

# Πρόγραμμα Επικαιροποίησης Γνώσεων Αποφοίτων

ΕΝΟΤΗΤΑ Μ1  
ΨΗΦΙΑΚΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ

Εκπαιδευτής: Γ. Π. ΠΑΤΣΗΣ, Επικ. Καθηγητής, Τμήμα  
Ηλεκτρονικών Μηχανικών, ΤΕΙ Αθήνας

## ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Ποια είναι η βάση και τα ψηφία του δεκαδικού, δυαδικού, οκταδικού και δεκαεξαδικού συστήματος αρίθμησης
2. Οι ακέραιοι 0-7 στο δυαδικό σύστημα
3. Αξία θέσης. Τι είναι το LSB και το MSB;
4. Πόσα bits χρειάζονται για την αναπαράσταση ενός ακεραίου;
5. Χαρακτηριστικά του δυαδικού συστήματος αρίθμησης
6. Οι 20 Πρώτοι Ακέραιοι στο Δυαδικό, Οκταδικό και Δεκαεξαδικό σύστημα
7. Μετατροπή δυαδικού σε δεκαδικό σύστημα
8. Μετατροπή αριθμού από βάση  $r$  σε δεκαδικό σύστημα
9. Μετατροπές σε βάση  $2^k$
10. Μετατροπή από 8δικό σε 16δικό
11. Μετατροπή Αριθμού από 8δικό σε 2δικό
12. Μετατροπή Αριθμού από 2δικό σε 8δικό
12. Μετατροπή Αριθμών από μη-Δεκαδικό σε Δεκαδικό σύστημα
13. Μετατροπή ακεραίου μέρους αριθμού από 10δικό σε 2δικό
14. Μετατροπή ακεραίου μέρους αριθμού από 10δικό σε 8δικό, 16δικό
15. Μετατροπή δεκαδικού μέρους αριθμού από 10δικό σε 2δικό
16. Μετατροπή δεκαδικού μέρους αριθμού από 10δικό σε 8δικό
17. Μετατροπή δεκαδικού σε 2δικό
18. Ασκήσεις

## Ποια είναι η βάση και τα ψηφία του δεκαδικού, δυαδικού, οκταδικού και δεκαεξαδικού συστήματος αρίθμησης

<p><b>Δεκαδικό Σύστημα Αρίθμησης</b>            Βάση = 10, Ψηφία: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.            Παράδειγμα:</p> <p style="text-align: center;">7392</p> <p style="text-align: center;"> <math>7 \times 1000 + 3 \times 100 + 9 \times 10 + 2 \times 1</math> </p>	<p><b>Δυαδικό Σύστημα Αρίθμησης</b>            Βάση = 2, Ψηφία: 0,1.            Παράδειγμα:</p> <p style="text-align: center;">1010</p> <p style="text-align: center;"> <math>1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0</math> </p>
<p><b>Οκταδικό Σύστημα Αρίθμησης</b>            Βάση = 8, Ψηφία: 0,1,2,3,4,5,6,7.            Παράδειγμα:</p> <p style="text-align: center;">3761</p> <p style="text-align: center;"> <math>3 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 6 \times 8^1 + 1 \times 8^0</math> </p>	<p><b>Δεκαεξαδικό Σύστημα Αρίθμησης</b>            Βάση = 16, Ψηφία: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F.            Παράδειγμα:</p> <p style="text-align: center;">B73F</p> <p style="text-align: center;"> <math>11 \times 16^3 + 7 \times 16^2 + 3 \times 16^1 + 15 \times 16^0</math> </p>

## Οι ακέραιοι 0-7 στο δυαδικό σύστημα

Δεκαδικό	Δυαδικό (Βάση=2)		
	Αξία		
	$2^2=4$	$2^1=2$	$2^0=1$
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

## Πόσα bits χρειάζονται για την αναπαράσταση ενός ακεραίου;

1. Εξαρτάται από το **μέτρο του**, δηλαδή την τιμή του.
2. Γενικά όσο μεγαλύτερος είναι ο ακεραίος τόσο περισσότερα bits απαιτούνται για την ανάπαράστασή του.
3. Ειδικότερα, με **n bits** μπορούμε να αναπαραστήσουμε τους θετικούς ακεραίους από το 0 μέχρι το  $2^n-1$ .

## Αξία θέσης. Τί είναι το LSB και το MSB;

1. Το **MSB** σημαίνει **Most Significant Bit**, δηλαδή περισσότερο σημαντικό διφύο. Είναι το ψηφίο που βρίσκεται τέρμα αριστερά σε έναν δυαδικό αριθμό, δηλαδή το ψηφίο μεγαλύτερης αξίας.
2. Το **LSB** σημαίνει **Least Significant Bit**, δηλαδή ελάχιστα σημαντικό διφύο. Είναι το ψηφίο που βρίσκεται πιο τέρμα δεξιά σε έναν δυαδικό αριθμό, δηλαδή το ψηφίο με τη μικρότερη αξία.

## Χαρακτηριστικά του δυαδικού συστήματος αρίθμησης

1. Το δυαδικό αριθμητικό σύστημα έχει για βάση το 2 και ψηφία τα {0, 1}.
2. Τα ψηφία 0 και 1 είναι γνωστά ως δυφία ή bits.
3. Κάθε αριθμός στο δυαδικό σύστημα απαρτίζεται από έναν πλήθος bits.
4. Όσο περισσότερα bits έχει ένας δυαδικός αριθμός τόσο μεγαλύτερος θα είναι.
5. Η αξία κάθε ψηφίου σε έναν δυαδικό αριθμό είναι ίση με το 2 υψωμένο σε εκθέτη ίσο με τη θέση του ψηφίου μετρημένη από το λιγότερο σημαντικό ψηφίο (αυτό που βρίσκεται δεξιότερα) και θεωρώντας το λιγότερο σημαντικό ψηφίο ότι βρίσκεται στη θέση 0.
6. Με **1bit** μπορούμε να παραστήσουμε δύο αριθμούς, το 0 και 1.
7. Με **2bits**, 4 αριθμούς, τους 0,1,2,3. Με 3bits, 8 αριθμούς, τους 0,1,...,7. Με 4bits, 16 αριθμούς, τους 0,1,...,15.
8. Γενικά με **n bits** μπορούμε να αναπαραστήσουμε  $2^n$  ακέραιους, τους 0, 1, 2, ...,  $2^n-1$ .
9. Π.χ. με 32 bits μπορούμε να αναπαραστήσουμε  $2^{32} = 4,294,967,296$  ακέραιους, τους 0, 1, 2, ...,  $4,294,967,296 - 1 = 4,294,967,295$ .

Θέση=1	Θέση=0, Least Significant Bit (LSB) = Λιγότερο Σημαντικό Ψηφίο	Ισοδύναμος αριθμός στο δεκαδικό σύστημα
Αξία = $2^1 = 2$	Αξία = $2^0 = 1$	
A	B	$A * 2 + B * 1$
0	0	$0 * 2 + 0 * 1 = 0$
0	1	$0 * 2 + 1 * 1 = 1$
1	0	$1 * 2 + 0 * 1 = 2$
1	1	$1 * 2 + 1 * 1 = 3$

Θέση=2	Θέση=1	Θέση=0 Least Significant Bit (LSB) = Λιγότερο Σημαντικό Ψηφίο	Ισοδύναμος αριθμός στο δεκαδικό σύστημα
Αξία = $2^2 = 4$	Αξία = $2^1 = 2$	Αξία = $2^0 = 1$	
A	B	C	$A * 4 + B * 2 + C * 1$
0	0	0	$0 * 4 + 0 * 2 + 0 * 1 = 0$
0	0	1	$0 * 4 + 0 * 2 + 1 * 1 = 1$
0	1	0	$0 * 4 + 1 * 2 + 0 * 1 = 2$
0	1	1	$0 * 4 + 1 * 2 + 1 * 1 = 3$
1	0	0	$1 * 4 + 0 * 2 + 0 * 1 = 4$
1	0	1	$1 * 4 + 0 * 2 + 1 * 1 = 5$
1	1	0	$1 * 4 + 1 * 2 + 0 * 1 = 6$
1	1	1	$1 * 4 + 1 * 2 + 1 * 1 = 7$

Θέση=3	Θέση=2	Θέση=1	Θέση=0	Ισοδύναμος αριθμός στο δεκαδικό σύστημα
Αξία = $2^3 = 8$	Αξία = $2^2 = 4$	Αξία = $2^1 = 2$	Αξία = $2^0 = 1$	
A	B	C	D	$A * 8 + B * 4 + C * 2 + D * 1$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	$D * 1 = 1$
0	0	1	0	$C * 2 = 2$
0	0	1	1	$C * 2 + D * 1 = 3$
0	1	0	0	$B * 4 = 4$
0	1	0	1	$B * 4 + D * 1 = 5$
0	1	1	0	$B * 4 + C * 2 = 6$
0	1	1	1	$B * 4 + C * 2 + D * 1 = 7$
1	0	0	0	$A * 8 = 8$
1	0	0	1	$A * 8 + D * 1 = 9$
1	0	1	0	$A * 8 + C * 2 = 10$
1	0	1	1	$A * 8 + C * 2 + D * 1 = 11$
1	1	0	0	$A * 8 + B * 4 = 12$
1	1	0	1	$A * 8 + B * 4 + D * 1 = 13$
1	1	1	0	$A * 8 + B * 4 + C * 2 = 14$
1	1	1	1	$A * 8 + B * 4 + C * 2 + D * 1 = 15$

**Οι 20 Πρώτοι Ακέραιοι στο Δυαδικό, Οκταδικό και Δεκαεξαδικό σύστημα**

Decimal	Binary	Octal	Hexadecimal
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14

**Μετατροπή δυαδικού σε δεκαδικό σύστημα**

Ένας δυαδικός αριθμός μπορεί να μετατραπεί σε δεκαδικό, όταν βρούμε το άθροισμα των δυνάμεων του 2 εκείνων των συντελεστών που έχουν τιμή 1.

Παράδειγμα:

$$(1010.011)_2 = 2^3 + 2^1 + 2^{-2} + 2^{-3} = (10.375)_{10}$$

## Μετατροπή αριθμού από βάση r σε δεκαδικό σύστημα

Ένας αριθμός εκφρασμένος σε βάση r μπορεί να μετατραπεί σε δεκαδικό, πολλαπλασιάζοντας κάθε συντελεστή με την αντίστοιχη δύναμη του r και κάνοντας πρόσθεση.

Παράδειγμα:

$$(640.4)_8 = 6 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 4 \cdot 8^{-1} = (408.5)_{10}$$

## Μετατροπές σε βάση $2^k$

- Κάθε στοιχείο ενός 8δικού αριθμού μπορεί να αναπαρασταθεί με 3bit δυαδικό αριθμό.
- Αντίστοιχα, κάθε στοιχείο ενός 16δικού αριθμού μπορεί να αναπαρασταθεί με 4bit δυαδικό αριθμό.
- Γενικά κάθε ψηφίο ενός αριθμού σε βάση r, όπου r είναι ακέραια δύναμη k του 2, μπορεί να αναπαρασταθεί με k-bit δυαδικό αριθμό.
- Κατά τη μετατροπή ενός αριθμού από βάση p σε βάση q, αν τα p και q είναι και τα δύο ακέραιες δυνάμεις του 2, τότε ο αριθμός στη βάση p μπορεί να μετατραπεί πρώτα σε 2δικό και στη συνέχεια, με κατάλληλη ομαδοποίηση των bits σε αριθμό στη βάση q.
- Η διαδικασία αυτή ονομάζεται μετατροπή σε βάσεις  $2^k$ .
- Παραδείγματα:
- Μετατροπή από 16δικό σε 8δικό:
- $(AF5.2C)_{16} = (?)_8$
- $p=16=2^4 \rightarrow$  αναπαράσταση σε 4bit
- $q=8=2^3 \rightarrow$  ομαδοποίηση ανά 3bit
- Μετατρέπουμε καθένα από τα ψηφία του 16δικού σε 4bit δυαδικό:

A	F	5	.	2	C	16δικός
1 0 1 0	1 1 1 0	1 0 1 1	.	0 0 1 0	1 1 0 0	επιπλέον 0
←	←	←		→	→	→
5	3	6	.	1	3	8δικός

$$(AF5.2C)_{16} = (5365.130)_8$$

## Μετατροπή από 8δικό σε 16δικό

			5	6	7	.	2	3			8δικός	Βάση =8=2 <sup>3</sup>									
			1	0	1	1	1	0	1	1	1	.	0	1	0	0	1	1		Ανάλυση κάθε ψηφίου σε 3 bit	
			←						→						Ομαδοποίηση των bits ανά 4						
0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	.	0	1	0	0	1	1	0	0	Προστέθηκαν μηδενικά
1			7			7			.	4		C		16δικός							

## Μετατροπή Αριθμού από 8δικό σε 2δικό

1. Η χρησιμοποίηση του οκταδικού συστήματος δεν είναι τυχαία.
2. Ο αριθμός 8 είναι δύναμη του 2,  $8=2^3$ . Δηλαδή κάθε ψηφίο ενός οκταδικού αριθμού απεικονίζεται με 3 ψηφία δυαδικού αριθμού.
3. Η μετατροπή ενός οκταδικού αριθμού σε δυαδικό γίνεται αν για κάθε ψηφίο του οκταδικού αριθμού γραφεί ο αντίστοιχος τριψήφιος δυαδικός.

Παράδειγμα:

$$7_8=111_2, 77_8=111\ 111_2, 777_8=111\ 111\ 111_2.$$

## Μετατροπή Αριθμού από 2δικό σε 8δικό

1. Αντίστροφα, από 2δικό ανά τρία ψηφία, σχηματίζουμε τον ισοδύναμο 8δικό. Παράδειγμα:  **$110\ 011_2 = 63_8$** .
2. Συμπεραίνουμε, ότι είναι δυνατό να αναπαραστήσουμε 2δικούς αριθμούς σε συμπυκνωμένη μορφή ως 8δικούς ή 16δικούς.
3. Μάλιστα, οι μετατροπές μεταξύ τέτοιων συστημάτων είναι άμεση. Είναι ευκολότερο να δουλεύουμε με λιγότερα ψηφία στην περίπτωση μεγάλων δυαδικών αριθμών.
4. Για το λόγο αυτό τα ψηφιακά συστήματα προτιμούν τις αναπαραστάσεις σε 8δικό ή 16δικό σύστημα.

## Μετατροπή Αριθμών από μη-Δεκαδικό σε Δεκαδικό σύστημα

1. Η μετατροπή ενός δεκαδικού αριθμού σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα, θεωρεί ξεχωριστά το ακέραιο από το καθαρά δεκαδικό μέρος του αριθμού.
2. Για το ακέραιο μέρος χρησιμοποιείται διαίρεση.
3. Για το δεκαδικό μέρος χρησιμοποιείται πολλαπλασιασμός.

## Μετατροπή ακεραίου μέρους αριθμού από 10δικό σε 2δικό

1. Διαιρούμε το θεωρούμενο 10δικό αριθμό με τη δοσμένη βάση και σημειώνουμε το υπόλοιπο κάθε διαίρεσης.
2. Το πηλίκο γίνεται ο νέος διαιρετέος.
3. Σταματάμε τη διαίρεση όταν το πηλίκο γίνεται 0.
4. Στο τέλος συλλέγουμε τα υπόλοιπα (από το τέλος προς την αρχή) και τα τοποθετούμε οριζόντια ξεκινώντας από αριστερά προς τα δεξιά.

Παράδειγμα:

Να μετατραπεί ο 245 από το 10δικό σύστημα στο 2δικό.

Πηλίκο	Διαιρέτης	Υπόλοιπο	Γραφή από το τέλος προς την αρχή
245	2		↑
122	2	1	
61	2	0	
30	2	1	
15	2	0	
7	2	1	
3	2	1	
1	2	1	
0		1	

Άρα  $245_{10} = 11110101_2$

## Μετατροπή ακεραίου μέρους αριθμού από 10δικό σε 8δικό, 16δικό

Πηλίκο	Διαιρέτης	Υπόλοιπο	Γραφή από το τέλος προς την αρχή
245	8		↑
30	8	5	
3	8	6	
0		3	

Άρα  $245_{10} = 365_8$ .

Πηλίκο	Διαιρέτης	Υπόλοιπο	Γραφή από το τέλος προς την αρχή
245	16		↑
15	16	5	
0		15=F	

Άρα  $245_{10} = F5_{16}$ .

## Μετατροπή δεκαδικού μέρους αριθμού από 10δικό σε 2δικό

1. Στην περίπτωση μετατροπής του δεκαδικού μέρους δεκαδικού αριθμού σε δυαδικό, πρέπει να πολλαπλασιάζουμε με 2 και να κρατάμε το ψηφίο που προκύπτει στα δεξιά της υποδιαστολής από τον πρώτο μέχρι τον τελευταίο πολλαπλασιασμό.
2. Το σε πόσους πολλαπλασιασμούς θα σταματήσουμε εξαρτάται από την ακρίβεια με την οποία θέλουμε να γνωρίζουμε τα δεκαδικά ψηφία του αριθμού μας.

**Παράδειγμα 1.** Μετατροπή του .250 από το 10δικό στο 2δικό σύστημα.

$$.250 \times 2 = 0.50 \rightarrow 0$$

$$.50 \times 2 = 1.00 \rightarrow 1$$

$$\text{Άρα: } .250_{10} = .01_2$$

**Παράδειγμα 2.** Μετατροπή του .345 από το 10δικό στο 2δικό σύστημα κρατώντας 6 δεκαδικά.

$$.345 \times 2 = 0.690 \rightarrow 0$$

$$.690 \times 2 = 1.380 \rightarrow 1$$

$$.380 \times 2 = 0.760 \rightarrow 0$$

$$.760 \times 2 = 1.520 \rightarrow 1$$

$$.520 \times 2 = 1.040 \rightarrow 1$$

$$.040 \times 2 = 0.080 \rightarrow 0$$

$$\text{Άρα: } .345_{10} = .010110_2$$

## Μετατροπή δεκαδικού μέρους αριθμού από 10δικό σε 8δικό

1. Πολλαπλασιάζουμε το δεκαδικό μέρος με το 8 και κρατάμε το ακέραιο μέρος και
2. επαναλαμβάνουμε μέχρι το επιθυμητό πλήθος δεκαδικών ψηφίων.

**Παράδειγμα.**

Να μετατρέψετε το  $.345_{10}$  σε 8δικό σύστημα.

$$0.345 \times 8 = 2.760 \rightarrow 2$$

$$0.760 \times 8 = 6.080 \rightarrow 6$$

$$0.080 \times 8 = 0.640 \rightarrow 0$$

$$0.640 \times 8 = 5.120 \rightarrow 5$$

$$\text{Άρα: } .345_{10} = .2605_8$$

## Μετατροπή δεκαδικού σε 2δικό

1. Μετατρέπουμε ξεχωριστά το ακέραιο και το δεκαδικό μέρος στο δυαδικό σύστημα, όπως φαίνεται στη συνέχεια.
2. Για το ακέραιο μέρος εφαρμόζουμε τις διαδοχικές διαιρέσεις με 2, σημειώνουμε το υπόλοιπο και γράφουμε τον αριθμό από το τέλος προς την αρχή.

**Παράδειγμα.** Να μετατρέψετε τον 242.45 από το 10δικό στο δυαδικό σύστημα.

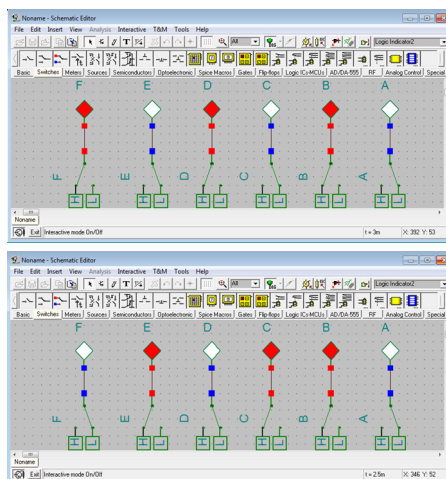
242 : 2 = 121 , υπόλοιπο 0	Για το δεκαδικό μέρος εφαρμόζουμε τους διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς:	
121 : 2 = 60, υπόλοιπο 1	$0.45 \times 2 = 0.90 \rightarrow 0$	
60:2 = 30, υπόλοιπο 0	$0.90 \times 2 = 1.80 \rightarrow 1$	
30:2 = 15, υπόλοιπο 0	$0.80 \times 2 = 1.60 \rightarrow 1$	
15:2 = 7, υπόλοιπο 1	$0.60 \times 2 = 1.20 \rightarrow 1$	
7:2 = 3, υπόλοιπο 1	$0.20 \times 2 = 0.40 \rightarrow 0$	
3:2=1, υπόλοιπο 1	$0.40 \times 2 = 0.80 \rightarrow 0$	
1:2=0, υπόλοιπο 1	$0.80 \times 2 = 1.60 \rightarrow 1$ (επανάληψη)	
Άρα $242_{10} = 11110010_2$	Άρα: $0.45_{10} = .011100_2$ .	<b>Συνολικά:</b> $242.45_{10} = 11110010.011100_2$ .

## Μετατροπή δεκαδικού σε 2δικό

1. Οι προηγούμενες διαδικασίες (διαίρεσης και πολλαπλασιασμού με τη νέα βάση) μπορούν να μετατρέψουν έναν αριθμό από οποιαδήποτε βάση σε άλλη.
2. Όταν ένας αριθμός μετατρέπεται από τη βάση  $p$  στη βάση  $q$ , ο αριθμός στη βάση  $p$  διαιρείται (ή πολλαπλασιάζεται) με το  $q$ , αλλά με αριθμητική στη βάση  $p$ .
3. Επειδή έχουμε συνηθίσει στην αριθμητική στη βάση 10, είναι βολικότερο να γίνονται μετατροπές όταν  $p=10$ .
4. Γενικά, είναι βολικότερο να μετατρέπουμε τον αριθμό από τη βάση  $q$  στη βάση 10 και στη συνέχεια από αυτή στη βάση  $q$ .

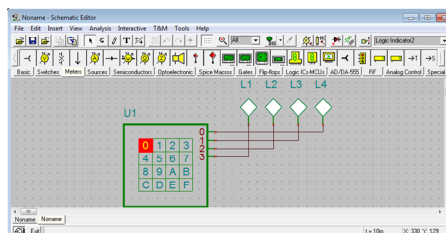
## Ασκήσεις

Ποιος είναι ο αριθμός στο δυαδικό και στο δεκαδικό σύστημα που εικονίζεται στις δύο επόμενες προσομοιώσεις λειτουργίας διακοπών (H=1, L=0);



## Ασκήσεις

Χρησιμοποιείστε το 16δικό πληκτρολόγιο και πατώντας τα πλήκτρα 0 ως F διαδοχικά, προσδιορίστε το δυαδικό τους ισodύναμο στους ενδείκτες λογικής L1 ως L4. Ποιος από τους ενδείκτες αυτούς έχει τη μικρότερη και ποιος τη μεγαλύτερη αξία και ποι είναι αυτή; (Για να δείτε τη διαδραστική προσομοίωση πρέπει να έχετε επιλέξει στο interactive mode πλήκτρο, την εντολή Digital και να το πατήσετε.



## Ασκήσεις

Επαληθεύστε την ορθή αναπαράσταση των αριθμών που εισάγετε στο 16δικό πληκτρολόγιο στον 16δικό ενδείκτη όπως φαίνεται στο επόμενο κύκλωμα.

