4. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Για την αναπαράσταση αρνητικών αριθμών, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα bit ειδικά για το πρόσημο. Άρα, για την αναπαράσταση ενός n-bit αριθμού θα χρησιμοποιούμε n+1 bits. Τυπικά, το bit πρόσημου είναι το MSB.

Γενικότερα, για την αναπαράσταση αρνητικών αριθμών, εκτός από το σύστημα προσημασμένου μέτρου, χρησιμοποιείται και το συμπληρωματικό σύστημα.

1. Σύστημα προσημασμένου μέτρου

Στην αναπαράσταση αυτή χρησιμοποιούμε n+1 bits για να αναπαραστήσουμε έναν αριθμό n bits. Το MSB χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση του πρόσημου. Αν MSB=0, τότε ο αριθμός είναι θετικός, ενώ αν MSB=r-1, ο αριθμός είναι αρνητικός. (r είναι η βάση. Στο δυαδικό σύστημα r=2, οπότε r-1=1).

Σε αριθμητική, στην περίπτωση αυτή, το πρόσημο και το μέτρο διαχειρίζονται ξεχωριστά. Πρώτα υπολογίζεται το μέτρο του αποτελέσματος και στη συνέχεια επισυνάπτεται σε αυτό, το πρόσημο. Το σύστημα αυτό, χρησιμοποιείται σε μερικά ψηφιακά συστήματα μετρήσεων. Ωστόσο, η σύγχρονη αναπαράσταση αρνητικών αριθμών, είναι μέσω του συμπληρώματός τους. Παραδείγματα:

Αριθμός	**Αναπαράσταση στο σύστημα προσημασμένου μέτρου**
$(+2)_{10}$	0,0010
$(-2)_{10}$	1,0010
$(+56)_{8}$	0,0056
$(-56)_{8}$	7,0056
$(+1F)_{16}$	0,001F
$(-1F)_{16}$	F,001F

2. Συμπληρωματικό σύστημα αναπαράστασης προσημασμένων αριθμών

Η αφαίρεση Β – Α ισοδυναμεί με την πρόσθεση του Β με τον –Α. Το συμπληρωματικό σύστημα είναι μια βολική μορφή αναπαράστασης αρνητικών αριθμών. Με το σύστημα αυτό έχουμε αναγωγή της αφαίρεσης σε πρόσθεση. Επειδή ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση μπορούν να γίνουν με τη χρήση ολίσθησης και διαδοχικών προσθέσεων ή αφαιρέσεων, καταλαβαίνουμε ότι μπορούμε να πραγματοποιήσουμε τις 4 αριθμητικές πράξεις χρησιμοποιώντας μόνο το υλικό της πρόσθεσης, όταν οι αρνητικοί αριθμοί αναπαρίστανται με τη συμπληρωματική μορφή. Οι πιο δημοφιλείς μορφές συμπληρώματος είναι το r-συμπλήρωμα και το r-1 συμπλήρωμα. **Στην περίπτωση του δυαδικού συστήματος, οι δύο αυτές μορφές είναι το συμπλήρωμα ως προς 1 (Σ1) και το συμπλήρωμα ως προς 2 (Σ2).**

3. Συμπλήρωμα N ως προς r , $[N]_r$

$$[N]_r=r^n-(N)_r,\ (N)_r\neq 0 \text{ και } [N]_r=0,\ (N)_r=0$$

Παραδείγματα:

- Συμπλήρωμα ως προς 2 του $(01010)_2$: Επειδή n=5, r=2, έχουμε:

  $2^5 – (01010) = 100000 – 01010 = 10110$

- Συμπλήρωμα ως προς 2 του $(0.0010)_2$: Επειδή n=1, r=2, έχουμε:

  $2^1 – (0.0010) = 10.0000 – 0.0010 = 1.1110$

- Το συμπλήρωμα ως προς 10 το $(4887)_{10}$: Επειδή n=4, r=10, έχουμε:

  $10^4 – 4887 = 5113$

- Το συμπλήρωμα του $(48.78)_{10}$: Επειδή n=2, r=10, έχουμε:

  $10^2 – 48.87 = 51.13$

4. Συμπλήρωμα ως προς 2

Για την εύρεση γρήγορα του συμπληρώματος ως προς 2, ενός δυαδικού αριθμού, υπάρχουν δύο απλές μέθοδοι.

Στην πρώτη μέθοδο, αντικαθιστούμε κάθε bit με το συμπληρωματικό του, δηλαδή κάθε 0 με 1 και κάθε 1 με 0. Στη συνέχεια προσθέτουμε 1 στο LSB. Ο αριθμός που προκύπτει είναι το συμπλήρωμα ως προς 2 του αρχικού.
Παράδειγμα

$[01010]_2 = ?$

0	1	0	1	0	Αρχικός αριθμός
1	0	1	0	1	Συμπληρώνουμε κάθε bit
				+1	Προσθέτουμε 1 στο LSB
1	**0**	**1**	**1**	**0**	Συμπλήρωμα ως προς 2

Στη δεύτερη μέθοδο, ξεκινάμε από το LSB και αντιγράφουμε τα bits του αριθμού, μέχρι να βρούμε τον πρώτο 1. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το συμπληρωματικό για όλα τα εναπομείναντα bits μέχρι το MSB. Ο αριθμός που προκύπτει είναι το συμπλήρωμα ως προς 2 του αρχικού.

Παράδειγμα

$[01010]_2 = ?$

0	1	0	1	0	Αρχικός αριθμός
			1	**0**	Αντιγράφουμε από το LSB τα bits μέχρι να βρούμε τον πρώτο 1
1	**0**	**1**	**1**	**0**	Συμπλήρωμα για τα επόμενα bits
1	**0**	**1**	**1**	**0**	Συμπλήρωμα ως προς 2

5. Συμπλήρωμα ως προς r-1

$\mathbf{[N]_{r-1}=r^n-r^{-m}-(N)_r}$

όπου n,m είναι αντίστοιχα το πληθος bits στο ακέραιο και στο κλασματικό μέρος του αριθμού. Επίσης ισχύει:

$\mathbf{[N]_r=[N]_{r-1}+r^m}$

Παραδείγματα:

$(N)_r$	r	n	m	$\mathbf{[N]_{r-1}=r^n-r^{-m}-(N)_r}$
1001	2	4	0	$2^4 - 2^0 - 1001 = 0110$
100.1	2	3	1	$2^3 - 2^{-1} - 100.1 = 011.0$
486.7	10	3	1	$10^3 - 10^{-1} - 486.7 = 513.2$

6. Συμπλήρωμα ως προς 1

Το συμπλήρωμα ως προς 1 ενός 2δικού αριθμού υπολογίζεται πολύ εύκολα θεωρώντας το συμπληρωματικό κάθε bit.

Παράδειγμα:

N	1	0	1	1	0	.	1	1	0
$[N]_1$	0	1	0	0	1	.	0	0	1

7. Συμπλήρωμα ως προς 2 και ως προς 1 σε προσημασμένους αριθμούς

Όπως και στο σύστημα προσημασμένου μέτρου, έτσι και στο σύστημα συμπληρώματος, χρησιμοποιούμε ένα επιπλέον bit για το πρόσημο. Επειδή ο συμπληρωματικός ενός αριθμού, αντιστοιχεί στον αρνητικό του, οι θετικοί αριθμοί στο συμπληρωματικό σύστημα παραμένουν ίδιοι, όπως στο προσημασμένο σύστημα. **Μόνον οι αρνητικοί αριθμοί αναπαρίστανται με το συμπλήρωμά τους**. Για να βρούμε το συμπληρωματικό ενός αριθμού, ξεκινάμε από την προσημασμένη του μορφή ως θετικού αριθμού και προσδιορίζουμε το συμπλήρωμά του με τις προηγούμενες μεθόδους. Παραδείγματα:

Δεκαδικό	**Προσημασμένο Μέτρο**	**Συμπλήρωμα ως προς 2**	**Συμπλήρωμα ως προς 1**
+5	0,0101	0,0101	0,0101
-5	1,0101	1,1011	1,1010
+4	0,0100	0,0100	0,0100
-4	1,0100	1,1100	1,1011

8. Πρόσθεση Αριθμών στο Συμπλήρωμα-2

Όταν η αφαίρεση πραγματοποιείται στο 10δικό σύστημα (και σε προσημασμένο σύστημα), ο αριθμός με το μικρότερο μέτρο αφαιρείται από τον αριθμό με το μεγαλύτερο και το πρόσημο του αποτελέσματος είναι αυτό του μεγαλύτερου αριθμού. Τέτοιες συγκρίσεις δε χρειάζεται να γίνουν όταν οι αριθμοί πραγματοποιούνται στο σύστημα συμπληρώματος.

Στην πρόσθεση στο συμπλήρωμα-2, το κρατούμενο που παράγεται από το MSB αγνοείται. Το bit πρόσημου του αποτελέσματος πρέπει να είναι το ίδιο με αυτό των τελεστών όταν αυτοί έχουν το ίδιο πρόσημο. Αν δεν είναι το ίδιο, το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο από αυτό που μπορεί να αναπαρασταθεί από το δεδομένο πλήθος bits, οπότε προκαλείται υπερχείλιση.

Όταν τα πρόσημα των τελεστών είναι διαφορετικά, ένα κρατούμενο από το bit πρόσημου υποδεικνύει θετικό αποτέλεσμα. Αν δεν παραχθεί κρατούμενο, το αποτέλεσμα είναι αρνητικό και πρέπει να συμπληρωθεί για να πάρουμε την προσημασμένη μορφή. Το bit πρόσημου συμμετέχει στην αριθμητική. Παραδείγματα:

Δεκαδικό	**Προσημασμένο Μέτρο**	**Συμπλήρωμα ως προς 2**
4	0,0100	0,0100
+5	0,0101	0,0101
		0,1001 = 9

Εδώ η προσημασμένη μορφή και το συμπλήρωμα-2 είναι ίδια, γιατί και οι δύο αριθμοί είναι θετικοί. Στην πρόσθεση στο συμπλήρωμα-2, το bit προσήμου, συμμετέχει στη διαδικασία της πρόσθεσης και θεωρείται ότι έχει αξία-θέσης.

Δεκαδικό	**Προσημασμένο Μέτρο**	**Συμπλήρωμα ως προς 2**
5	0,0101	0,0101
-4	1,0100	1,1100
		10,0001 = 1

Εδώ ο αρνητικός αριθμός αναπαρίσταται ως συμπλήρωμα ως προς 2 και οι δυο αριθμοί προστίθενται. Το bit προσήμου συμμετέχει στη διαδικασία της πρόσθεσης. Υπάρχει κρατούμενο από το bit προσήμου, το οποίο αγνοούμε, Το bit προσήμου είναι 0 που σημαίνει ότι το αποτέλεσμα είναι θετικό.

Δεκαδικό	**Προσημασμένο Μέτρο**	**Συμπλήρωμα ως προς 2**
4	0,0100	0,0100
-5	1,0101	1,1011
		1,1111 = $-(0001)_2$ = -1

Εδώ δεν παράγεται κρατούμενο από την MSB θέση κατά τη διάρκεια της πρόσθεσης. Το αποτέλεσμα είναι αρνητικό επειδή το bit προσήμου είναι 1. Το αποτέλεσμα είναι στη συμπληρωματική του μορφή και πρέπει να ξανασυμπληρωθεί για να το πάρουμε στην αναπαράσταση προσημασμένου μέτρου.

Δεκαδικό	**Προσημασμένο Μέτρο**	**Συμπλήρωμα ως προς 2**
-5	1,0101	1,1011
-4	1,0100	1,1100
		11,0111 = $-(1001)_2$ = -9

Εδώ αγνοούμε το κρατούμενο υπερχείλισης. Επειδή το αποτέλεσμα είναι αρνητικό, το συμπληρώνουμε ξανά για να πάρουμε την αναπαράσταση προσημασμένου μέτρου.

9. Πρόσθεση Αριθμών στο Συμπλήρωμα-1

Το χαρακτηριστικό εδώ είναι ότι το κρατούμενο που παράγεται από το bit πρόσημου προστίθεται στο LSB του αποτελέσματος για να συμπληρωθεί η πρόσθεση. Παραδείγματα:

Δεκαδικό	**Προσημασμένο Μέτρο**	**Συμπλήρωμα ως προς 1**
5	0,0101	0,0101
-4	1,0100	1,1011
		10,0000
		+ 1
		0,0001

Εδώ προσθέτουμε ξανά στο LSB το 1 που υπερχείλισε.

Δεκαδικό	**Προσημασμένο Μέτρο**	**Συμπλήρωμα ως προς 2**
4	0,0100	0,0100
-5	1,0101	1,1010
		1,1110 = $-(0001)_2$ = -1

Εδώ δεν υπάρχει υπερχείλιση. Επειδή ο αριθμός είναι αρνητικός τον συμπληρώνουμε για να πάρουμε την αναπαράσταση προσημασμένου μέτρου.

10. Ασκήσεις

1. **Να υπολογιστεί το συμπλήρωμα ως προς 1 και ως προς 2, των δυαδικών αριθμών που φαίνονται στη συνέχεια. a) 11101010 b) 01111110 c) 00000001 d) 10000000 e) 00000000**

Λύση.

Για να βρούμε το συμπλήρωμα ως προς 1, αλλάζουμε κάθε 1 σε 0 και κάθε 0 σε 1.

Για να βρούμε το συμπλήρωμα ως προς 2, αλλάζουμε κάθε 1 σε 0 και κάθε 0 σε 1 και στη συνέχεια προσθέτουμε 1 στο λιγότερο σημαντικό ψηφίο.

a)

	11101010
1's complement :	00010101
2's complement :	00010110

b)

	01111110
1's complement :	10000001
2's complement :	10000010

c)

	00000001
1's complement :	01111110
2's complement :	11111111

d)

	10000000
1's complement :	01111111
2's complement :	10000000

e)

	00000000
1's complement :	11111111
2's complement :	100000000

2. **Να πραγματοποιηθεί η αφαίρεση των επόμενων δυαδικών αριθμός χρησιμοποιώντας το συμπλήρωμα ως προς**

2 του αφαιρέτη και κάνοντας πρόσθεση. Όπου το αποτέλεσμα είναι αρνητικός αριθμός, να του γίνει συμπλήρωμα ως προς 2 για να μετατραπεί σε σύστημα προσημασμένου μέτρου. a) 11011-11001 b)110100 -10101 c)1011-110000 d)101010-101011

Λύση.

a)

$X = 11011 \quad Y = 11001$

$$\begin{aligned} X &= \quad 11011 \\ 2's\ Complement\ of\ Y &= +\ \underline{00111} \\ Sum &= \quad 100010 \\ Discard\ end\ carry\ 2^5 &= -\ \underline{100000} \\ Answer:\ X - Y &= \quad 00010 \end{aligned}$$

b)

$X = 110100 \quad Y = 10101$

$$\begin{aligned} X &= \quad 110100 \\ 2's\ Complement\ of\ Y &= +\ \underline{101011} \\ Sum &= \quad 1011111 \\ Discard\ end\ carry\ 2^5 &= -\ \underline{1000000} \\ Answer:\ X - Y &= \quad 011111 \end{aligned}$$

c)

$X = 1011 \quad Y = 110000$

$$\begin{aligned} X &= \quad 1011 \\ 2's\ Complement\ of\ Y &= +\ \underline{010000} \\ Sum &= \quad 011011 \\ There\ is\ no\ end\ carry & \\ Answer:\ Y - X &= -\ 100101 \end{aligned}$$

d)

$X = 101010 \quad Y = 101011$

$$\begin{aligned} X &= \quad 101010 \\ 2's\ Complement\ of\ Y &= +\ \underline{010101} \\ Sum &= \quad 111111 \\ There\ is\ no\ end\ carry & \\ Answer:\ Y - X &= -\ 000001 \end{aligned}$$