Πρόγραμμα Επικαιροποίησης Γνώσεων Αποφοίτων

ΕΝΟΤΗΤΑ Μ1
ΨΗΦΙΑΚΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ

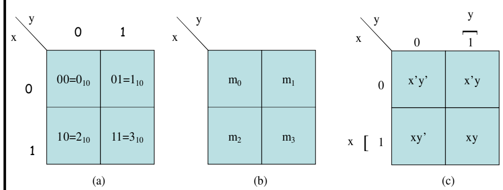
Εκπαιδευτής: Γ. Π. ΠΑΤΣΗΣ, Επικ. Καθηγητής, Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών, ΤΕΙ Αθήνας

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΧΑΡΤΗ KARNAUGH

1. Εισαγωγή
2. Ελλιπώς οριζόμενες λογικές συναρτήσεις – Αδιάφοροι όροι
3. Παραγωγή απλοποιημένης λογικής συνάρτησης με το εργαλείο Logic Design του TINA
4. Ασκήσεις

Εισαγωγή

1. Η μέθοδος απλοποίησης συναρτήσεων λογικής με **χάρτη Karnaugh** (**ΧΚ**), σε αντίθεση με την άλγεβρα Boole δίνει γρήγορα την απλούστερη μορφή των λογικών συναρτήσεων, ειδικά όταν η συνάρτηση έχει μέχρι 6 μεταβλητές.
2. Ο ΧΚ αποτελείται από τετράγωνα, ένα για κάθε όρο της συνάρτησης, επομένων το πλήθος τους δίνεται από τη σχέση: πλήθος = 2n, όπου n το πλήθος των μεταβλητών της συνάρτησης.
3. Ο ΧΚ είναι ισοδύναμος σε πληροφορία με τον πίνακα αληθείας της συνάρτησης λογικής. Ωστόσο, είναι ευκολότερο να κάνουμε απλοποιήσεις πάνω στην κανονική μορφή της συνάρτησης λογικής μέσω του ΧΚ, παρά μέσω του πίνακα αληθείας της.
4. Π.χ. στην **Εικόνα 1** έχουμε ένα παράδειγμα ΧΚ με δύο μεταβλητές x και y. Οι τιμές της μεταβλητής x τοποθετήθηκαν ανά γραμμή και οι τιμές της μεταβλητής y ανά στήλη. Κάθε τετράγωνο αντιστοιχεί σε έναν ελαχιστόρο ή μεγιστόρο της συνάρτησης λογικής.

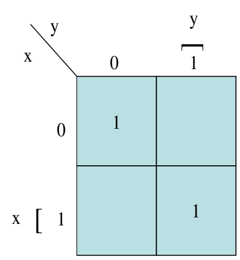


Εικόνα 1. Παράδειγμα χάρτη Karnaugh όπου σημειώνονται και οι αντιστοιχίες των τετραγώνων για δύο μεταβλητές.

Η μέθοδος απλοποίησης συναρτήσεων λογικής με χάρτη Karnaugh (ΧΚ)

Στην **Εικόνα 2** φαίνεται ένα παράδειγμα μετασχηματισμού του πίνακα αληθείας μιας συνάρτησης F(x,y) σε ΧΚ. Αν επιθυμούμε υλοποίηση της συνάρτησης με ελαχιστόρους, τότε στα τετράγωνα του ΧΚ τοποθετούμε τους 1 μόνο. Αν επιθυμούμε υλοποίηση με μεγιστόρους, στα τεράγωνα του ΧΚ τοποθετούμε τα 0 μόνο.

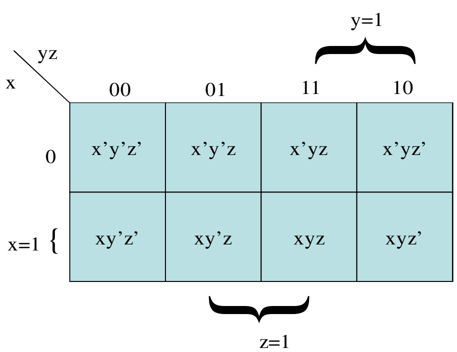
i	x	y	F	mi
0	0	0	1	x'y'
1	0	1	0	x'y
2	1	0	0	xy'
3	1	1	1	xy



Εικόνα 2. Αντιστοιχία μεταξύ πίνακα αληθείας και ΧΚ για μια λογική συνάρτηση 2 μεταβλητών.

Η μέθοδος απλοποίησης συναρτήσεων λογικής με χάρτη Karnaugh (ΧΚ)

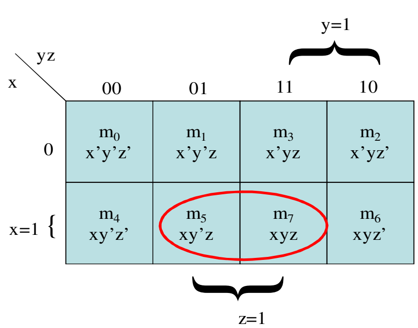
Στην **Εικόνα 3** φαίνεται ένας ΧΚ τριών μεταβλητών. Οποιαδήποτε δύο τετράγωνα στο χάρτη, διαφέρουν κατά μία μόνο μεταβλητή, η οποία εμφανίζεται σαν το συμπλήρωμα της στο ένα τετράγωνο και με την πραγματική της τιμή στο άλλο. Για το λόγο αυτό υπάρχει αυτή η «ανωμαλία» στη μέτρηση από 01 σε 11 σε 10, αντί για 01, 10, 11.



Εικόνα 3. ΧΚ τριών μεταβλητών.

Η μέθοδος απλοποίησης συναρτήσεων λογικής με χάρτη Karnaugh (ΧΚ)

Με βάση τα θεωρήματα της άλγεβρας Boole, έπεται ότι το άθροισμα δύο ελαχιστόρων σε γειτονικά τετράγωνα μπορεί να απλοποιηθεί σε έναν όρο ΚΑΙ με δύο μόνο παράγοντες. Π.χ. στην **Εικόνα 4** φαίνεται ένα παράδειγμα απλοποίησης γειτονικών όρων. Περισσότερα για τις απλοποιήσεις στο ΧΚ θα πούμε στη συνέχεια.



$m_5 + m_7 = xy'z + xyz = xz(y'+y)=xz$

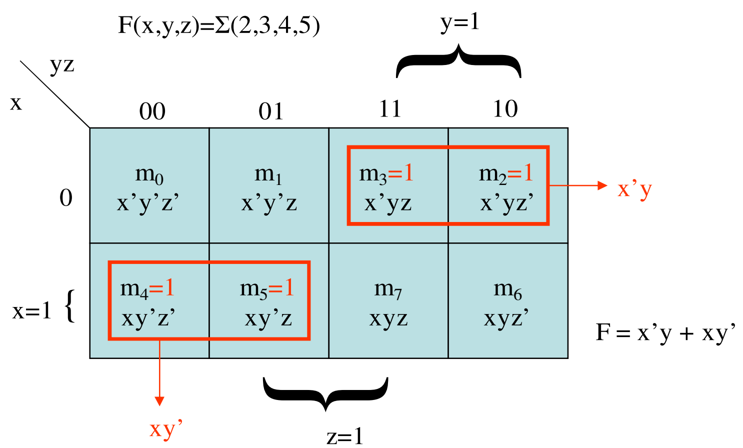
Εικόνα 4. Παράδειγμα απλοποίησης γειτονικών όρων σε ΧΚ τριών μεταβλητών.

1. Οποιοιδήποτε δύο ελαχιστόροι σε γειτονικά τετράγωνα που σχετίζονται μεταξύ τους με τη λογική πράξη OR, δικαιολογούν μια απομάκρυνση της διαφορετικής μεταβλητής.
2. Όλη η διαδικασία για την απλοποίηση μιας λογικής συνάρτησης εκτελείται σε πέντε βήματα.
3. Φέρνουμε τη συνάρτηση λογικής σε κανονική μορφή. Δηλαδή σε μορφή αθροίσματος γινομένων (ελαχιστόρων) ή σε μορφή γινομένου αθροισμάτων (μεγιστόρων). Αν δηλαδή η αρχική συνάρτηση λογικής δεν είναι σε τέτοια μορφή, θα πρέπει να τη μετατρέψουμε, προσθέτοντας σε κάθε όρο (για τη μορφή ελαχιστόρων) ή πολλαπλασιάζοντας κάθε όρο(για τη μορφή μεγιστόρων) τη μεταβλητή που λείπει. Π.χ. αν λείπει η μεταβλητή X από την έκφραση της λογικής συνάρτησης και η λογική συνάρτηση είναι εκφρασμένη ως άθροισμα γινομένων, τότε πρέπει να προσθέσουμε σε κάθε όρο της συνάρτησης αυτής το X·X'. Αν η μορφή της λογικής συνάρτησης είναι εκφρασμένη ως γινόμενο αθροισμάτων, τότε θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο της με το (X+X').
4. Υπολογίζουμε το πλήθος των τετραγώνων του ΧΚ από τη σχέση πλήθος = 2^n, όπου n το πλήθος των μεταβλητών της συνάρτησης. Για n = 2, 3, 4, 5 και 6, θα χρειαστούμε αντίστοιχα 4, 8, 16, 32 και 64 τετράγωνα αντίστοιχα. Κάθενα από τα τετράγωνα έχει «συντεταγμένες», όπως φαίνονται στη συνέχεια.
5. Κάθε συνδυασμός των μεταβλητών αντιστοιχεί σε ένα τετράγωνο του ΧΚ. Τοποθετούμε την προς απλοποίηση συνάρτηση στον ΧΚ ως εξής: Βάζουμε 1 στο αντίστοιχο τετράγωνο αν η συνάρτηση λογικής είναι εκφρασμένη ως άθροισμα γινομένων ή 0 αν είναι εκφρασμένη ως γινόμενο αθροισμάτων. Τυχόν αδιάφορους όρους τους σημειώνουμε με X ή d.
6. Μετά τη συμπλήρωση του ΧΚ και ανάλογα με τη λογική που θα χρησιμοποιήσουμε στην κατασκευή του λογικού κυκλώματος, σχηματίζουμε ομάδες γειτονικών διαδοχικών τετραγώνων, σχήματος ορθογωνίου, τετραγώνου ή «κύβου», με μονάδες ή μηδενικά, ακολουθώντας τους παρακάτω κανόνες:
    1. Να ληφθούν υπόψη όλες οι μονάδες ή όλα τα μηδενικά.
    2. Το πλήθος των μονάδων ή μηδενικών των ομάδων υπακούει στη σχέση $m=2^k$, όπου k=0,1,2,3,4,5,... .
    3. Οι ομάδες να είναι όσο το δυνατό λιγότερες και ταυτόχρονα όσο το δυνατό μεγαλύτερου πλήθους τετραγώνων.
    4. Οι αδιάφοροι όροι χρησιμοποιούνται είτε ως μονάδες είτε ως μηδενικά ανάλογα με την έκφραση της αρχικής συνάρτησης λογικής.
    5. Κάθε μονάδα ή μηδενικό ή αδιάφορος όρος χρησιμοποιείται όσες φορές χρειάζεται στις ομάδες ώστε να πετύχουμε τη μεγαλύτερη και καλύτερη απλοποίηση.
7. Από τις ομάδες που σχηματίσαμε εξάγουμε την απλοποιημένη συνάρτηση λογικής που είναι και η τελική έκφραση της αρχικής συνάρτησης λογικής.
8. Το τελευταίο βήμα είναι να σχεδιάσουμε το κύκλωμα της απλοποιημένης συνάρτησης λογικής. Αν είναι εκφρασμένη ως άθροισμα γινομένων, το κύκλωμα σχεδιάζεται με λογική σχεδίασης AND-OR ή NAND. Αν είναι εκφρασμένη ως γινόμενο αθροισμάτων, το κύκλωμα σχεδιάζεται με λογική σχεδίασης OR-AND ή NOR.

Ελλιπώς οριζόμενες λογικές συναρτήσεις – Αδιάφοροι όροι

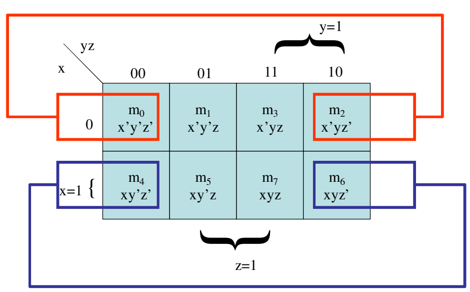
1. Πρακτικά, μερικές λογικές συναρτήσεις δεν ορίζονται για όλους τους συνδυασμούς των μεταβλητών εισόδου.
2. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η έξοδος είναι αδιάφορη και συμβολίζεται με d.
3. Στον πίνακα Karnaugh, τα d μπορεί να θεωρηθούν ως 1 ή 0 στις απλοποιήσεις, ανάλογα με το τι μας βολεύει.

Παράδειγμα απλοποίησης με ΧΚ



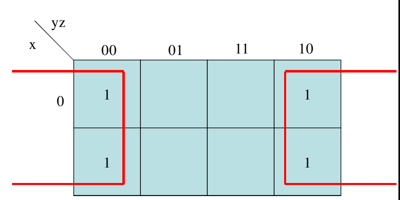
Η απλοποίηση δίνει F = x'y + xy' = XOR(x,y).

Παράδειγμα απλοποίησης με ΧΚ



Εικόνα 1. Υπάρχουν περιπτώσεις, όπου δύο τετράγωνα στο χάρτη, θεωρούνται γειτονικά αν και δεν «ακουμπούν» μεταξύ τους.

$m_0 + m_2$ = x'y'z' + x'yz' = x'z' (y'+y) = x'z'
$m_4 + m_6$ = xy'z' + xyz' = xz' (y'+y) = xz'



Εικόνα 2. Οι 4 άσσοι είναι «γείτονες» και μπορούν να απλοποιηθούν.

$m_0 + m_2 + m_4 + m_6$ = x'z' + xz' = z'(x'+x) = z'

Ο ΧΚ και η απλοποίηση της $F=\Sigma(0,1,2,4,5,6,8,9,12,13,14)$.

F(w,y,z)=Σ(0,1,2,4,5,6,8,9,12,13,14)

wx \ yz	00	01	11 (y)	10 (y)
00	m_0=1 w'x'y'z'	m_1=1 w'x'y'z	m_3 w'x'yz	m_2=1 w'x'yz'
01 (x)	m_4=1 w'xy'z'	m_5=1 w'xy'z	m_7 w'xyz	m_6=1 w'xyz'
11 (w, x)	m_{12}=1 wxy'z'	m_{13}=1 wxy'z	m_{15} wxyz	m_{14}=1 wxyz'
10 (w)	m_8=1 wx'y'z'	m_9=1 wx'y'z	m_{11} wx'yz	m_{10} wx'yz'

z

w'z'

y'

xz'

F = y' + w'z' + xz'