rightarrow x \notin \overline{A}$, και επειδή $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, $x \notin \overline{A} \Rightarrow x \notin \overline{B} \Rightarrow x \in B$. Επομένως, $A \subseteq B$.

Ορισμός 2.9 `Ενας *διαμελισμός (partition)* ενός μη κενού συνόλου Α είναι ένα υποσύνολο Π του δυναμοσυνόλου 2^A τέτοιο ώστε το κενό σύνολο δεν είναι στοιχείο του Π και κάθε στοιχείο του Α ανήκει σε ένα και μόνον ένα σύνολο του Π. Δηλαδή, Π είναι ένας διαμελισμός του Α εάν Π είναι ένα σύνολο υποσυνόλων του Α τέτοιο ώστε:

1. Κάθε στοιχείο του Π είναι μη κενό σύνολο.

2. Τα σύνολα του Π είναι ξένα μεταξύ τους.

3. Η ένωση των συνόλων του Π είναι το σύνολο Α.

Παράδειγμα. Το σύνολο $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$ είναι ένας διαμελισμός του $\{1, 2, 3, 4\}$, ενώ το σύνολο $\{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}$ δεν είναι. Τα σύνολα των περιττών και των αρτίων φυσικών αριθμών αποτελούν ένα διαμελισμό του συνόλου των φυσικών αριθμών.
□

Οι Νόμοι της Θεωρίας Συνόλων

1. $\neg(\neg A) = A$	Νόμος διπλού συμπληρώματος
2. $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$ $\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$	Νόμοι De Morgan
3. $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Αντιμεταθετικοί Νόμοι
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Προσεταιριστικοί Νόμοι
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Επιμεριστικοί Νόμοι
6. $A \cup A = A$ $A \cap A = A$	
7. $A \cup \varnothing = A$ $A \cap \boldsymbol{U} = A$	
8. $A \cup \neg A = \boldsymbol{U}$ $A \cap \neg A = \varnothing$	Νόμοι συμπληρώματος
9. $A \cup \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	
10. $A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Νόμοι απορρόφησης

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε δύο από τους παραπάνω νόμους. Πρώτα, θα αποδείξουμε ότι $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$.

Απόδειξη. `Εστω $x \in \boldsymbol{U}$. Τότε $x \in \neg(A \cup B) \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ και $x \notin B \Rightarrow x \in \neg A$ και $x \in \neg B \Rightarrow x \in \neg A \cap \neg B$. Επομένως, $\neg(A \cup B) \subseteq \neg A \cap \neg B$. Για να δείξουμε την αντίθετη κατεύθυνση, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ισχύει και η αντίθετη κατεύθυνση κάθε μιας από τις παραπάνω ταυτολογικές συνεπαγωγές. Δηλαδή, $x \in \neg A \cap \neg B \Rightarrow x \in \neg A$ και $x \in \neg B \Rightarrow x \notin A$ και $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \neg(A \cup B)$. Επομένως, $\neg A \cap \neg B \subseteq \neg(A \cup B)$. `Αρα $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$.

□

Θα αποδείξουμε τώρα, ότι $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Απόδειξη. Για κάθε $x \in \boldsymbol{U}$, $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A)$ και $(x \in B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A)$ και $(x \in B$ ή $x \in C) \Leftrightarrow (x \in A$ και $x \in B)$ ή $(x \in A$ και $x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \cap B)$ ή $(x \in A \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Οι παραπάνω ταυτολογικές ισοδυναμίες εξασφαλίζουν ότι το σύνολο $A \cap (B \cup C)$ είναι υποσύνολο του $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ και ανίστροφα. `Αρα ισχύει η ισότητα $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

□

Παράδειγμα. Απλοποιείστε την έκφραση $\neg[\neg[(A \cup B) \cap C] \cup \neg B]$.

Βήμα	**Αιτιολόγηση**
1. $\neg[\neg[(A \cup B) \cap C] \cup \neg B]$	
2. $\neg[\neg[(A \cup B) \cap C]] \cap \neg[\neg B]$	Νόμος De Morgan
3. $[(A \cup B) \cap C] \cap B$	Νόμος Διπλού Συμπληρώματος
4. $(A \cup B) \cap (C \cap B)$	Προσεταιριστικός Νόμος
5. $(A \cup B) \cap (B \cap C)$	Αντιμεταθετικός Νόμος
6. $[(A \cup B) \cap B] \cap C$	Προσεταιριστικός Νόμος
7. $B \cap C$	Νόμος Απορρόφησης

□

Ορισμός 2.10 `Εστω $X \subseteq \boldsymbol{U}$ ένα σύνολο το οποίο σχηματίζεται από ένα πεπερασμένο αριθμό συνόλων και τις πράξεις $\cup$ και $\cap$. Το δυϊκό X^d του X είναι ένα υποσύνολο του $\boldsymbol{U}$, το οποίο παίρνουμε αν αντικαταστήσουμε κάθε εμφάνιση της $\cup$ ($\cap$) στο X με την $\cap$ (αντίστοιχα, με την $\cup$), και κάθε εμφάνιση του $\boldsymbol{U}$ ($\varnothing$) στο X με το $\varnothing$ (αντίστοιχα, με το $\boldsymbol{U}$).

Θεώρημα 2.5 (Αρχή του Δυϊσμού). `Εστω $X, Y \subseteq \boldsymbol{U}$, όπου X και Y δύο σύνολα τέτοια ώστε να ικανοποιούν την υπόθεση του προηγουμένου ορισμού. Τότε, αν $X = Y$, τότε $X^d = Y^d$.

Η αρχή του δυϊσμού είναι χρήσιμη στην απόδειξη των παραπάνω νόμων. Για κάθε ζευγάρι νόμων, είναι αρκετό να αποδεικνύουμε έναν από τους δύο νόμους, και κατόπιν να επικαλούμαστε την παραπάνω αρχή για την απόδειξη και του άλλου. Ως τόσο, θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί με την εφαρμογή της αρχής του δυϊσμού διότι δεν μπορούμε να την εφαρμόσουμε σε συγκεκριμένες περιπτώσεις ισότητας συνόλων αλλά μόνον σε γενικά αποτελέσματα (θεωρήματα). Για παράδειγμα, αν A = {1, 2, 3, 4}, B = {1, 2, 3, 5}, C = {1, 2}, D = {1,3}, τότε

$$A \cap B = \{1, 2, 3\} = C \cup D$$

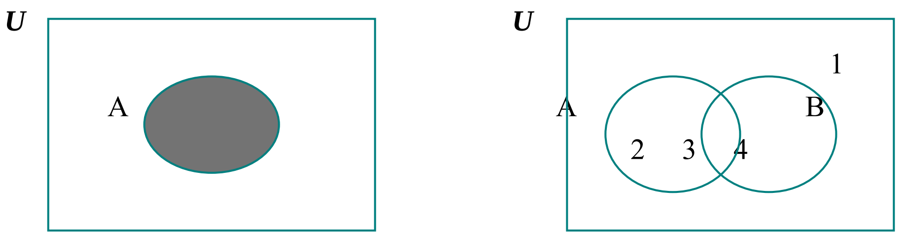
Ως τόσο, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $(A \cap B)^d = (C \cup D)^d$, ότι δηλαδή $A \cup B = = C \cap D$, διότι $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ενώ $C \cap D = \{1\}$. Ο λόγος για τον οποίο δεν μπορεί να εφαρμοσθεί η αρχή του δυϊσμού στο συγκεκριμένο παράδειγμα, είναι ότι η ισότητα $A \cap B = C \cup D$ (αν και ισχύει στο συγκεκριμένο παράδειγμα) δεν ισχύει γενικώς (για κάθε δηλαδή τετράδα συνόλων A,B, C, D στο σύνολο αναφοράς ***U***).

Παράδειγμα. `Εστω ότι θέλουμε να βρούμε την δυϊκή της πρότασης $A \subseteq B$ ($A, B \subseteq \boldsymbol{U}$). Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 2.4 και συγκεκριμένα ότι η πρόταση $A \subseteq B$ είναι ισοδύναμη με την $A \cup B = B$, όταν $A, B \subseteq \boldsymbol{U}$.

Η δυϊκή της πρότασης $A \cup B = B$ είναι η $A \cap B = B$. Αλλά $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$. Επομένως, η δυϊκή πρόταση της $A \subseteq B$ είναι η $B \subseteq A$.

□

Διαγράμματα Venn. Τα διαγράμματα Venn ονομάσθησαν έτσι προκειμένου να τιμηθεί ο `Αγγλος Μαθηματικός Venn (1834-1883). `Ενα διάγραμμα Venn κατασκευάζεται ως εξής: Το σύνολο αναφοράς παριστάνεται με την εσωτερική επιφάνεια ενός ορθογωνίου, ενώ τα υποσύνολά του παριστάνονται με την εσωτερική επιφάνεια κύκλων ή άλλων κλειστών καμπυλών. Το σχήμα 2.1 δείχνει δύο διαγράμματα Venn. Η γραμμοσκιασμένη περιοχή του σχήματος 2.1(α) παριστάνει το σύνολο A ενώ η μη γραμμοσκιασμένη περιοχή παριστάνει το σύνολο $\overline{A}$. Στο σχήμα 2.1(β), η περιοχή 3 παριστάνει το σύνολο $A \cap B$, οι περιοχές 2, 3, και 4 μαζί παριστάνουν το σύνολο $A \cup B$, ενώ η περιοχή 1 παριστάνει το συμπλήρωμα του συνόλου $A \cup B$ δηλαδή, το σύνολο $\overline{A} \cap \overline{B}$.



(α) (β)

Σχήμα 2.1

Παρατηρούμε ότι κάθε μία από τις τέσσερες περιοχές του διαγράμματος του σχήματος 2.1(β) αντιστοιχεί σε ένα σύνολο της μορφής $S_1 \cap S_2$ όπου το S_1 αντικαθίσταται είτε με το A ή με το $\overline{A}$ και το S_2 αντικαθίσταται είτε με το B ή με το $\overline{B}$. Τα διαγράμματα Venn μπορούν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να δειχθεί ότι δύο (ή και περισσότερα) σύνολα είναι ίσα μεταξύ τους. Για παράδειγμα, τα διαγράμματα αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την απόδειξη των νόμων DeMorgan, καθώς επίσης και των άλλων νόμων της Θεωρίας Συνόλων.

`Ενας άλλος τρόπος για να δείχνουμε ότι δύο (ή και περισσότερα) σύνολα είναι ίσα μεταξύ τους, είναι με την χρήση των χαρακτηριστικών πινάκων (membership tables). Παρατηρούμε ότι αν Α, Β $\subseteq \boldsymbol{U}$ και x $\in \boldsymbol{U}$ τότε το x ικανοποιεί μία από τις παρακάτω καταστάσεις:

α) x $\notin$ A, x $\notin$ B
β) x $\notin$ A, x $\in$ B
γ) x $\in$ A, x $\notin$ B
δ) x $\in$ A, x $\in$ B

Αν το x ανήκει σε κάποιο σύνολο, τότε γράφουμε 1 στη στήλη του χαρακτηριστικού πίνακα μέλους, ο οποίος αντιστοιχεί στο σύνολο αυτό. Διαφορετικά (το x δεν ανήκει στο σύνολο), γράφουμε 0. Οι παρακάτω πίνακες (α) και (β) είναι οι χαρακτηριστικοί πίνακες των συνόλων $A \cap B$, $A \cup B$ και $\overline{A}$ (συμπλήρωμα του Α) αντίστοιχα.

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Πίνακας (α)

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Πίνακας (β)

Παρατηρούμε ότι κάθε μία από τις τέσσερες γραμμές του Πίνακα (α) αντιστοιχεί σε μία από τις τέσσερες περιοχές του διαγράμματος Venn του σχήματος 2.1(β). Οι χαρακτηριστικοί πίνακες (όπως και τα διαγράμματα Venn) μπορούν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να δειχθεί ότι δύο (ή και περισσότερα) σύνολα είναι ίσα μεταξύ τους. `Ετσι, οι χαρακτηριστικοί πίνακες μπορούν για παράδειγμα, να χρησιμοποιηθούν για την απόδειξη των νόμων της Θεωρίας Συνόλων.

2.3 Σχέσεις και Συναρτήσεις

Το *διατεταγμένο ζεύγος* (α,β) δύο αντικειμένων α και β διαφέρει από το σύνολο {α,β} στα εξής δύο σημεία:

1. Η σειρά με την οποία δίνονται τα στοιχεία έχει σημασία στην περίπτωση του διατεταγμένων ζευγών ενώ δεν έχει στην περίπτωση των συνόλων. `Ετσι, τα διατεταγμένα ζεύγη (α,β) και (β,α) είναι διαφορετικά μεταξύ τους, ενώ στην περίπτωση του συνόλου {α,β}={β,α}.

2. Τα μέλη ενός διατεταγμένου ζεύγος δεν είναι απαραίτητο να είναι ξένα μεταξύ τους. Τα διατεταγμένα ζεύγη (α,β) και (γ,δ) είναι ίσα μεταξύ τους αν α=γ και β=δ.

Ορισμός 2.11 Το *καρτεσιανό γινόμενο* $A \times B$ δύο συνόλων A και B ορίζεται σαν το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (α,β) όπου $\alpha \in A$ και $\beta \in B$. Για παράδειγμα, $\{\alpha,\beta,\gamma\} \times \{1,2\}= \{(\alpha,1), (\alpha,2), (\beta,1), (\beta,2), (\gamma,1), (\gamma,2)\}$.

Ορισμός 2.12 Μια *δυαδική σχέση* πάνω στα σύνολα A και B είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$. Για παράδειγμα το σύνολο {(α,2), (β,1), (γ,2)} είναι μια δυαδική σχέση πάνω στα σύνολα {α,β,γ} και {1,2}.

Η έννοια του διατεταγμένου ζεύγους μπορεί να επεκταθεί σε περισσότερα από δύο στοιχεία και έτσι, έχουμε τις διατεταγμένες τριάδες, τετράδες, κ.λ.π. Επίσης, οι έννοιες του καρτεσιανού γινομένου και της δυαδικής σχέσης μπορούν να επεκταθούν σε περισσότερα των δύο συνόλων. `Ετσι, μπορούμε να αναφερόμαστε στο καρτεσιανό γινόμενο $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ των n συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_n$, και στη n-αδική σχέση των συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Ορισμός 2.13 Μια *συνάρτηση* ή *απεικόνηση* f από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B γράφεται $f: A \to B$, και είναι μια δυαδική σχέση R πάνω στα A και B τέτοια ώστε κάθε στοιχείο του συνόλου A εμφανίζεται σε ένα μόνο διατεταγμένο ζεύγος της σχέσης R (δηλαδή, σε κάθε $a \in A$ αντιστοιχεί ένα μοναδικο $b \in B$).

Συχνά γράφουμε $f(a) = b$ όταν (a,b) είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος της R. Το b ονομάζεται *εικόνα* του a κάτω από την συνάρτηση f.

Ορισμός 2.14 Αν $f: A \to B$, τότε το σύνολο A καλείται *πεδίο ορισμού* της f, ενώ το υποσύνολο του B το οποίο περιέχει κάθε στοιχείο $b \in B$ για το οποίο υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $f(a) = b$, καλείται *πεδίο τιμών* της συνάρτησης f και γράφεται f(A).

Παράδειγμα. `Εστω Α={1, 2, 3} και Β={w, x, y, z}. H f = {(1,w), (2,x), (3,x)} είναι μια συνάρτηση και επομένως μια δυαδική σχέση από το Α στο Β. Το πεδίο ορισμού της f είναι το {1, 2, 3}ενώ το πεδίο τιμών είναι το {w, x}.

□

Ορισμός 2.15 Αν f: A $\rightarrow$ B και $A_1 \subseteq A$, τότε

$$f(A_1) = \{b \in B \mid b = f(a) \text{ για κάποιο } a \in A_1\}$$

και το $f(A_1)$ καλείται *εικόνα του υποσυνόλου* A_1 κάτω από την f.

Παράδειγμα. `Εστω f: **R** $\rightarrow$ **R**, $f(x) = x^2$. Τότε f(**R**) είναι το διάστημα $[0, +\infty)$. Η εικόνα του συνόλου των ακεραίων **Z** κάτω από την f είναι το σύνολο f(**Z**) = {0, 1, 4, 9, 16, …}.

□

Ορισμός 2.16 Μια συνάρτηση f: A $\rightarrow$ B καλείται *ένα-προς-ένα* αν κάθε στοιχείο του συνόλου Β εμφανίζεται το **πολύ** μια φορά σαν εικόνα ενός στοιχείου του Α.

Παράδειγμα. `Εστω Α={1, 2, 3} και Β={1, 2, 3, 4, 5}. Η συνάρτηση

$$f = \{(1,1), (2,3), (3,4)\}$$

είναι ένα-προς-ένα, ενώ η συνάρτηση

$$g = \{(1,1), (2,3), (3,3)\}$$

δεν είναι ένα-προς-ένα διότι g(2) = g(3).

□

Ορισμός 2.17 Μια συνάρτηση f: A $\rightarrow$ B καλείται *επί* αν f(A) = B, δηλαδή, αν για κάθε $b \in B$ υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο $a \in A$ τέτοιο ώστε f(a) = b.

Παράδειγμα. `Εστω Α = {1, 2, 3, 4} και Β = {x, y, z}. Η συνάρτηση f = {(1,z), (2,y), (3,x), (4,y)} είναι επί, ενώ η συνάρτηση g = {(1,x), (2,x), (3,y), (4,y)} δεν είναι επί διότι $g(A) = \{x, y\} \subset B$.

□

Ορισμός 2.18 `Εστω $R \subseteq A \times A$ μια δυαδική σχέση πάνω στο σύνολο Α. Η σχέση R καλείται:

1. *Ανακλαστική* αν $(\alpha, \alpha) \in R$ για κάθε $\alpha \in A$.
2. *Συμμετρική* αν $(\alpha, \beta) \in R \rightarrow (\beta, \alpha) \in R$
3. *Αντισυμμετρική* αν $(\alpha, \beta) \in R \wedge \alpha \neq \beta \rightarrow (\beta, \alpha) \notin R$

4. *Μεταβατική* αν $(α, β) \in R \wedge (β, γ) \in R \rightarrow (α, γ) \in R$

Παράδειγμα. `Εστω Α το σύνολο των ανθρώπων. Τότε η σχέση

$$\{ (α, β): α, β \in A \text{ και ο α είναι ο πατέρας του β}\}$$

είναι αντισυμμετρική και δεν είναι μεταβατική, ενώ η σχέση

$$\{ (α, β): α, β \in A \text{ και ο α είναι πρόγονος του β}\}$$

είναι μεταβατική.

□

Ορισμός 2.19 Μια σχέση $R \subseteq A \times A$ καλείται *μερική διάταξη* αν είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική. Μια μερική διάταξη είναι *ολική διάταξη* αν για κάθε $α, β \in A$, είτε $(α, β) \in R$ ή $(β, α) \in R$.

Παράδειγμα. Η σχέση "μικρότερο ή ίσο ($\leq$)" ορισμένη πάνω στο σύνολο των ακεραίων είναι ολική διάταξη.

Αν Α το σύνολο των ανθρώπων και θεωρήσουμε ότι κάθε άνθρωπος είναι πρόγονος του εαυτού του, τότε η σχέση

$$\{ (α, β): α, β \in A \text{ και ο α είναι πρόγονος του β}\}$$

είναι μερική διάταξη αλλά δεν είναι ολική διάταξη.

□

Ορισμός 2.20 Μια σχέση $R \subseteq A \times A$ καλείται *σχέση ισοδυναμίας* αν είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

Παράδειγμα. Αν n θετικός ακέραιος τότε η σχέση R modulo n, η οποία ορίζεται πάνω στο σύνολο των ακεραίων ως $(α, β) \in R$ αν "α - β είναι πολλαπλάσιο του n", είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Αν $n = 7$, τότε $(9, 2) \in R$, $(-3, 11) \in R$, ενώ $(3, 7) \notin R$.

□

Μια σχέση ισοδυναμίας R πάνω σε ένα σύνολο Α "διαμελίζει" το σύνολο σε ένα σύνολο κλάσεων οι οποίες καλούνται *κλάσεις ισοδυναμίας*. Δοθείσης της σχέσης R συνήθως γράφουμε [α] για να δηλώσουμε την κλάση ισοδυναμίας που περιέχει το στοιχείο α. Δηλαδή,

$$[α] = \{β: (α, β) \in R\}$$

ή επειδή η R είναι συμμετρική,

$$[α] =\{β: (β, α) \in R\}$$

Θεώρημα 2.6 \`Εστω R μια σχέση ισοδυναμίας πάνω στο σύνολο A. Τότε οι κλάσεις ισοδυναμίας της R αποτελούν έναν διαμελισμό του A.

Απόδειξη. \`Εστω Π={[α]: α ∈ A}. Πρέπει να δείξουμε ότι τα σύνολα στο Π είναι μη (i) κενά, (ii) ξένα μεταξύ τους, και (iii) η ένωσή τους είναι το σύνολο A.

(i) \`Ολες οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι μη κενές διότι λόγω της ανακλαστικής ιδιότητας α ∈ [α], για κάθε α ∈ A.

(ii) Προκειμένου να δείξουμε ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι ξένες μεταξύ τους, θεωρούμε οποιεσδήποτε δύο κλάσεις [α] και [β], οι οποίες δεν ταυτίζονται, και υποθέτουμε ότι [α] ∩ [β] ≠ ∅. Επομένως, υπάρχει κάποιο στοιχείο γ τέτοιο ώστε γ ∈ [α] ∩ [β]. \`Αρα, (α, γ) ∈ R και (γ, β) ∈ R. Επειδή η R είναι μεταβατική, (α, β) ∈ R, και επειδή η R είναι συμμετρική (β, α) ∈ R. \`Εστω δ ∈ [α]. Τότε, (δ, α) ∈ R και λόγω της μεταβατικής ιδιότητας (δ, β) ∈ R. Επομένως, δ ∈ [β], και [α] ⊆ [β]. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι [β] ⊆ [α]. Συνεπώς, [α] = [β]. Αλλά αυτό είναι αντιφατικό με την υπόθεση ότι οι [α] και [β] δεν ταυτίζονται. \`Αρα, [α] ∩ [β] = ∅.

(iii) Για να δείξουμε ότι η ένωσή των συνόλων στο Π είναι το σύνολο A αρκεί να παρατηρήσουμε ότι επειδή η R είναι ανακλαστική, α ∈ [α], για κάθε α ∈ A. Επομένως, κάθε στοιχείο του A ανήκει σε κάποιο σύνολο του Π.

□

Από το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι δοθείσης μιας σχέσης ισοδυναμίας R, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον αντίστοιχο διαμελισμό Π. Για παράδειγμα, έστω

R = { (α, β): α, β είναι άνθρωποι και έχουν τους ίδιους γονείς }

Τότε, οι κλάσεις ισοδυναμίας της R είναι υποσύνολα ατόμων τα οποία είναι αδέλφια.

2.4 Πεπερασμένα και \`Απειρα Σύνολα

Ορισμός 2.21 Δύο σύνολα A και B καλούνται *ισάριθμα* αν υπάρχει μια ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση f: A → B.

\`Ενα σύνολο είναι πεπερασμένο αν είναι ισάριθμο με το σύνολο {1,2, … n} για κάποιο φυσικό αριθμό n. Αν τα σύνολα A και {1,2, … n} είναι ισάριθμα, τότε λέμε ότι ο πληθικός αριθμός του A είναι n, και γράφουμε |A|=n.

`Ένα σύνολο καλείται άπειρο αν δεν είναι πεπερασμένο. Για παράδειγμα, το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι άπειρο.

Ορισμός 2.22 `Ένα σύνολο καλείται *αριθμήσιμα άπειρο* αν είναι ισάριθμο με το σύνολο **N** των φυσικών αριθμών. `Ένα σύνολο καλείται *αριθμήσιμο* αν είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο. `Ένα σύνολο το οποίο δεν είναι αριθμήσιμο, καλείται *μη αριθμήσιμο*.

Προκειμένου να δείξουμε ότι ένα σύνολο A είναι αριθμήσιμα άπειρο είναι αρκετό να δείξουμε ότι υπάρχει μια ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση μεταξύ του A και ενός αριθμήσιμα άπειρου συνόλου B. Επειδή το B είναι ισάριθμο με το σύνολο των φυσικών αριθμών **N**, θα έχουμε τότε δείξει ότι τα A και **N** είναι ισάριθμα.

Παράδειγμα. `Εστω A ένα αριθμήσιμα άπειρο σύνολο και B ένα άπειρο υποσύνολο του A. Θα δείξουμε ότι το B είναι αριθμήσιμα άπειρο.

Απόδειξη. Αφού το A είναι αριθμήσιμα άπειρο υπάρχει μια ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση f: $\mathbf{N} \to A$, τέτοια ώστε αν A= $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$, $f(i) = \alpha_i$. `Εστω ότι τα στοιχεία του συνόλου B παρατίθενται με την σειρά κατά την οποία παρατίθενται τα στοιχεία του συνόλου A. Δηλαδή, έστω ότι B=$\{\alpha_3, \alpha_{19}, \alpha_{35}, \dots\}$ (παραλείπονται τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B). Θεωρούμε την εξής ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση g: $\mathbf{N} \to B$: $g(0) = \alpha_3$, $g(1) = \alpha_{19}$, $g(2) = \alpha_{35}$, και γενικά, $g(n) = \alpha_m$, όπου m είναι ο ελάχιστος αριθμός ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση $|\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \cap B| = n+1$. Τέτοιο m υπάρχει για κάθε n, διότι το B είναι ένα άπειρο υποσύνολο του A.

□

Παράδειγμα. Η ένωση πεπερασμένου αριθμού αριθμήσιμα άπειρων συνόλων είναι αριθμήσιμα άπειρο σύνολο.

Θα αποδείξουμε την παραπάνω πρόταση για δύο αριθμήσιμα σύνολα A και B. Η απόδειξη μπορεί εύκολα να γενικευθεί για οποιονδήποτε (πεπερασμένο) αριθμό συνόλων.

Απόδειξη. `Εστω ότι A= $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ και B= $\{\beta_0, \beta_1, \dots\}$. Τα στοιχεία του συνόλου $A \cup B$ παρατίθενται ως εξής: $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \dots$ Θεωρούμε την εξής ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση g: $\mathbf{N} \to A \cup B$: $g(0) = \alpha_0$, $g(1) = \beta_0$, $g(2) = \alpha_1$, $g(3)=\beta_1$, κ.ο.κ.

□

Παράδειγμα. Κατά παρόμοιον τρόπο με αυτόν του προηγουμένου παραδείγματος, μπορούμε να δείξουμε η ένωση αριθμήσιμα άπειρου αριθμού αριθμήσιμα άπειρων συνόλων είναι αριθμήσιμα άπειρο σύνολο. Σαν παράδειγμα, θα δείξουμε ότι το σύνολο $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ είναι αριθμήσιμα άπειρο. Το σύνολο $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ είναι η ένωση των συνόλων $\{0\} \times \mathbf{N}$, $\{1\} \times \mathbf{N}$, $\{2\} \times \mathbf{N}$, **…,** δηλαδή, αποτελεί την ένωση ενός αριθμήσιμα άπειρου αριθμού αριθμήσιμα άπειρων συνόλων.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε έναν τρόπο παράθεσης των στοιχείων των συνόλων $\{0\} \times \mathbf{N}$, $\{1\} \times \mathbf{N}$, $\{2\} \times \mathbf{N}$, **…,** ο οποίος θα εξασφαλίζει ότι θα παρατεθούν όλα τα στοιχεία όλων των συνόλων. Επειδή ο αριθμός των συνόλων αυτών είναι αριθμήσιμα άπειρος, δεν μπορούμε (όπως κάναμε στο προηγούμενο παράδειγμα) να παραθέσουμε ένα στοιχείο από κάθε σύνολο πριν παραθέσουμε το δεύτερο στοιχείο του πρώτου συνόλου. `Ετσι, η παράθεση των στοιχείων γίνεται σε γύρους ως εξής:

1. Στον πρώτο γύρο, παραθέτουμε το πρώτο στοιχείο του πρώτου συνόλου. Παραθέτουμε δηλαδή το στοιχείο (0, 0) του $\{0\} \times \mathbf{N}$.

2. Στο δεύτερο γύρο, παραθέτουμε το δεύτερο στοιχείο του πρώτου συνόλου, και το πρώτο στοιχείο του δεύτερου συνόλου. Παραθέτουμε δηλαδή το στοιχείο (0, 1) του $\{0\} \times \mathbf{N}$, και το στοιχείο (1, 0) του $\{1\} \times \mathbf{N}$.

3. Στο τρίτο γύρο, παραθέτουμε το τρίτο στοιχείο του πρώτου συνόλου, το δεύτερο στοιχείο του δεύτερου συνόλου, και το πρώτο στοιχείο του τρίτου συνόλου. Παραθέτουμε δηλαδή το στοιχείο (0, 2) του $\{0\} \times \mathbf{N}$, το στοιχείο (1, 1) του $\{1\} \times \mathbf{N}$, και το στοιχείο (2, 0) του $\{2\} \times \mathbf{N}$.

4. Γενικά, στον n-οστό γύρο, παραθέτουμε το n-οστό στοιχείο του πρώτου συνόλου, το n-1 στοιχείο του δεύτερου συνόλου, … , και το πρώτο στοιχείο του n-οστού συνόλου. Με άλλα λόγια, στον n-οστό γύρο, παραθέτουμε όλα τα ζεύγη $(i, j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, για τα οποία ισχύει ότι $i + j = n-1$.

Επειδή σε κάθε γύρο παρατίθεται πεπερασμένος αριθμός ζευγών (n ζεύγη στον n-οστό γύρο), κάθε γύρος χρειάζεται πεπερασμένο χρόνο, και επομένως, κάθε ζεύγος αριθμών που ανήκει σε κάποιο από τα εν λόγω σύνολα, θα παρατεθεί.