7. ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΧΑΡΤΗ KARNAUGH

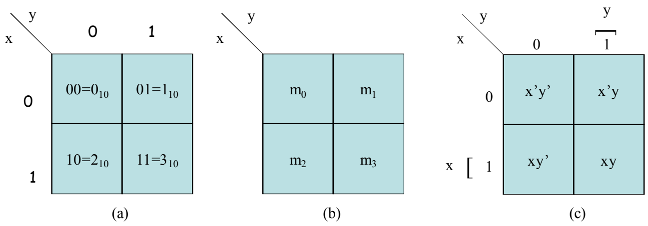
1. Εισαγωγή

Η μέθοδος απλοποίησης συναρτήσεων λογικής με **χάρτη Karnaugh** (**ΧΚ**), σε αντίθεση με την άλγεβρα Boole δίνει γρήγορα την απλούστερη μορφή των λογικών συναρτήσεων, ειδικά όταν η συνάρτηση έχει μέχρι 6 μεταβλητές.

Ο ΧΚ αποτελείται από τετράγωνα, ένα για κάθε όρο της συνάρτησης, επομένων το πλήθος τους δίνεται από τη σχέση: πλήθος = 2n, όπου n το πλήθος των μεταβλητών της συνάρτησης.

Ο ΧΚ είναι ισοδύναμος σε πληροφορία με τον πίνακα αληθείας της συνάρτησης λογικής. Ωστόσο, είναι ευκολότερο να κάνουμε απλοποιήσεις πάνω στην κανονική μορφή της συνάρτησης λογικής μέσω του ΧΚ, παρά μέσω του πίνακα αληθείας της.

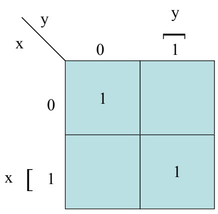
Π.χ. στην **Εικόνα 1** έχουμε ένα παράδειγμα ΧΚ με δύο μεταβλητές x και y. Οι τιμές της μεταβλητής x τοποθετήθηκαν ανά γραμμή και οι τιμές της μεταβλητής y ανά στήλη. Κάθε τετράγωνο αντιστοιχεί σε έναν ελαχιστόρο ή μεγιστόρο της συνάρτησης λογικής.



Εικόνα 1. Παράδειγμα χάρτη Karnaugh όπου σημειώνονται και οι αντιστοιχίες των τετραγώνων για δύο μεταβλητές.

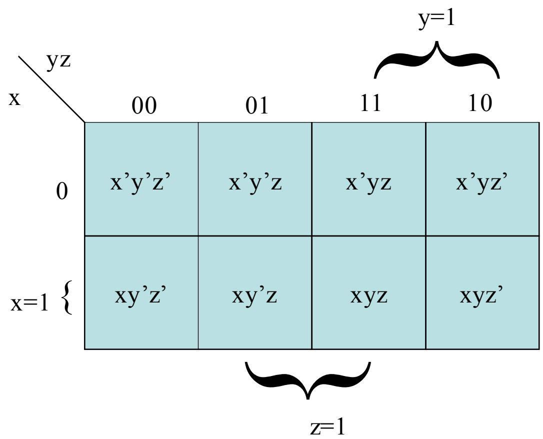
Στην **Εικόνα 2** φαίνεται ένα παράδειγμα μετασχηματισμού του πίνακα αληθείας μιας συνάρτησης F(x,y) σε ΧΚ. Αν επιθυμούμε υλοποίηση της συνάρτησης με ελαχιστόρους, τότε στα τετράγωνα του ΧΚ τοποθετούμε τους 1 μόνο. Αν επιθυμούμε υλοποίηση με μεγιστόρους, στα τεράγωνα του ΧΚ τοποθετούμε τα 0 μόνο.

i	x	y	F	mi
0	0	0	1	x'y'
1	0	1	0	x'y
2	1	0	0	xy'
3	1	1	1	xy



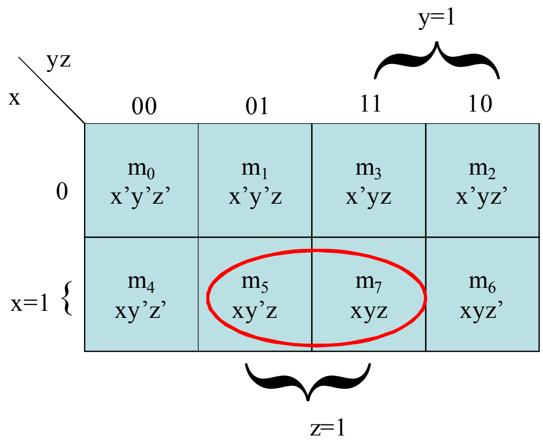
Εικόνα 2. Αντιστοιχία μεταξύ πίνακα αληθείας και ΧΚ για μια λογική συνάρτηση 2 μεταβλητών.

Στην **Εικόνα 3** φαίνεται ένας ΧΚ τριών μεταβλητών. Οποιαδήποτε δύο τετράγωνα στο χάρτη, διαφέρουν κατά μία μόνο μεταβλητή, η οποία εμφανίζεται σαν το συμπλήρωμα της στο ένα τετράγωνο και με την πραγματική της τιμή στο άλλο. Για το λόγο αυτό υπάρχει αυτή η «ανωμαλία» στη μέτρηση από 01 σε 11 σε 10, αντί για 01, 10, 11.



Εικόνα 3. ΧΚ τριών μεταβλητών.

Με βάση τα θεωρήματα της άλγεβρας Boole, έπεται ότι το άθροισμα δύο ελαχιστόρων σε γειτονικά τετράγωνα μπορεί να απλοποιηθεί σε έναν όρο AND με δύο μόνο παράγοντες. Π.χ. στην **Εικόνα 4** φαίνεται ένα παράδειγμα απλοποίησης γειτονικών όρων. Περισσότερα για τις απλοποιήσεις στο ΧΚ θα πούμε στη συνέχεια.



$m_5 + m_7 = xy'z + xyz = xz(y'+y) = xz$

Εικόνα 4. Παράδειγμα απλοποίησης γειτονικών όρων σε ΧΚ τριών μεταβλητών.

Οποιοιδήποτε δύο ελαχιστόροι σε γειτονικά τετράγωνα που σχετίζονται μεταξύ τους με τη λογική πράξη OR, δικαιολογούν μια απομάκρυνση της διαφορετικής μεταβλητής. Όλη η διαδικασία για την απλοποίηση μιας λογικής συνάρτησης εκτελείται σε πέντε βήματα.

1. Φέρνουμε τη συνάρτηση λογικής σε κανονική

μορφή. Δηλαδή σε μορφή αθροίσματος γινομένων (ελαχιστόρων) ή σε μορφή γινομένου αθροισμάτων (μεγιστόρων). Αν δηλαδή η αρχική συνάρτηση λογικής δεν είναι σε τέτοια μορφή, θα πρέπει να τη μετατρέψουμε, προσθέτοντας σε κάθε όρο (για τη μορφή ελαχιστόρων) ή πολλαπλασιάζοντας κάθε όρο(για τη μορφή μεγιστόρων) τη μεταβλητή που λείπει. Π.χ. αν λείπει η μεταβλητή X από την έκφραση της λογικής συνάρτησης και η λογική συνάρτηση είναι εκφρασμένη ως άθροισμα γινομένων, τότε πρέπει να προσθέσουμε σε κάθε όρο της συνάρτησης αυτής το X·X'. Αν η μορφή της λογικής συνάρτησης είναι εκφρασμένη ως γινόμενο αθροισμάτων, τότε θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο της με το (X+X').

2. Υπολογίζουμε το πλήθος των τετραγώνων του ΧΚ από τη σχέση πλήθος = 2^n, όπου n το πλήθος των μεταβλητών της συνάρτησης. Για n = 2, 3, 4, 5 και 6, θα χρειαστούμε αντίστοιχα 4, 8, 16, 32 και 64 τετράγωνα αντίστοιχα.
3. Κάθε συνδυασμός των μεταβλητών αντιστοιχεί σε ένα τετράγωνο του ΧΚ. Τοποθετούμε την προς απλοποίηση συνάρτηση στον ΧΚ ως εξής: Βάζουμε 1 στο αντίστοιχο τετράγωνο αν η συνάρτηση λογικής είναι εκφρασμένη ως άθροισμα γινομένων ή 0 αν είναι εκφρασμένη ως γινόμενο αθροισμάτων. Τυχόν αδιάφορους όρους τους σημειώνουμε με X ή d.
4. Μετά τη συμπλήρωση του ΧΚ και ανάλογα με τη λογική που θα χρησιμοποιήσουμε στην κατασκευή του λογικού κυκλώματος, σχηματίζουμε ομάδες γειτονικών διαδοχικών τετραγώνων, σχήματος ορθογωνίου, τετραγώνου ή «κύβου», με μονάδες ή μηδενικά, ακολουθώντας τους παρακάτω κανόνες:
    a. Να ληφθούν υπόψη όλες οι μονάδες ή όλα τα μηδενικά.
    b. Το πλήθος των μονάδων ή μηδενικών των ομάδων υπακούει στη σχέση $m=2^k$, όπου k=0,1,2,3,4,5,... .
    c. Οι ομάδες να είναι όσο το δυνατό λιγότερες και ταυτόχρονα όσο το δυνατό μεγαλύτερου πλήθους τετραγώνων.
    d. Οι αδιάφοροι όροι χρησιμοποιούνται είτε ως μονάδες είτε ως μηδενικά ανάλογα με την έκφραση της αρχικής συνάρτησης λογικής.
    e. Κάθε μονάδα ή μηδενικό ή αδιάφορος όρος χρησιμοποιείται όσες φορές χρειάζεται στις ομάδες ώστε να πετύχουμε τη μεγαλύτερη και καλύτερη απλοποίηση.
5. Από τις ομάδες που σχηματίσαμε εξάγουμε την απλοποιημένη συνάρτηση λογικής που είναι και η τελική έκφραση της αρχικής συνάρτησης λογικής.

Το τελευταίο βήμα είναι να σχεδιάσουμε το κύκλωμα της απλοποιημένης συνάρτησης λογικής. Αν είναι εκφρασμένη ως άθροισμα γινομένων, το κύκλωμα σχεδιάζεται με λογική σχεδίασης AND-OR ή NAND. Αν είναι εκφρασμένη ως γινόμενο αθροισμάτων, το κύκλωμα σχεδιάζεται με λογική σχεδίασης OR-AND ή NOR.

2. Ελλιπώς οριζόμενες λογικές συναρτήσεις – Αδιάφοροι όροι

Πρακτικά, μερικές λογικές συναρτήσεις δεν ορίζονται για όλους τους συνδυασμούς των μεταβλητών εισόδου. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η έξοδος είναι αδιάφορη και συμβολίζεται με d. Στον πίνακα Karnaugh, τα d μπορεί να θεωρηθούν ως 1 ή 0 στις απλοποιήσεις, ανάλογα με το τι μας βολεύει.

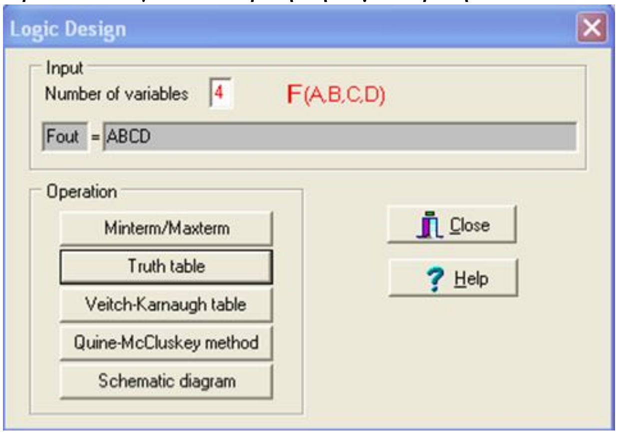
3. Παραγωγή απλοποιημένης λογικής συνάρτησης με το εργαλείο Logic Design του TINA

Οι απλοποιημένες συναρτήσεις Boole που βγάζαμε από το χάρτη σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα ήταν σε μορφή αθροίσματος γινομένων. Με μια μικρή τροποποίηση, μπορούμε να παίρνουμε γινόμενα αθροισμάτων. Η διαδικασία για την απλοποίηση συναρτήσεων σε μορφή γινομένου αθροισμάτων βγαίνει από τις βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων Boole. Οι άσσοι που βάζουμε στα τετράγωνα του χάρτη παριστάνουν του ελαχιστόρους της συνάρτησης. Η ελαχιστόροι που δεν περιέχονται στη συνάρτηση δίνουν το συμπλήρωμα της συνάρτησης. Δηλαδή το συμπλήρωμα της συνάρτησης παριστάνεται στο χάρτη από τα τετράγωνα που δεν είναι συμπληρωμένα με 1. Αν σημειώσουμε με 0 τα άδεια τετράγωνα και τα συνδυάσουμε με γειτονικά τετράγωνα, παίρνουμε μια απλοποιημένη έκφραση του συμπληρώματος της συνάρτησης, δηλαδή της F'. Το συμπλήρωμα της F' μας δίνει πάλι την ίδια την F. Λόγω του γενικευμένου θεωρήματος De Morgan, η συνάρτηση που παίρνουμε βρίσκεται έτσι αυτόματα σε μορφή γινομένου αθροισμάτων.

Έστω ότι θέλουμε να απλοποιήσουμε την επόμενη λογική συνάρτηση που δίνεται ως άθροισμα ελαχιστόρων και ζητάμε και τη μορφή της ως γινόμενο μεγιστόρων.

F(A,B,C,D) = Σ(0,1,2,5,8,9,10)

Πρόκειται για συνάρτηση 4 μεταβλητών.



Εικόνα 5. Εκκίνηση του Logic Design και εισαγωγή του πλήθους μεταβλητών της λογικής συνάρτησης.

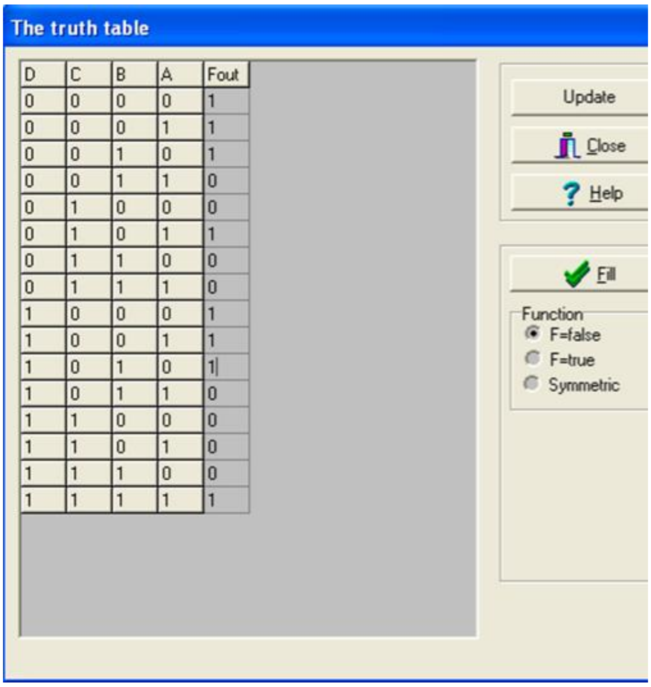
Από το μενού επιλογών του TINA διαλέγουμε **Tools ➔ Logic Design**. Στο παράθυρο που αναδύεται επιλέγουμε το πλήθος των μεταβλητών της συνάρτησης (Number of variables) ίσο με 4. (**Εικόνα 5**).

Στη συνέχεια πατάμε στο πλήκτρο Truth table και συμπληρώνουμε στον πίνακα αληθείας τους 1 στις θέσεις 0, 1, 2, 5, 8, 9, 10 και αμέσως μετά πατάμε το πλήκτρο Update για να οριστικοποιήσουμε τις αλλαγές μας (**Εικόνα 6**).

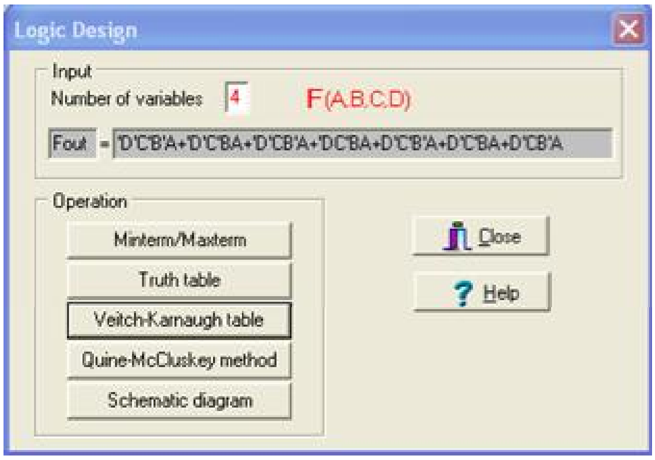
Αμέσως μετά το πάτημα του Update, παρατηρούμε ότι η Fout αλλάζει στην κανονική μορφή της συνάρτησης όπως προκύπτει από τον πίνακα αληθείας (μια παρατήρηση εδώ είναι ότι οι αξίες στα σύμβολα είναι D, C, B, A και όχι με τη σειρά A, B, C, D, που θεωρούμε συνήθως) (**Εικόνα 7**).

Πατώντας **Minterm/Maxterm**, βλέπουμε διάφορες πληροφορίες για τη λογική συνάρτηση, όπως την απλοποιημένη μορφή ελαχιστόρων (Simplified minterm) ή την απλοποιημένη μορφή μεγιστόρων (Simplified maxterm) (**Εικόνα 8**).

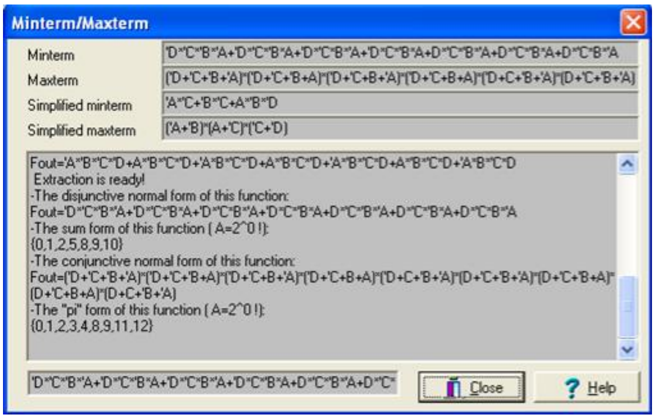
Πατώντας **Veitch – Karnaugh table** παράγεται ο ΧΚ και οι απλοποιήσεις της λογικής συνάρτησης. Για ελαχιστόρους πρέπει να έχουμε κάνει κλικ στο Minterm (**Εικόνα 9**). Για μεγιστόρους πρέπει να έχουμε κάνει κλικ στο Maxterm (**Εικόνα 10**).



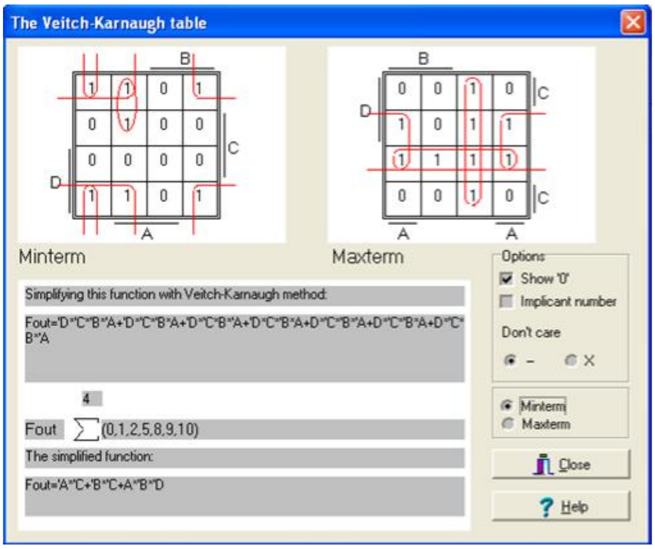
Εικόνα 6. Εισαγωγή των στοιχείων 1 και 0 στον πίνακα αληθείας. Προσοχή: πρέπει να πατήσουμε το Update για να γίνει η ανανέωση.



Εικόνα 7. Μετά το πάτημα του Update, στην αρχική εικόνα του Logic Design παρουσιάζεται η κανονική μορφή της λογικής συνάρτησης ως άθροισμα ελαχιστόρων.

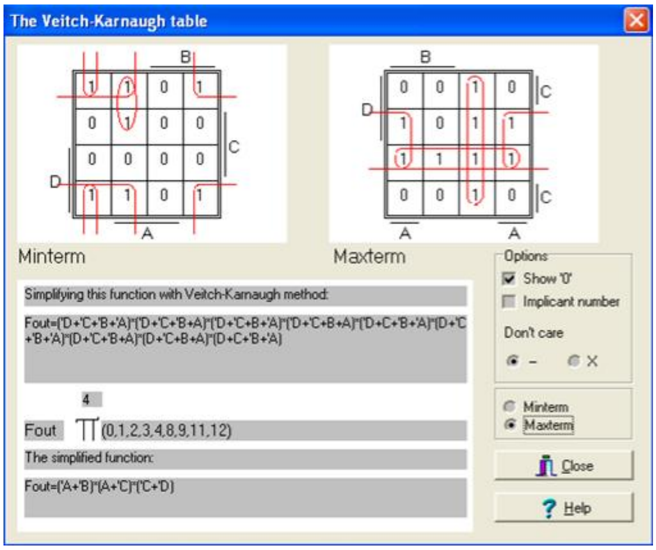


Εικόνα 8. Πατώντας Minterm/Maxterm, βλέπουμε διάφορες πληροφορίες για τη λογική συνάρτηση.

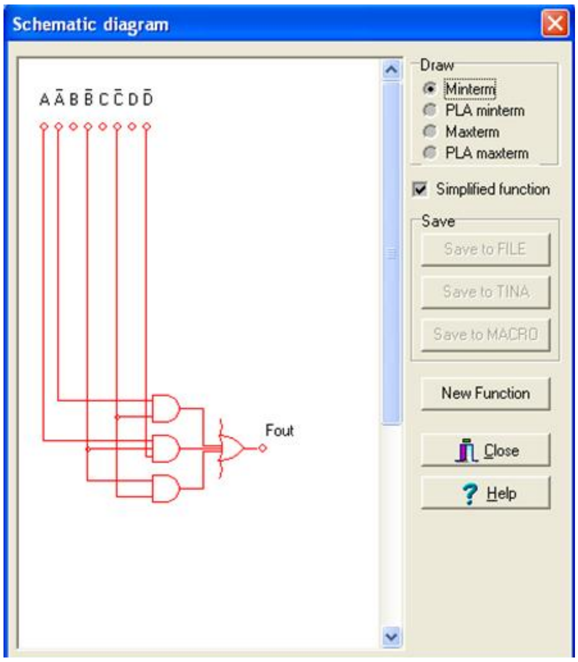


Εικόνα 9. Πατώντας Veitch – Karnaugh table παράγεται ο ΧΚ και οι απλοποιήσεις της λογικής συνάρτησης. Για ελαχιστόρους πρέπει να έχουμε κάνει κλικ στο Minterm.

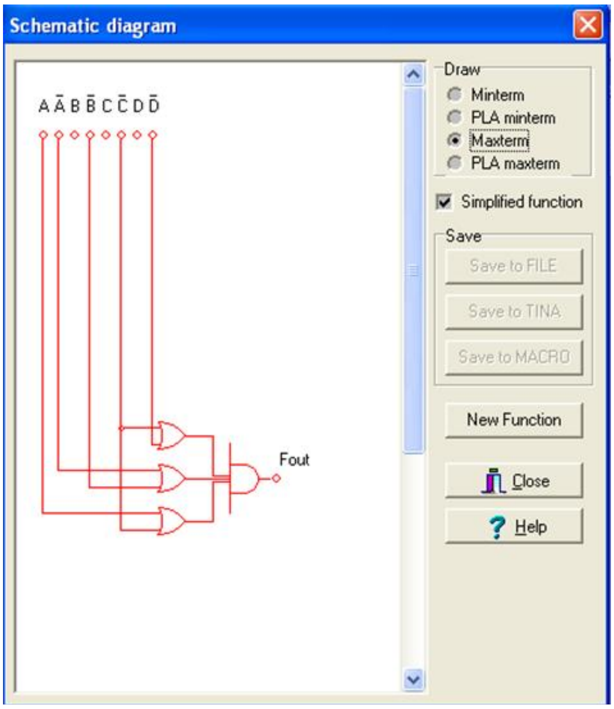
Πατώντας **Schematic Diagram** και στη συνέχεια με κλικ στο **Minterm** έχουμε το λογικό διάγραμμα της απλοποιημένης μορφής της συνάρτησης λογικής **(Εικόνα 11)**. Με κλικ στο **Maxterm** έχουμε το λογικό διάγραμμα της απλοποιημένης μορφής της συνάρτησης λογικής (**Εικόνα 12**).



Εικόνα 10. Πατώντας Veitch – Karnaugh table παράγεται ο ΧΚ και οι απλοποιήσεις της συνάρτησης λογικής. Για μεγιστόρους πρέπει να έχουμε κάνει κλικ στο Maxterm.



Εικόνα 11. Πατώντας Schematic Diagram και στη συνέχεια με κλικ στο Minterm έχουμε το λογικό διάγραμμα της απλοποιημένης μορφής της συνάρτησης λογικής.

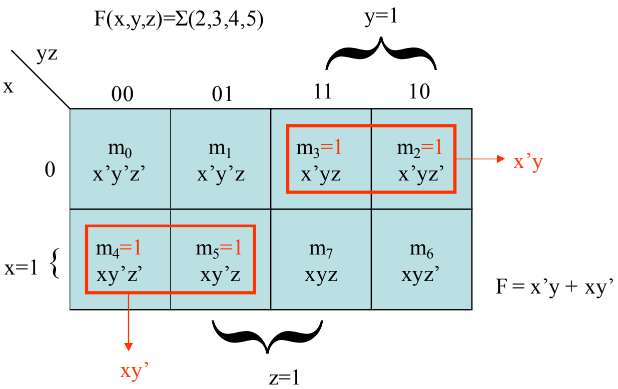


Εικόνα 12. Πατώντας Schematic Diagram και στη συνέχεια με κλικ στο Maxterm έχουμε το λογικό διάγραμμα της απλοποιημένης μορφής της συνάρτησης λογικής.

4. Ασκήσεις

1. Παράδειγμα απλοποίησης με ΧΚ

Στην **Εικόνα 13** έχουμε το ΧΚ της συνάρτησης F=Σ(2,3,4,5).



Εικόνα 13. ΧΚ της συνάρτησης F=Σ(2,3,4,5).

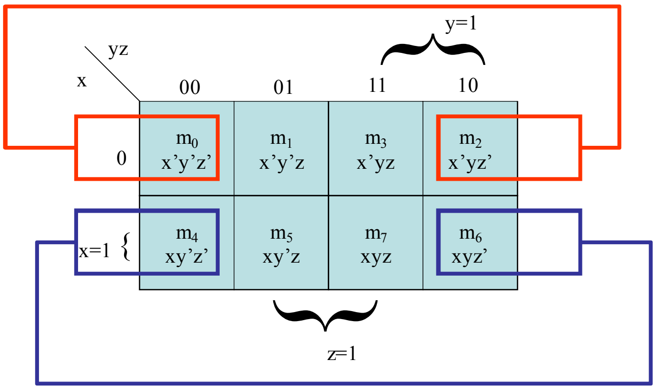
Η απλοποίηση δίνει F = x'y + xy' = XOR(x,y).

2. Παράδειγμα απλοποίησης με ΧΚ

Υπάρχουν περιπτώσεις, όπου δύο τετράγωνα στο χάρτη, θεωρούνται γειτονικά αν δεν «ακουμπούν» μεταξύ τους. Π.χ. το m_0 είναι γειτονικό του m_2 και το m_4 είναι γειτονικό του m_6, γιατί οι ελαχιστόροι αυτοί διαφέρουν κατά μία μεταβλητή. (**Εικόνα 14**)

$m_0 + m_2 = x'y'z' + x'yz' = x'z'(y'+y) = x'z'$

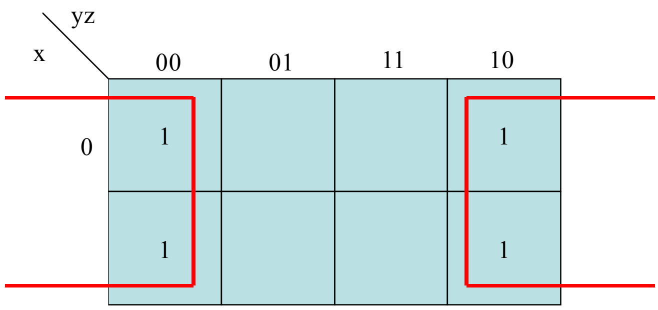
$m_4 + m_6 = xy'z' + xyz' = xz'(y'+y) = xz'$



Εικόνα 14. Υπάρχουν περιπτώσεις, όπου δύο τετράγωνα στο χάρτη, θεωρούνται γειτονικά αν και δεν «ακουμπούν» μεταξύ τους.

Ωστόσο, επειδή και οι τέσσερεις αυτοί όροι, αν είναι 1 μπορούν να ομαδοποιηθούν. Καλύτερη ομάδοποίηση (και έτσι πρέπει να γίνεται) είναι η επόμενη (**Εικόνα 15**):

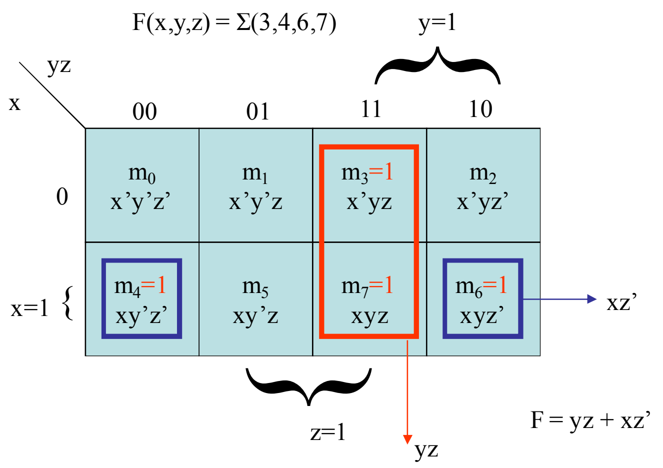
$m_0 + m_2 + m_4 + m_6 = x'z' + xz' = z'(x'+x) = z'$



Εικόνα 15. Οι 4 άσσοι είναι «γείτονες» και μπορούν να απλοποιηθούν.

3. Παράδειγμα απλοποίησης με ΧΚ

Στην **Εικόνα 16** φαίνεται ο ΧΚ της F=Σ(3,4,6,7) που οδηγεί στην απλοποίηση F=yz+xz'.

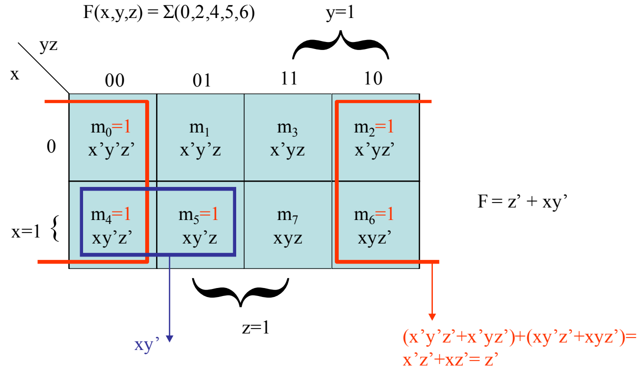


Εικόνα 16. Ο ΧΚ της F=Σ(3,4,6,7) που οδηγεί στην απλοποίηση F=yz+xz'.

4. Παράδειγμα απλοποίησης με ΧΚ

Στην **Εικόνα 17** φαίνεται ο ΧΚ της F=Σ(0,2,4,5,6) και η απλοποίηση της ως F=z'+xy'.

Εδώ συνδυάσαμε κάποιο τετράγωνο δύο φορές. Αυτό δε είναι μόνο επιτρεπτό, αλλά και επιθυμητό. Αυτό σημαίνει ότι ένας ελαχιστόρος μπορεί να εμφανίζεται περισσότερες φορές, στην κανονική μορφή της συνάρτησης λογικής και είναι συνέπεια του θεωρήματος της άλγεβρας Boole: x + x = x.



Εικόνα 17. Ο ΧΚ της F=Σ(0,2,4,5,6) και η απλοποίηση της ως F=z'+xy'.

5. Παράδειγμα απλοποίησης με ΧΚ

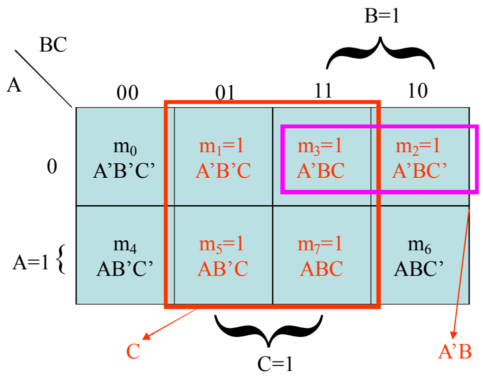
Αν μια συνάρτηση δεν εκφράζεται ως άθροισμα ελαχιστόρων, είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε το χάρτη για να πάρουμε τους ελαχιστόρους της συνάρτησης και μετά να απλοποιήσουμε τη συνάρτηση σε μια έκφραση με ελάχιστο αριθμό όρων. Είναι απαραίτητο να εξασφαλίσουμε ότι η αλγεβρική έκφραση είναι σε μορφή αθροίσματος γινομένων. Κάθε όρος γινομένου μπορεί να αναπαρασταθεί στο χάρτη με ένα, δύο ή περισσότερα τετράγωνα. Οι ελαχιστόροι της συνάρτησης διαβάζονται τότε κατευθείαν από το χάρτη.

Στην **Εικόνα 18** φαίνεται η διαδικασία παραγωγής της κανονικής μορφής, του ΧΚ και της απλοποίησης της συνάρτησης F=A'C+A'B+AB'C+BC, η οποία αρχικά δεν είναι σε κανονική μορφή.

F(A,B,C) = A'C +A'B + AB'C + BC

F(A,B,C) = A'(B'+B)C+A'B(C'+C)+AB'C+(A'+A)BC

F(A,B,C) = A'B'C+A'BC+A'BC'+A'BC+AB'C+A'BC+ABC



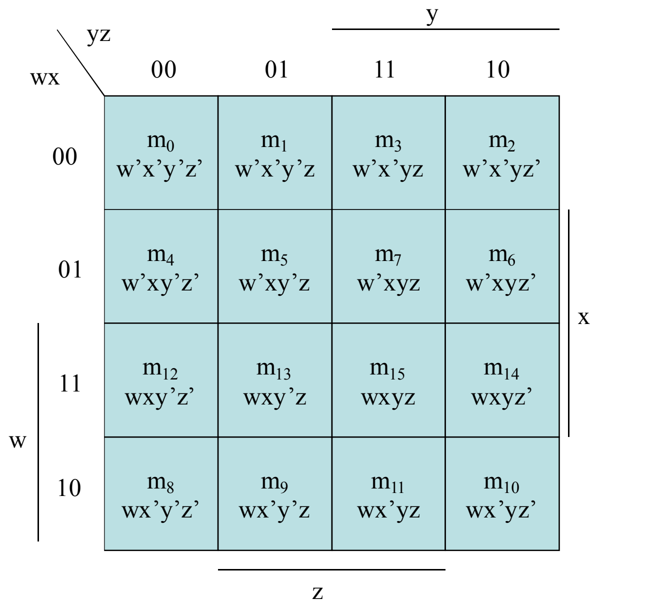
F = Σ(1,2,3,5,7) = C + A'B

Εικόνα 18. Διαδικασία παραγωγής της κανονικής μορφής, του ΧΚ και της απλοποίησης της συνάρτησης F=A'C+A'B+AB'C+BC, η οποία αρχικά δεν είναι σε κανονική μορφή.

6. Παράδειγμα απλοποίησης με ΧΚ

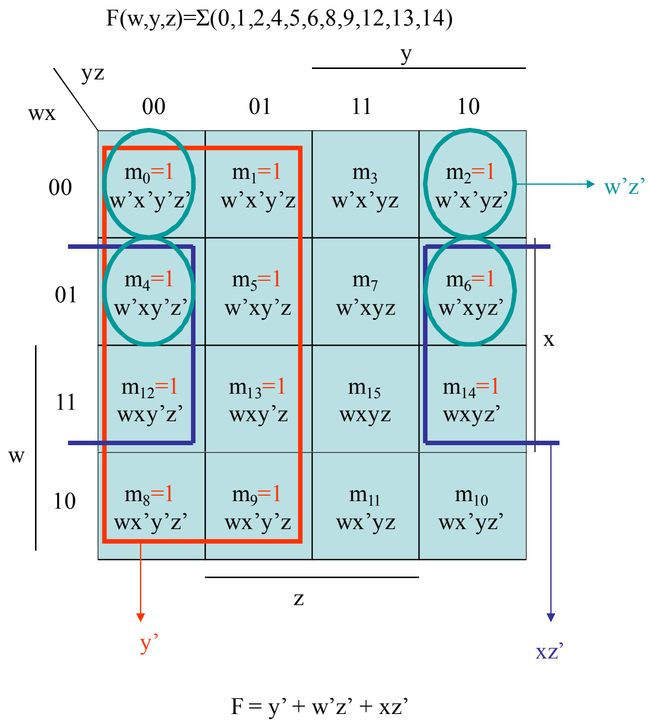
Στην **Εικόνα 19** φαίνεται η τοπολογία ενός ΧΚ 4 μεταβλητών. Για τη διαδικασία της απλοποίησης ισχύουν και εδώ οι ίδιοι κανόνες.

- Γειτονικά τετράγωνα είναι αυτά που είναι το ένα δίπλα στο άλλο, αλλά θεωρούμε επίσης ότι η πάνω ακμή ακουμπάει στην κάτω και η αριστερή στη δεξιά, έτσι ώστε να σχηματίζονται και πάλι γειτονικά τετράγωνα.
- Ένα τετράγωνο αντιστοιχεί σε έναν ελαχιστόρο, δηλαδή ένα γινόμενο 4 παραγόντων.
- Δύο γειτονικά τετράγωνα αντιστοιχούν σε γινόμενο τριών παραγόντων.
- Τέσσερα γειτονικά τετράγωνα αντιστοιχούν σε γινόμενο δύο παραγόντων.
- Οκτώ γειτονικά τετράγωνα παριστούν έναν όρο μιας μοναδικής μεταβλητής.
- Κανένας άλλος συνδυασμός τετραγώνων δε μπορεί να απλοποιήσει τη συνάρτηση.



Εικόνα 19. Τοπολογία ενός ΧΚ 4 μεταβλητών.

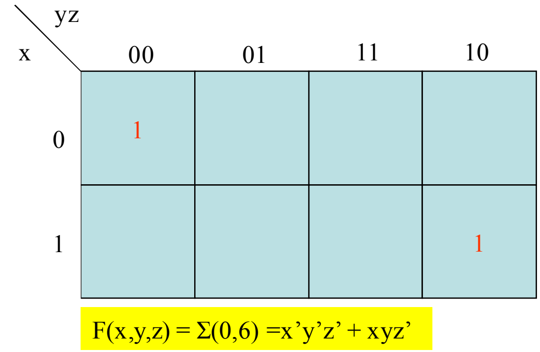
Στην **Εικόνα 20** φαίνεται ο ΧΚ και η απλοποίηση της F=Σ(0,1,2,4,5,6,8,9,12,13,14).



Εικόνα 20. Ο ΧΚ και η απλοποίηση της F=Σ(0,1,2,4,5,6,8,9,12,13,14).

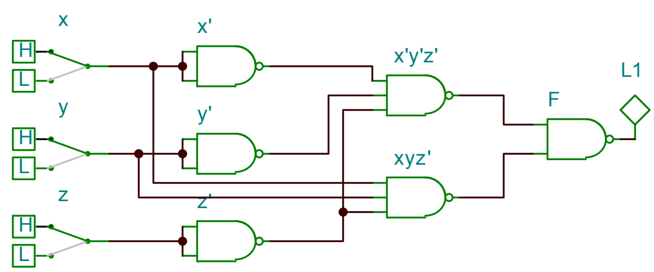
7. Θα υλοποιήσουμε τη συνάρτηση F(x,y,z) = Σ(0,6) με πύλες NAND

Ο ΧΚ και η απλοποίηση σε άθροισμα γινομένων φαίνεται στην **Εικόνα 21.**



Εικόνα 21. Ο ΧΚ και η απλοποίηση σε άθροισμα γινομένων της F(x,y,z) = Σ(0,6).

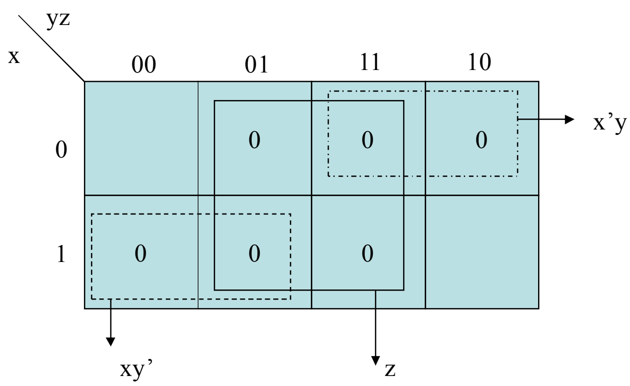
Πρόκειται για διεπίπεδη υλοποίηση στην οποία δεν υπάρχει όρος που να εισέρχεται στο 2ο επίπεδο πυλών. Συνεπώς μπορούμε να αντικαταστήσουμε κάθε όρο με την αντίστοιχη NAND υλοποίηση του και να τους οδηγήσουμε σε πύλη NAND, όπως φαίνεται στην **Εικόνα 22**.



Εικόνα 22. Υλοποίηση με NAND της F = Σ(0,6).

8. Θα υλοποιήσουμε τη συνάρτη F(x,y,z) = Σ(0,6) με πύλες NOR

Ο ΧΚ και η απλοποίηση σε άθροισμα γινομένων φαίνεται στην **Εικόνα 23.**



Εικόνα 23. Ο ΧΚ και η απλοποίηση σε

γινόμενο αθροισμάτων της F(x,y,z) = Σ(0,6) = [Π(1,2,3,4,5,7)]’.

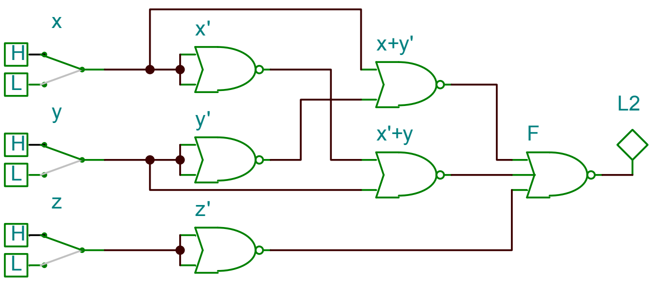
F(x,y,z) = Σ(0,6) =x’y’z’ + xyz’

Πρόκειται για διεπίπεδη υλοποίηση στην οποία δεν υπάρχει όρος που να εισέρχεται στο 2ο επίπεδο πυλών. Συνεπώς μπορούμε να αντικαταστήσουμε κάθε όρο με την αντίστοιχη NOR υλοποίηση του και να τους οδηγήσουμε σε πύλη NOR.

Εναλλακτικά:

F(x,y,z) = Π(1,2,3,4,5,7) = (x’y + xy’ + z)’ = (x+y’) (x’+y) z’

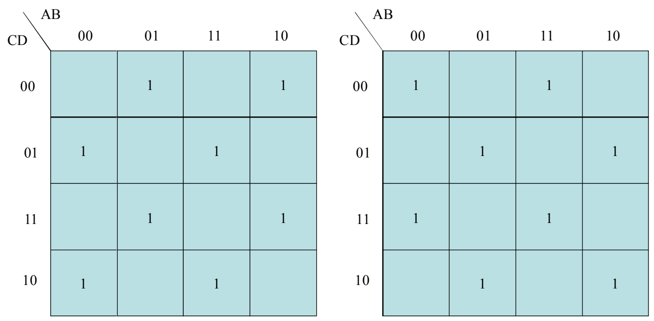
Η αντίστοιχη NOR φαίνεται στην **Εικόνα 24.**



Εικόνα 24. Υλοποίηση με NOR της F = Σ(0,6).

9. Παράδειγμα απλοποίησης με ΧΚ. Πύλες XOR και EQUIVALENCE

Στις πύλες XOR και EQUIVALENCE τα σχέδια των 1 στους ΧΚ, είναι πάντα σε εναλλασσόμενες διαγωνίου,ς όπως φαίνεται στην **Εικόνα 25** για 4 μεταβλητές. Η αναγνώριση αυτού του μορφώματος (pattern) μας βοηθά στη σχεδίαση κυκλωμάτων με XOR πύλες.

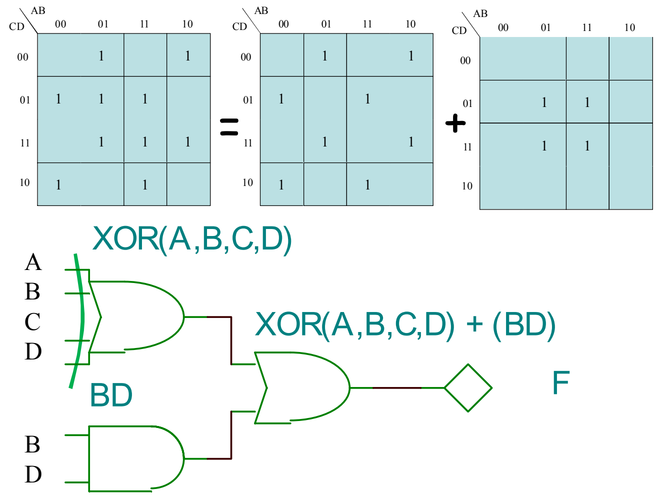


$XOR(A,B,C,D) \equiv A \oplus B \oplus C \oplus D$

$EQUIVALENCE(A,B,C,D) \equiv A \odot B \odot C \odot D$

Εικόνα 25. ΧΚ για XOR και EQUIVALENCE 4 μεταβλητών.

Στην **Εικόνα 26** φαίνεται ο τρόπος υλοποίησης του κυκλώματος που περιγράφεται με το ΧΚ με διαμερισμό του σε «άθροισμα» δύο επιμέρους ΧΚ.



Εικόνα 26. Διαμερισμός ΧΚ σε «άθροισμα» επιμέρους ΧΚ.

10. BCD αναπαράσταση με 4bit

Η BCD μορφή της εισόδου εδώ είναι 4bit. Η συγκεκριμένη F δε χρησιμοποιεί τις εισόδους 10-15.

m_i	w	x	y	z	F
0	0	0	0	0	**1**
1	0	0	0	1	**0**
2	0	0	1	0	**1**
3	0	0	1	1	**0**
4	0	1	0	0	**1**
5	0	1	0	1	**0**
6	0	1	1	0	**1**
7	0	1	1	1	**0**
8	1	0	0	0	**1**
9	1	0	0	1	**0**
10	1	0	1	0	**d**
11	1	0	1	1	**d**
12	1	1	0	0	**d**
13	1	1	0	1	**d**
14	1	1	1	0	**d**
15	1	1	1	1	**d**

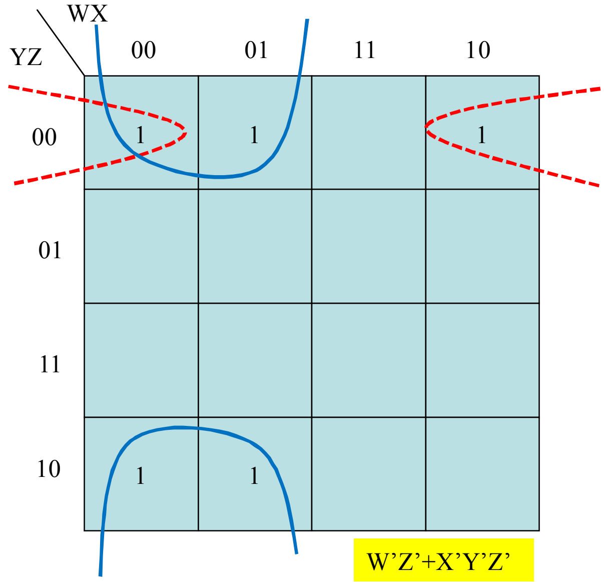
Πίνακας 1. BCD αναπαράσταση με 4bit.

F(w,x,y,z)=Σ(0,2,4,6,8)+d(10,11,12,13,14,16) =

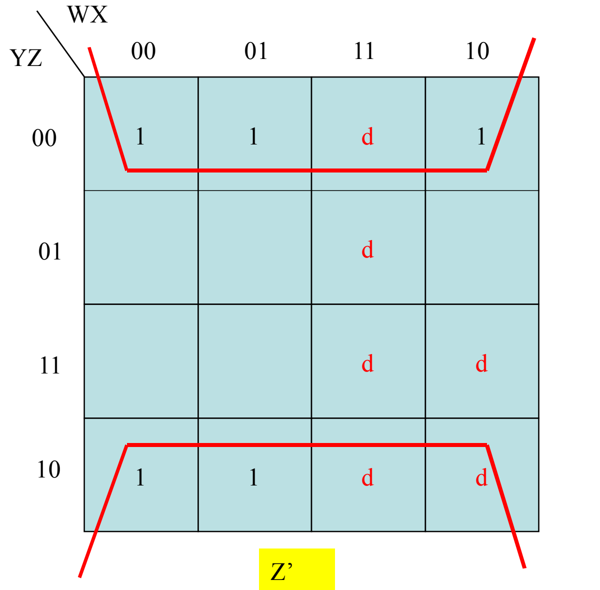
Π(1,3,5,7,9) + d(10,11,12,13,14,16)

Χωρίς τη χρήση των αδιάφορων – όρων: **Εικόνα 27.**

Χρησιμοποιώντας τους αδιάφορους – όρους: **Εικόνα 28.**



Εικόνα 27. ΧΚ χωρίς τη χρήση των αδιάφορων – όρων.



Εικόνα 28. ΧΚ με τη χρήση των αδιάφορων – όρων.

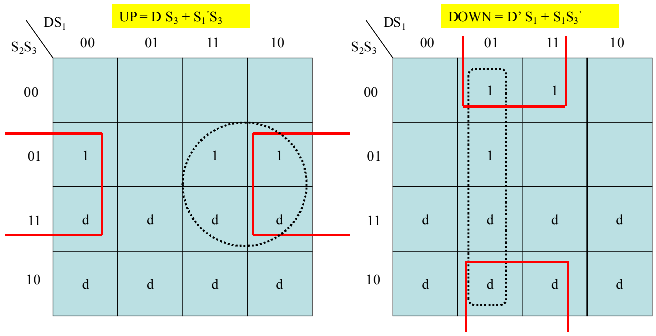
11. **Να σχεδιάσετε ένα κύκλωμα λήψης απόφαση για τη λειτουργία ενός ανελκυστήρα. Η λειτουργία του κυκλώματος πρέπει να παρέχει δύο εξόδους – UP , DOWN- που να δείχουν την κατεύθυνση κίνησης του ανελκυστήρα. Έστω ότι το κτήριο έχει 3 ορόφους. Η είσοδος του κυκλώματος είναι το σήμα κατεύθυνσης D το οποίο αν είναι 1 ο ανελκυστήρας πρέπει να πάει πάνω (UP) ενώ αν είναι 0 πρέπει να πάει κάτω (DOWN). Επίσης χρειάζονται 3 σήματα εισόδου S1, S2, S3 για την υπόδειξη του ορόφου κατεύθυνσης. Ο επόμενος πίνακας αληθείας αναφέρεται στη λειτουργία του κυκλώματος όταν βρίσκεται στον όροφο 2.**

Λύση.

Εικόνα 29. Είσοδοι / έξοδοι κυκλώματος λήψης απόφασης λειτουργίας ανελκυστήρα.

m_i	D	S1	S2	S3	UP	DOWN
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0
2	0	0	1	0	d	d
3	0	0	1	1	d	d
4	0	1	0	0	0	1
5	0	1	0	1	0	1
6	0	1	1	0	d	d
7	0	1	1	1	d	d
8	1	0	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1	0
10	1	0	1	0	d	d
11	1	0	1	1	d	d
12	1	1	0	0	0	1
13	1	1	0	1	1	0
14	1	1	1	0	d	d
15	1	1	1	1	d	d

Πίνακας 2. Πίνακας αληθείας, κυκλώματος λήψης απόφασης λειτουργίας ανελκυστήρα.



Εικόνα 30. ΧΚ για τις εξόδους UP και DOWN.

12. Απλοποιήστε τις επόμενες συναρτήσεις με ΧΚ τριών μεταβλητών: a) F(x,y,z) = Σ(0,2,6,7), b) F(A,B,C) = Σ(0,2,3,4,6), c) F(a,b,c)= Σ(0,1,2,3,7), d) F(x,y,z)= Σ(3,5,6,7).

Λύση.
F(x,y,z)=Σ(0,2,6,7).

X \ YZ	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1

F= XY + X'Z'.
F(A,B,C)=Σ(0,2,3,4,6)

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	0	0	1

F= A'B + C'.
F(a,b,c)=Σ(0,1,2,3,7)

a \ bc	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0

F=a'+bc.

F(x,y,z)= Σ(3,5,6,7)

X \ YZ	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

F= XY + XZ+ YZ.

13. Απλοποιήστε τις επόμενες συναρτήσεις με ΧΚ τριών μεταβλητών: F(X,Y,Z)= Σ(2,3,6,7), F(A,B,C,D)= Σ(4,6,7,15), F(A,B,C,D)= Σ(4,6,7,15), F(A,B,C,D)= Σ(3,7,11,13,14,15)

Λύση.
F(X,Y,Z)= Σ(2,3,6,7)

X \ YZ	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1

F=Y
F(A,B,C,D)= Σ(4,6,7,15)

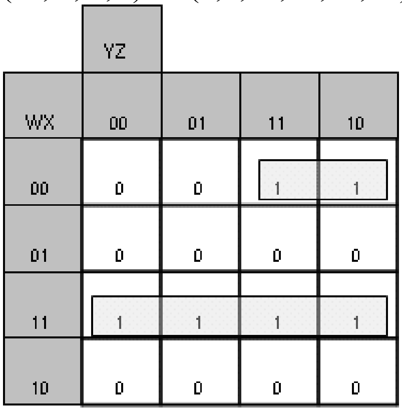
AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	0	1	1
11	0	0	1	0
10	0	0	0	0

F=BCD+A'BD'
F(A,B,C,D)= Σ(3,7,11,13,14,15)

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	1
10	0	0	1	0

F=CD+ABD+ABC

F(W,X,Y,Z)= Σ(2,3,12,13,14,15)



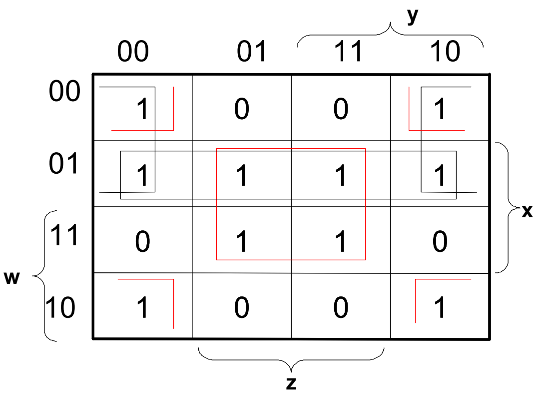
F= WX + W’X’Y

14. Βρείτε όλους τους κύριου εμπλεκόμενους όρους (prime implicants) για τις επόμενες συναρτήσεις και προσδιορίστε ποιοι από αυτούς είναι ουσιώδεις:

$$F(w,x,y,z)=\sum(0,2,4,5,6,7,8,10,13,15)$$
$$F(A,B,C,D)=\sum(0,2,3,5,7,8,10,11,14,15)$$
$$F(A,B,C,D)=\sum(1,3,4,5,10,11,12,13,14,15)$$

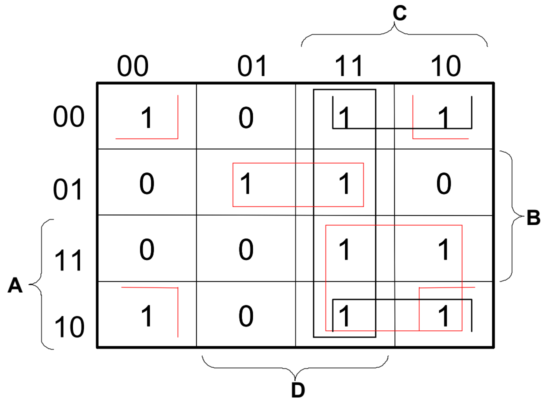
Λύση.
Σημείωση: Τα κόκκινα κουτιά αντιστοιχούν σε ουσιώδεις κύριους εμπλεκόμενους όρους.

$$F(w,x,y,z)=\sum(0,2,4,5,6,7,8,10,13,15)$$



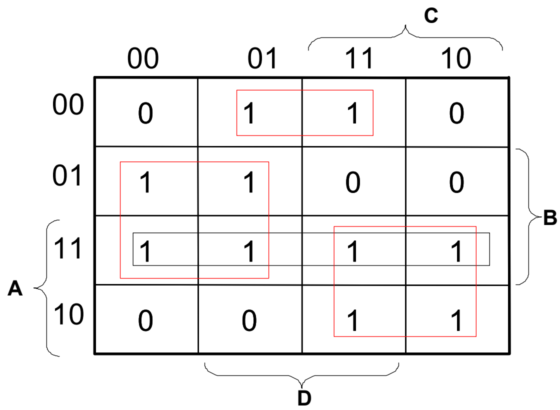
Ουσιώδεις: xz και x’z’; Μη-ουσιώδεις: w’x και w’z’
F=xz+ x'z'+ w'z'
F=xz+ x'z'+ w'x

$$F(A,B,C,D)=\sum(0,2,3,5,7,8,10,11,14,15)$$



Ουσιώδεις: AC, B’D’ και A’BD; Μη-ουσιώδεις: CD και B’C
F= AC+B'D'+A'BD+CD
F=AC+B'D'+A'BD+B’C

$$F(A,B,C,D)=\sum(1,3,4,5,10,11,12,13,14,15)$$



Ουσιώδεις: BC’, AC και A’B’D; Μη-ουσιώδεις: AB (σημειώνουμε ότι αυτός ο κύριο εμπλεκόμενος όρος, δεν πρέπει να συμπεριληφθεί στην έκφραση για τη συνάρτηση γιατί όλα τα 1 είναι καλυμένα από τον ουσιώδη κύριο εμπλεκόμενο)
F=AC+BC'+A'B'D

15. Απλοποιήστε τις επόμενες εκφράσεις σε (a) άθροισμα γινομένων (SOP) και (b) γινόμενο αθροισμάτων:

I. $x'z'+y'z'+yz'+xy$

II. $AC'+B'D+A'CD+ABCD$

III. $(A'+B'+D')(A+B'+C')$
$(A'+B+D')(B+C'+D')$

Λύση.

I. $x'z'+y'z'+yz'+xy$

SOP= $z'+xy$

POS= $(z'+x)(z'+y)$

II. $AC'+B'D+A'CD+ABCD$

F’=CD’+A’D’+A’BC’

SOP= $AC' + CD + B'D$

0	1	1	0
0	0	1	0
1	1	1	0
1	1	1	0

C, B, A, D

POS= $(C' + D)(A + D)(A + B' + C)$

0	1	1	0
0	0	1	0
1	1	1	0
1	1	1	0

C, B, A, D

III. $$F = (A' + B' + D')(A + B' + C')(A' + B + D')(B + C' + D')$$

F'=ABD+A'BC+AB'D+B'CD

F'= AD+ CD + A'BC

SOP= $A'C' + B'D' + AD'$

1	1	0	1
1	1	0	0
1	0	0	1
1	0	0	1

C, B, A, D

POS= $(A' + D')(C' + D')(A + B' + C')$

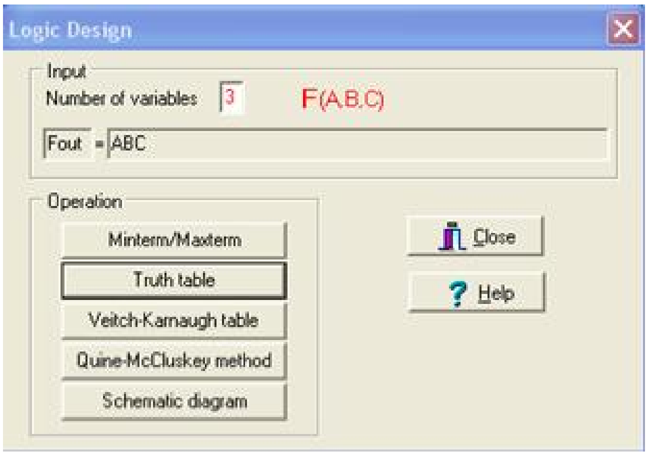
1	1	0	1
1	1	0	0
1	0	0	1
1	0	0	1

C, B, A, D

16. Χρησιμοποιείστε το εργαλείο Tools → Logic Design του TINA, για να σχεδιάσετε το απλοποιημένο κύκλωμα της F=(0,3,4,5,7).

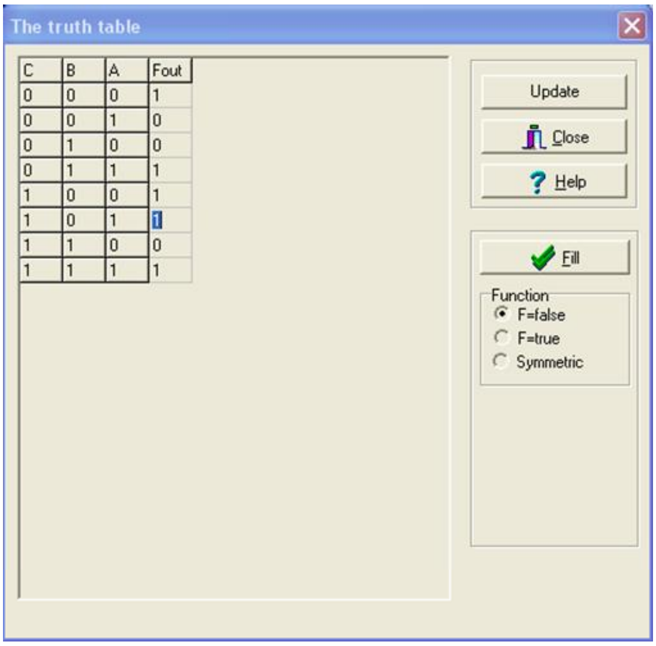
Λύση.

Εκκινούμε το εργαλείο **Logic Design** από το μενού **Tools**. Εμφανίζεται το παράθυρο διαλόγου της **Εικόνας 31**. Εισάγουμε 3 στο κουτάκι **Number of variables**.



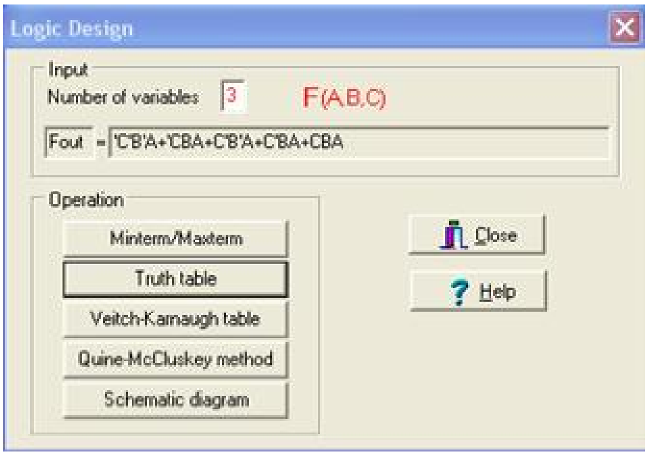
Εικόνα 31.

Επιλέγουμε το κουμπί **Truth Table**. Στο παράθυρο με τον πίνακα αληθείας που εμφανίζεται (**Εικόνα 32**), εισάγουμε τους 1 της F, στις θέσεις 0, 3, 4, 5, 7.



Εικόνα 32.

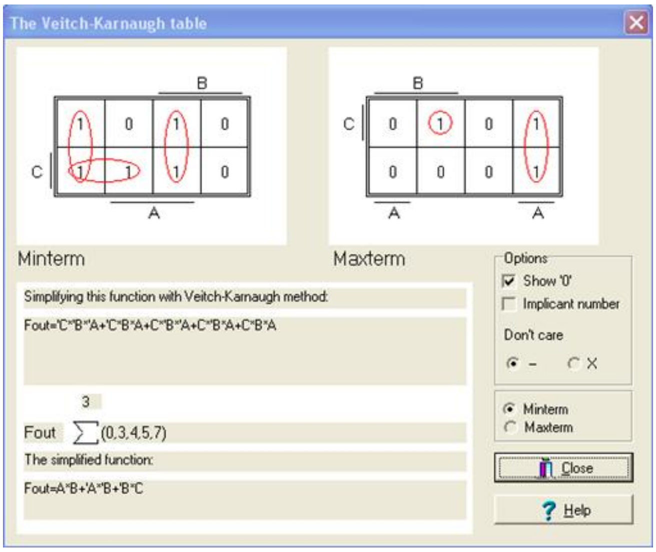
Επιλέγουμε **Update**, οπότε στο αρχικό παράθυρο του **Logic Design**, στη θέση **Fout** εμφανίζεται η κανονική μορφή της F, όπως στην **Εικόνα 33**.



Εικόνα 33.

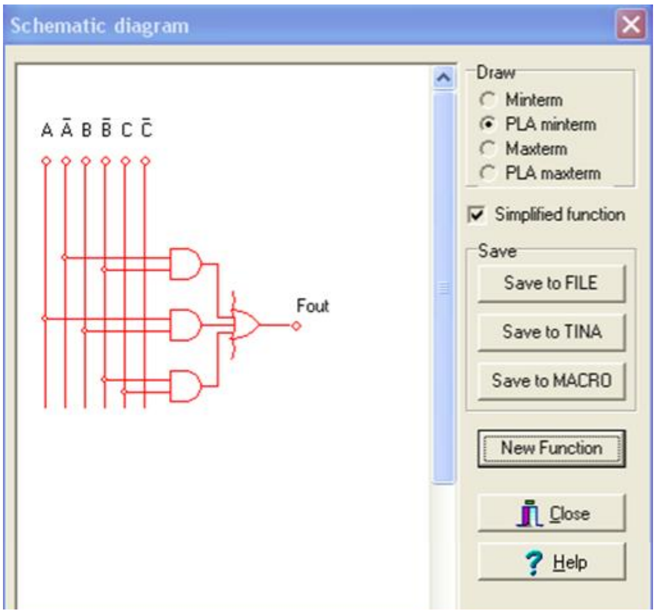
Στην **Εικόνα 34,** βλέπουμε το αποτέλεσμα της επιλογής **Minterm/Maxterm**. Στην **Εικόνα 35,** το αποτέλεσμα της επιλογής **Veitch-Karnaugh table**. Στην **Εικόνα 36,** το αποτέλεσμα της επιλογής **Quine-McCluskey method**. Στην **Εικόνα 37,** το αποτέλεσμα της **Schematic diagram**, που είναι το σχέδιο της απλοποιημένης έκφρασης της F. Επιλέγουμε **Save to TINA**, οπότε παράγεται ένα φύλλο σχεδίου όπως της **Εικόνας 38**, με το απλοποιημένο κύκλωμα, έτοιμο για προσομοίωση. Με την εντολή **Analysis ➔ Digital Timing Analysis**, παράγεται το διάγραμμα χρονισμού της **Εικόνας 39**.

Εικόνα 34.

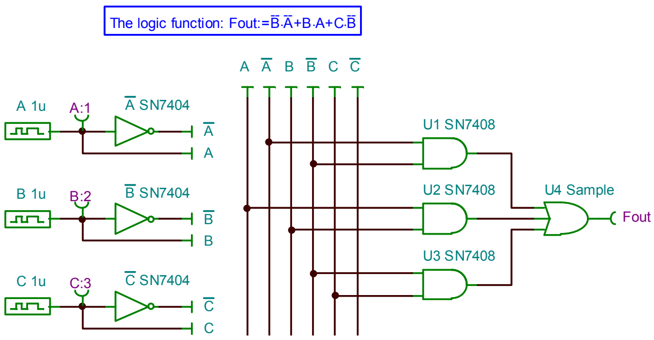


Εικόνα 35.

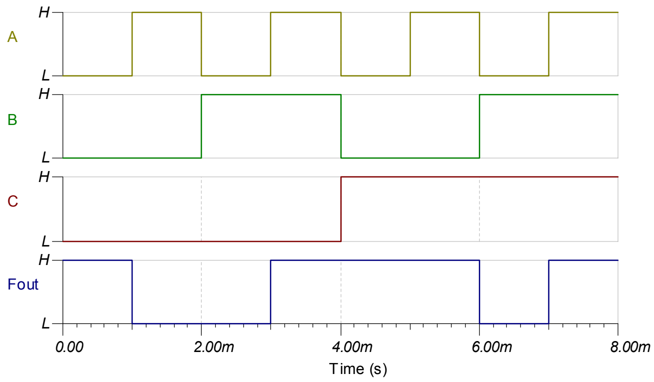
Εικόνα 36.



Εικόνα 37.



Εικόνα 38.



Εικόνα 39.