Συνάρτηση μεταφοράς

- Η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος μπορεί να εκφραστεί ως λόγος πολυωνύμων σε παραγοντική μορφή

$$H(s) = A_m \frac{(s-z_1)\cdot(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdot(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

- Οι ρίζες $z_1, z_2 \ldots z_m$ του πολυωνύμου του αριθμητή καλούνται *μηδενικά*
- Οι ρίζες $p_1, p_2 \ldots p_m$ του πολυωνύμου του παρονομαστή καλούνται *πόλοι* ή φυσικές συχνότητες
- Αντικαθιστώντας την μιγαδική μεταβλητή s με τη φανταστική συχνότητα *jω* έχουμε την *H(jω)*
- *η H(jω)* είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για τη μελέτη ενός συστήματος για διάφορες συχνότητες του σήματος εισόδου.
- Για συγκεκριμένη συχνότητα *ω* , η *H(j*ω) είναι ένας μιγαδικός αριθμός, που σε πολική μορφή εκφράζεται $H(j\omega) = |H(j\omega)| \cdot e^{j\angle H(j\omega)}$
  - Μέτρο της *H(jω) :*

$$|H(j\omega)| = |A_m| \cdot \frac{|(j\omega - z_1)|\cdot|(j\omega - z_2)|\cdots|(j\omega - z_m)|}{|(j\omega - p_1)|\cdot|(j\omega - p_2)|\cdots|(j\omega - p_n)|} = |A_m| \cdot \frac{\sqrt{\omega^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{\omega^2 + z_2^2}\cdots\sqrt{\omega^2 + z_m^2}}{\sqrt{\omega^2 + p_1^2}\cdot\sqrt{\omega^2 + p_2^2}\cdots\sqrt{\omega^2 + p_n^2}}$$

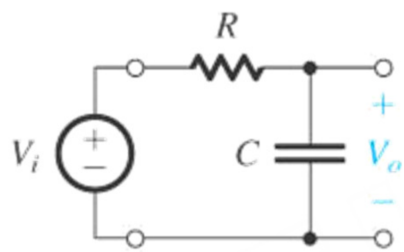
  - Φάση της *H(jω) :* $\angle H(j\omega) = \sum_{i=1}^{m}\left(\tan^{-1}\frac{\omega}{-z_i}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\tan^{-1}\frac{\omega}{-p_i}\right)$

Δίκτυα RC μίας σταθεράς χρόνου

- Προκειμένου να εκτιμήσουμε την απόκριση συχνότητας χρειαζόμαστε δύο αποκρίσεις : την απόκριση συχνότητας του μέτρου και την απόκριση συχνότητας της φάσης
- Προκειμένου να μελετήσουμε σύνθετα κυκλώματα κάνουμε χρήση των αντίστοιχων συναρτήσεων μεταφοράς
- Στόχος μας είναι να απλοποιήσουμε το ισοδύναμο κύκλωμα προκειμένου να μπορούμε να το μελετήσουμε κάνοντας χρήση των αποκρίσεων απλών κυκλωμάτων
- Στην περίπτωση που στον ενισχυτή που μελετούμε υπάρχουν περισσότερες του ενός χωρητικότητες τότε εφαρμόζουμε υπέρθεση: εξετάσουμε την επίδραση του κάθε ενός ξεχωριστά και η συνολική απόκριση είναι η συνδυασμένη δράση αυτών

ΣΜ κυκλωμάτων μίας σταθεράς χρόνου

- Σημαντική βοήθεια για τον υπολογισμό της απόκρισης μας προσφέρει η γνώση της απόκρισης των δικτυωμάτων μίας σταθεράς χρόνου (Single Time Constant - STC).
- Δίκτυο STC χαρακτηρίζεται ένα δίκτυο (η οποιοδήποτε δίκτυο μπορεί να ελαχιστοποιηθεί σε ένα τέτοιο) το οποίο απαρτίζεται από μία αντίσταση και ένα παθητικό στοιχείο (χωρητικότητα ή αυτεπαγωγή).

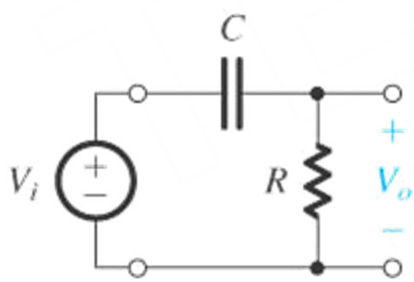


(a)

$$V_o = \frac{Z_C}{Z_C + R} V_i \Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = \frac{1/j\omega C}{1/j\omega C + R} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$\boxed{H(s) = \frac{1}{1+\tau s},} \quad s = j\omega, \quad \boxed{\tau = RC}$$

Σταθερά χρόνου



(b)

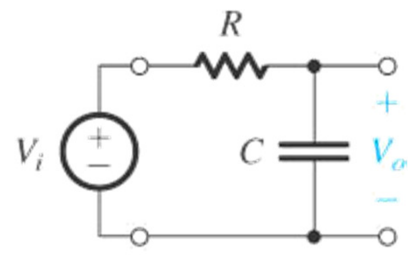
$$V_o = \frac{R}{Z_C + R} V_i \Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{1/j\omega C + R} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

$$\boxed{H(s) = \frac{\tau s}{1+\tau s},} \quad s = j\omega, \quad \boxed{\tau = RC}$$

Μικροηλεκτρονικά κυκλώματα – Sedra/Smith

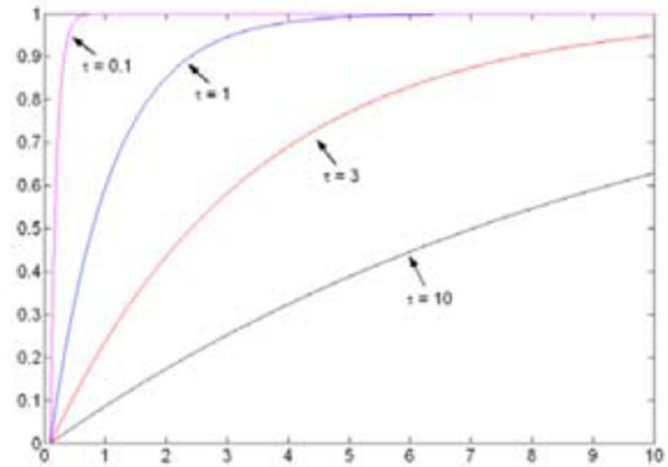
Χρονική απόκριση

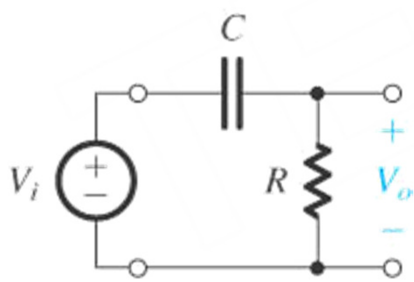
Αν θέσουμε στην είσοδο του δικτυώματος τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση (*πως το επιτυγχάνετε στην πράξη?*) θα έχουμε :



(a)

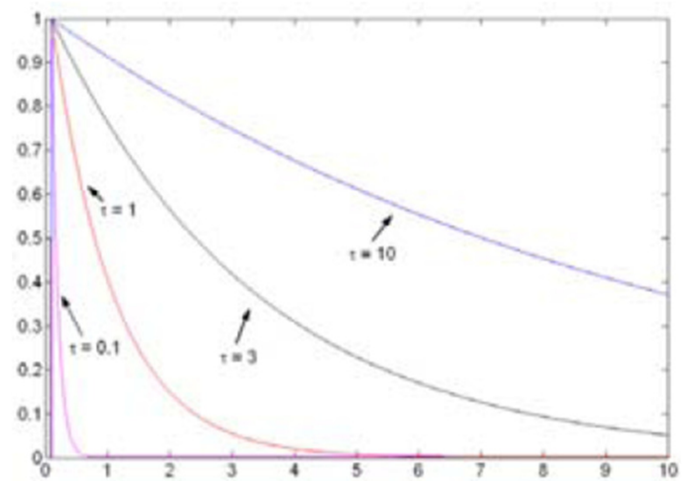
$$v_o(t) = 1 - e^{-t/\tau}$$





(b)

$$v_o(t) = e^{-t/\tau}$$

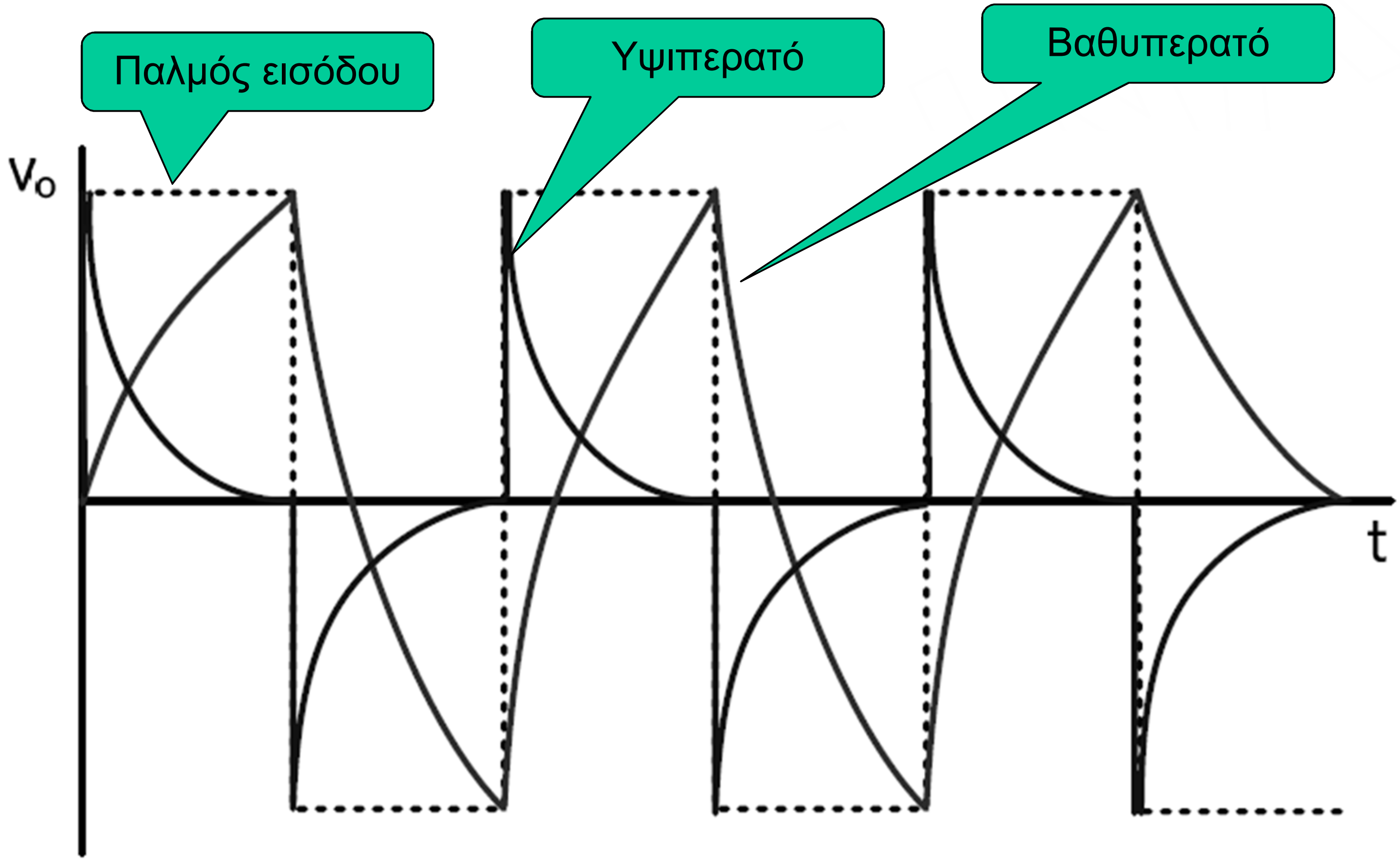


Μικροηλεκτρονικά κυκλώματα – Sedra/Smith

Ηλεκτρονικά ΙΙ, Χαριτάντης Γ.

Χρονική απόκριση (συν)

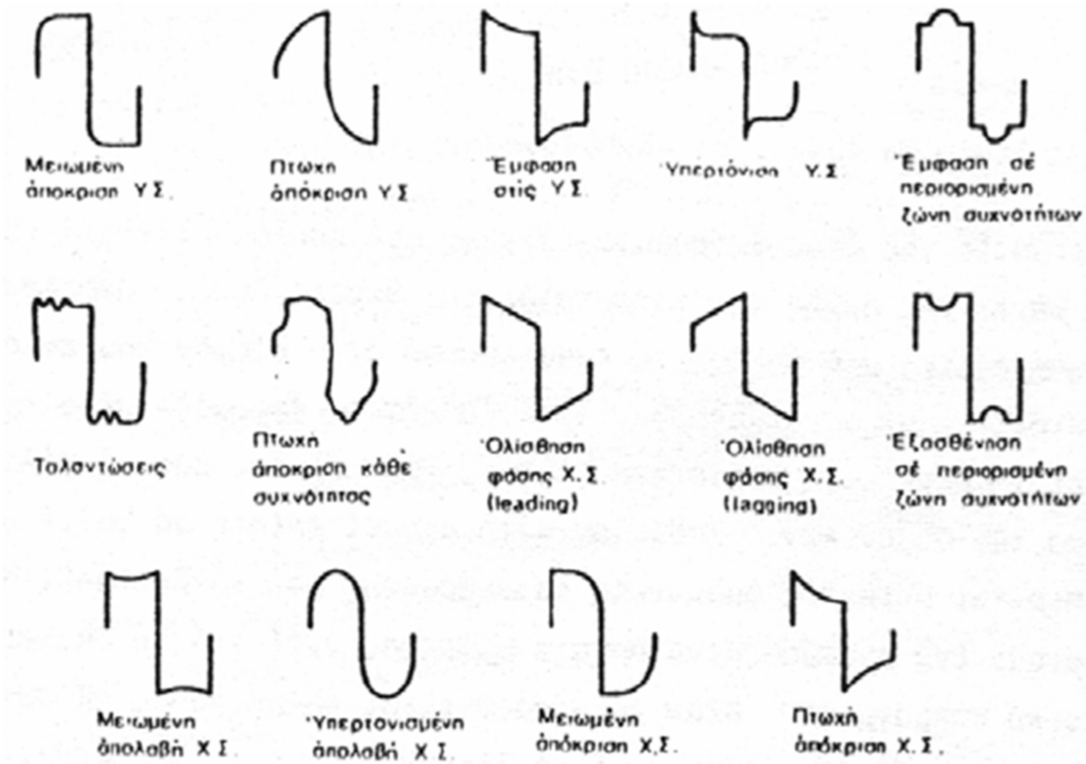
Εύκολα γίνεται κατανοητό ότι ένα βαθυπερατό δικτύωμα συμπεριφέρεται ως ολοκληρωτής ενώ ένα υψιπερατό ως διαφοριστής



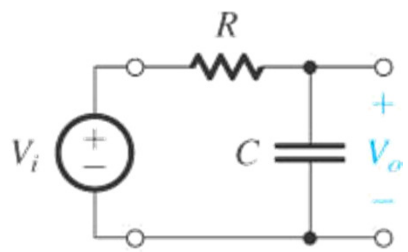
Ηλεκτρονικά ΙΙ, Χαριταντης Γ.

Έλεγχος παραμόρφωσης

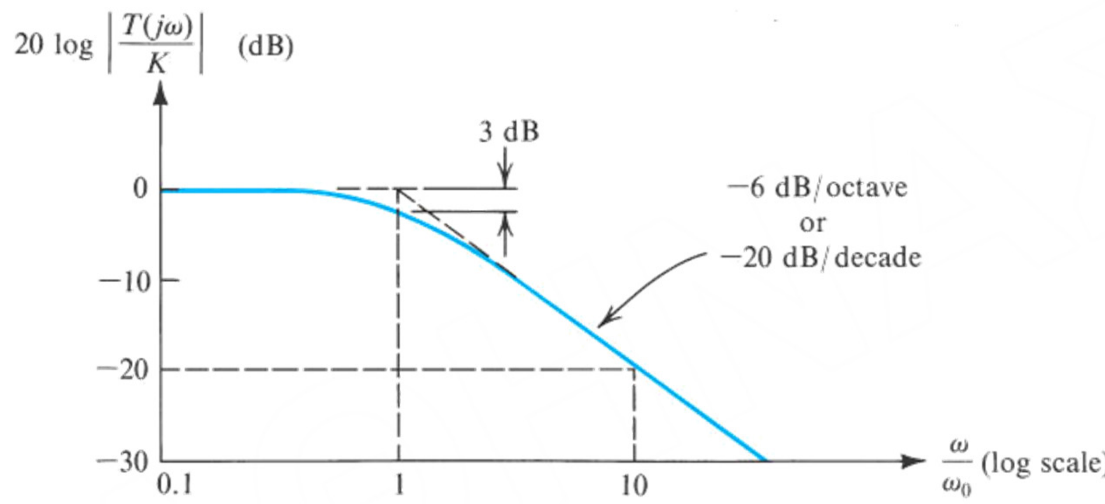
- Έλεγχος παραμόρφωσης ενισχυτικής διάταξης με χρήση τετραγωνικών κυματομορφών
- Μελετάται η διαφοροποίηση της εξόδου
- Η φύση της μεταβολής μας αποκαλύπτει και τα αίτια πρόκλησης αυτής



Απόκριση συχνότητας μέτρου βαθυπερατού



(a)



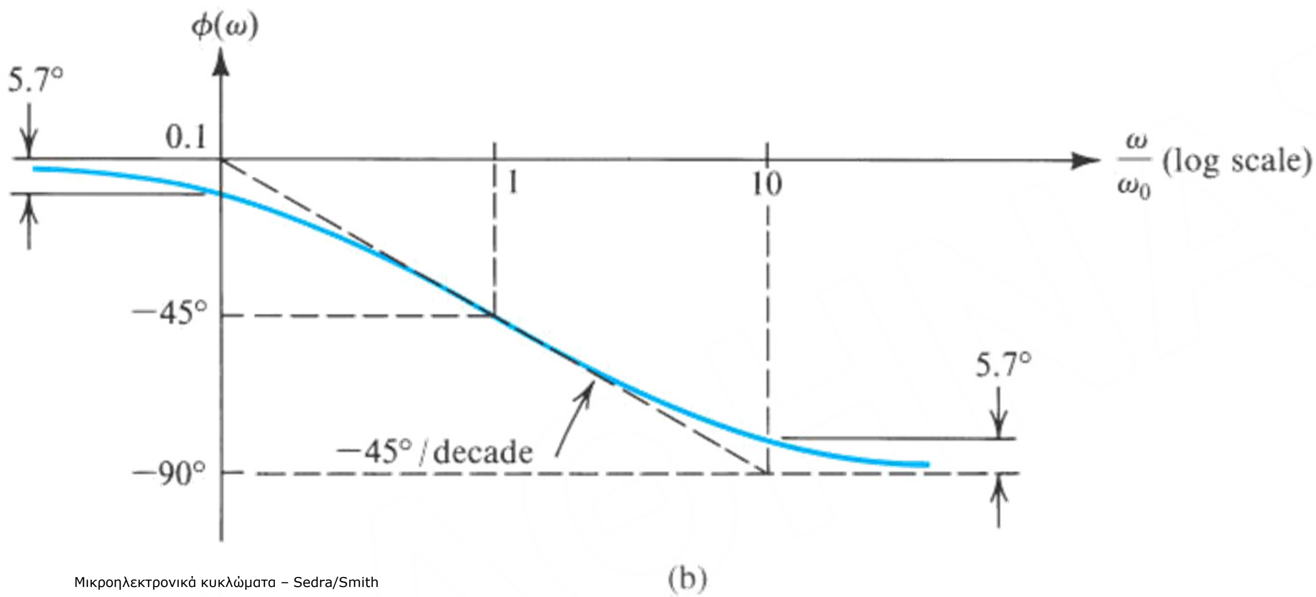
(a)

Μικροηλεκτρονικά κυκλώματα – Sedra/Smith

- Το σήμα εξόδου παραμένει αναλλοίωτο όταν η συχνότητα του σήματος εισόδου βρίσκεται εντός της ζώνης διέλευσης ($\omega<\omega_o$)
- *Θυμηθείτε:* όσο αυξάνει η συχνότητα τι συμβαίνει με τον πυκνωτή ?
- *Παρατηρήστε:* στην ουσία έχουμε έναν διαιρέτη τάσης με τάση εξόδου V_o

Μία οκτάβα → διπλασιασμός συχνότητας

Απόκριση συχνότητας φάσης βαθυπερατού



Μικροηλεκτρονικά κυκλώματα – Sedra/Smith

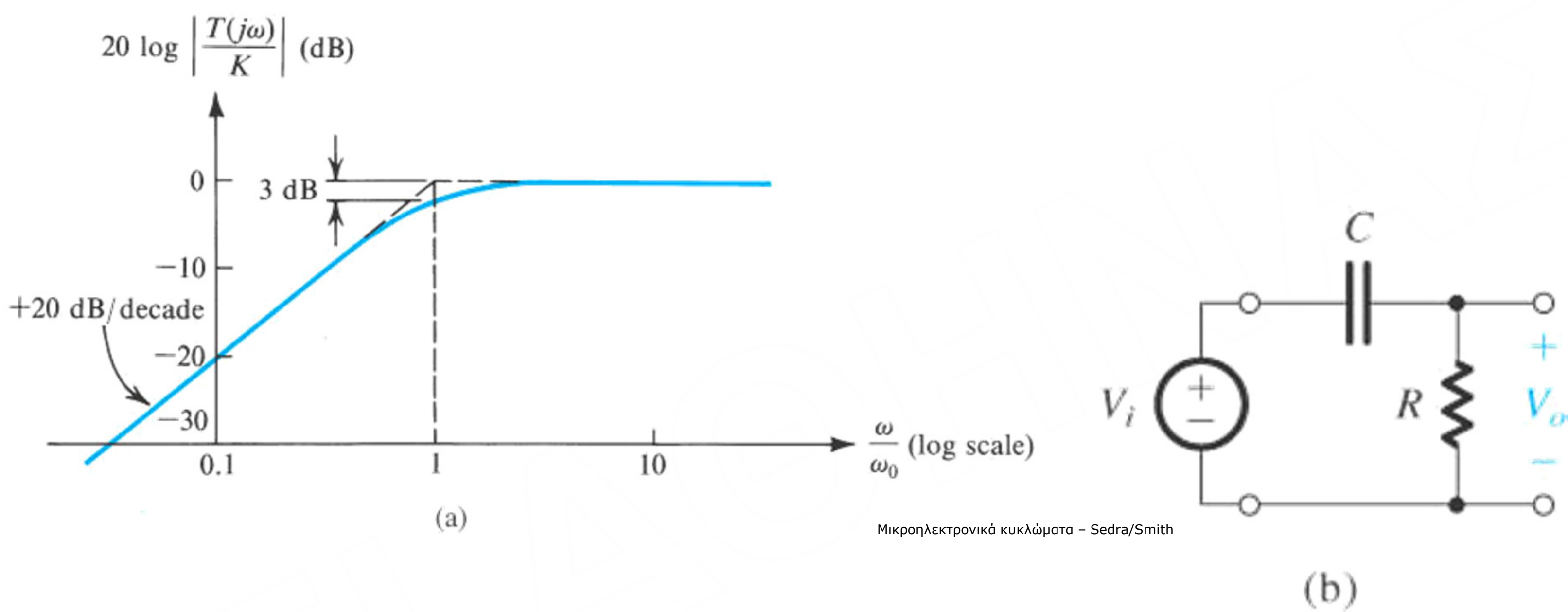
$$\varphi = \angle H(j\omega) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{\omega_c}$$

φ=0° για συχνότητες κάτω από τη συχνότητα γονάτου (καμπής) (ω<<ωο)

φ=-45° στη συχνότητα αποκοπής (ω=ωο)

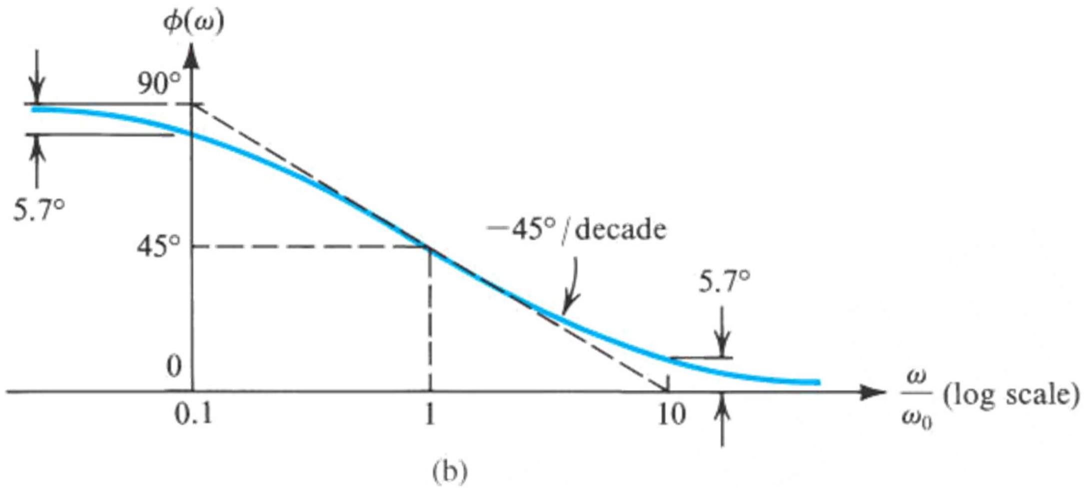
φ=-90° για συχνότητες πάνω από τη συχνότητα γονάτου (καμπής) (ω>>ωο)

Απόκριση συχνότητας μέτρου υψιπερατού



- Το σήμα εξόδου παραμένει αναλλοίωτο όταν η συχνότητα του σήματος εισόδου βρίσκεται εντός της ζώνης διέλευσης ($\omega > \omega_o$)
- *Παρατηρείστε:* τον πυκνωτή. Όσο αυξάνει η συχνότητα μειώνεται η αντίσταση του άρα όλο και μεγαλύτερο ποσοστό της τάσης εισόδου θα εμφανίζεται στα άκρα της αντίστασης (V_o)

Απόκριση συχνότητας φάσης υψιπερατού



Μικροηλεκτρονικά κυκλώματα – Sedra/Smith

$$\varphi = \angle H(j\omega) = 90° - \tan^{-1}\frac{\omega}{\omega_c}$$

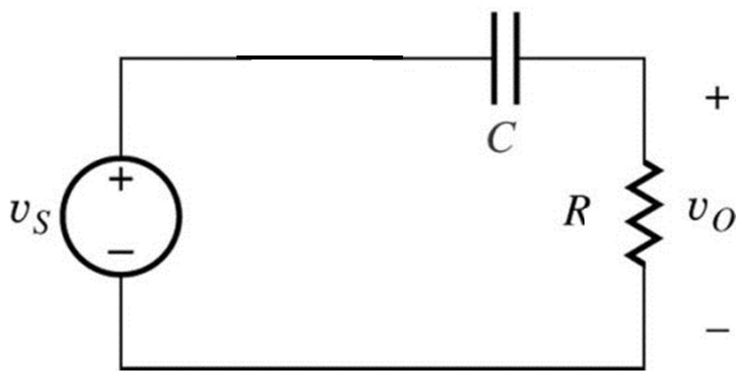
$\varphi=90^o$ για συχνότητες κάτω από τη συχνότητα γονάτου (καμπής) $(\omega<<\omega c)$

$\varphi=45^o$ στη συχνότητα αποκοπής $(\omega=\omega c)$

$\varphi=0^o$ για συχνότητες πάνω από τη συχνότητα γονάτου (καμπής) $(\omega>>\omega c)$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η ΣΜ του κάτωθι κυκλώματος



$$H(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{R}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{RsC}{1+sRC}=\frac{s\tau}{1+s\tau}$$

Η φυσική συχνότητα του δικτυώματος είναι

$$f_L=\frac{1}{2\pi RC}$$

ΛΥΣΗ: Η σύνθετη αντίσταση του πυκνωτή είναι $1/sC$. Χρησιμοποιώντας εξισώσεις διαιρέτη τάσης έχω

Η ημιτονική απόκριση λαμβάνεται αν $s=j\omega$. Έτσι

$$H(j\omega)=\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}\overset{\omega_L=1/RC}{=}\frac{j\omega RC}{1+j\omega\left(\frac{1}{\omega_L}\right)}=\frac{j\omega RC}{1+j\frac{\omega}{\omega_L}}$$

Συγκεντρωτικός πίνακας

	Βαθυπερατό (Low-Pass, LP)	Υψιπερατό (High-Pass, HP)
Συνάρτηση Μεταφοράς $T(s)$	$\frac{K}{1+(s/\omega_0)}$	$\frac{Ks}{s+\omega_0}$
Συνάρτηση Μεταφοράς (για φυσικές συχνότητες) $T(j\omega)$	$\frac{K}{1+j(\omega/\omega_0)}$	$\frac{K}{1-j(\omega_0/\omega)}$
Απόκριση Πλάτους $\lvert T(j\omega)\rvert$	$\frac{\lvert K\rvert}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}$	$\frac{\lvert K\rvert}{\sqrt{1+(\omega_0/\omega)^2}}$
Απόκριση Φάσης $\angle T(j\omega)$	$-\tan^{-1}(\omega/\omega_0)$	$\tan^{-1}(\omega_0/\omega)$
Διέλευση για $\omega = 0$ (dc)	K	0
Διέλευση για $\omega = \infty$	0	K
Συχνότητα 3 dB	$\omega_0 = 1/\tau$· $\tau \equiv$ σταθερά χρόνου $\tau = CR$ ή L/R	

ΠΡΟΣΟΧΗ: οι συναρτήσεις μεταφοράς παρουσιάζονται με τη γενική τους μορφή. Για τις περιπτώσεις που εξετάσαμε έχουμε **K=1**

Βαθυπερατός (LP) Ενισχυτής

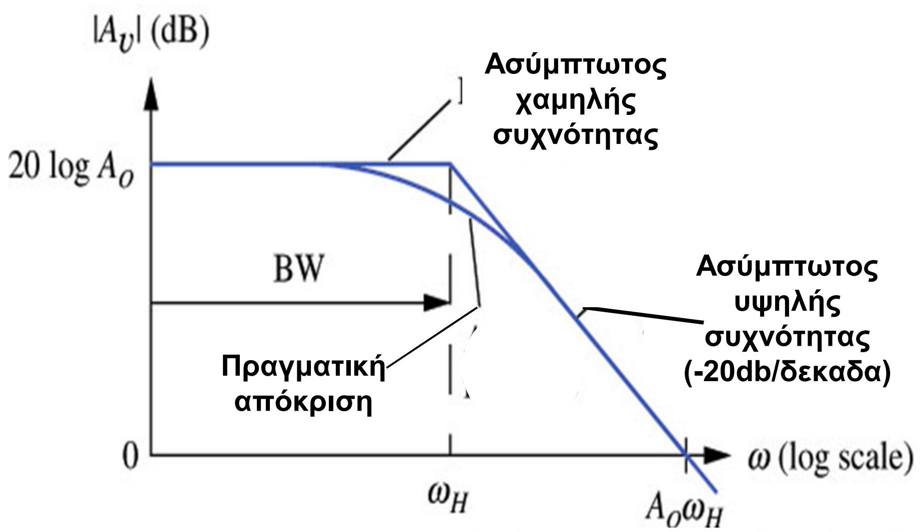
- ✓ Ενισχύει σήματα χαμηλών συχνοτήτων συμπεριλαμβανομένου και dc.
- ✓ Οι περισσότεροι ΤΕ έχουν σχεδιαστεί ως LP.
- ✓ Ο απλούστερος LP ενισχυτής (απλού πόλου) περιγράφεται από τη ΣΜ

$$A_v(s) = \frac{A_o \omega_H}{s + \omega_H} = \frac{A_o}{1 + \dfrac{s}{\omega_H}}$$

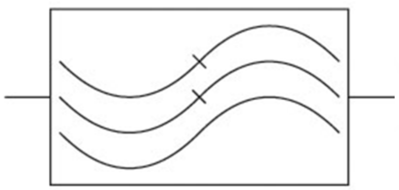
A_o = Απολαβή χαμηλής συχνότητας

ω_H = άνω συχνότητα αποκοπής ή άνω συχνότητα ημίσειας ισχύος.

LP Ενισχυτής : Απόκριση μέτρου



Microelectronic circuit design /5e – Jaeger/Blalock



$$|A_v(j\omega)| = \left|\frac{A_o\omega_H}{j\omega+\omega_H}\right| = \frac{|A_o\omega_H|}{\sqrt{\omega^2+\omega_H^2}}$$

$$|A_v(j\omega)|_{dB} = 20\log|A_o\omega_H| - 20\log\sqrt{\omega^2+\omega_H^2}$$

For $\omega \ll \omega_H$, $|A_v(j\omega)|_{dB} = A_o$ or $(20\log A_o)$ dB

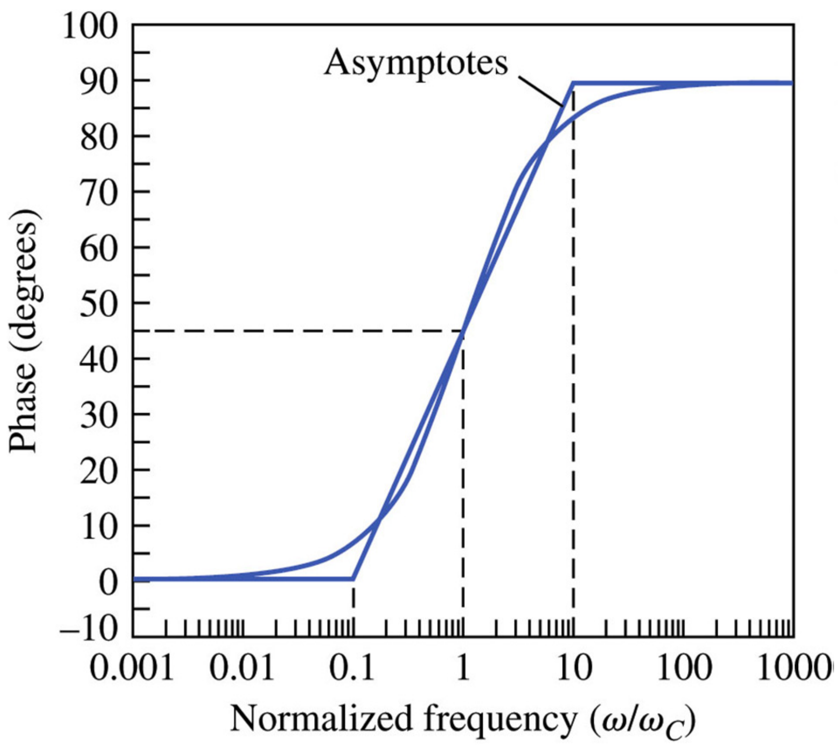
For $\omega \gg \omega_H$, $|A_v(j\omega)| = \dfrac{A_o\omega_H}{\omega}$ or $\left(20\log A_o - 20\log\dfrac{\omega}{\omega_H}\right)$dB

For $\omega = \omega_H$, $|A_v(j\omega)| = \dfrac{A_o}{\sqrt{2}}$ or $[(20\log A_o) - 3]$ dB

Εύρος ζώνης (Bandwidth – BW) Περιοχή συχνοτήτων στην οποία η ενίσχυση είναι σχεδόν σταθερή. Εκφράζεται ως ω_H (rad/s) ή $f_H = \omega_H/2\pi$ (Hz)

Απόκριση φάσης

Απόκριση αντίστροφης εφαπτομένης $\tan^{-1}(\omega/\omega_H)$ σε σχέση με κανονικοποιημένη συχνότητα



Microelectronic circuit design /5e – Jaeger/Blalock

Απόκριση LP ενισχυτή (αντικαθιστώ $s=j\omega$) στη ΣΜ απλού πόλου:

$$\angle A_v(j\omega) = \angle \frac{A_o}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_H}} = \angle A_o - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_H}\right)$$

Αν A_o θετική: γωνία φάσης = 0^0

Αν A_o αρνητική: γωνία φάσης = 180^0

Στη συχνότητα ω_C : **(πόλος ή μηδενικό)** φάση = 45^0

Μία δεκάδα κάτω από ω_H: φάση = 5.7^0

Μία δεκάδα πάνω από ω_H: φάση = 84.3^0

Δύο δεκάδες κάτω από ω_H: φάση ~ 0^0

Δύο δεκάδες πάνω από ω_H: φάση ~ 90^0

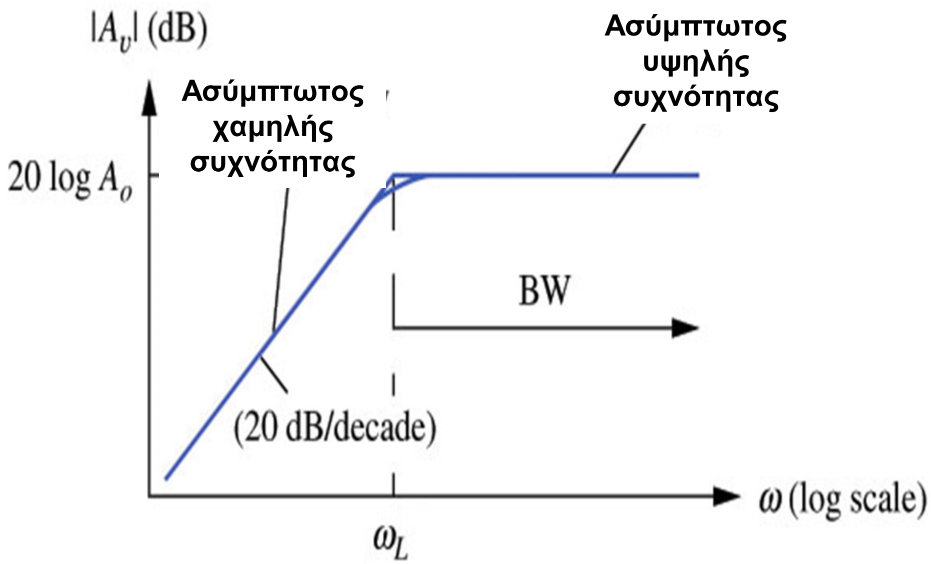
Υψιπερατός (HP) Ενισχυτής

- **Πραγματικά** υψιπερατά χαρακτηριστικά είναι αδύνατον να επιτευχθούν διότι χρειάζεται άπειρο εύρος ζώνης.
- Ο απλούστερος HP (απλού πόλου) περιγράφεται από τη ΣΜ

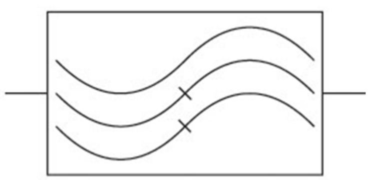
$$A_v(s) = \frac{A_o s}{s+\omega_L} = \frac{A_o}{1+\frac{\omega_L}{s}}$$

ω_L = κατώτερη συχνότητα αποκοπής ή κατώτερο σημείο ημίσειας ισχύος

HP ενισχυτής: απόκριση μέτρου και φάσης



Microelectronic circuit design /5e – Jaeger/Blalock



High-pass

$$|A_v(j\omega)| = \left|\frac{A_O j\omega}{j\omega + \omega_L}\right| = \frac{A_o\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_L^2}}$$

For $\omega >> \omega_L$, $|A_v(j\omega)| = A_o$ or $(20\log A_o)$ dB

For $\omega << \omega_L$, $|A_v(j\omega)| = \dfrac{A_o\omega}{\omega_L}$ or $\left(20\log A_o + 20\log\dfrac{\omega}{\omega_L}\right)$ dB

For $\omega = \omega_L$, $|A_v(j\omega)| = \dfrac{A_o}{\sqrt{2}}$ or $\left[(20\log A_o) - 3\right]$ dB

- ✓ Θεωρητικό BW άπειρο (όχι όμως στην πράξη – θυμηθείτε γιατί δεν γίνεται)
- ✓ Απόκριση φάσης δίνεται από την: $\angle A_v(j\omega) = \angle\dfrac{A_o j\omega}{j\omega + j\omega_L} = \angle A_o + 90^0 - \tan^{-1}\left(\dfrac{\omega}{\omega_L}\right)$

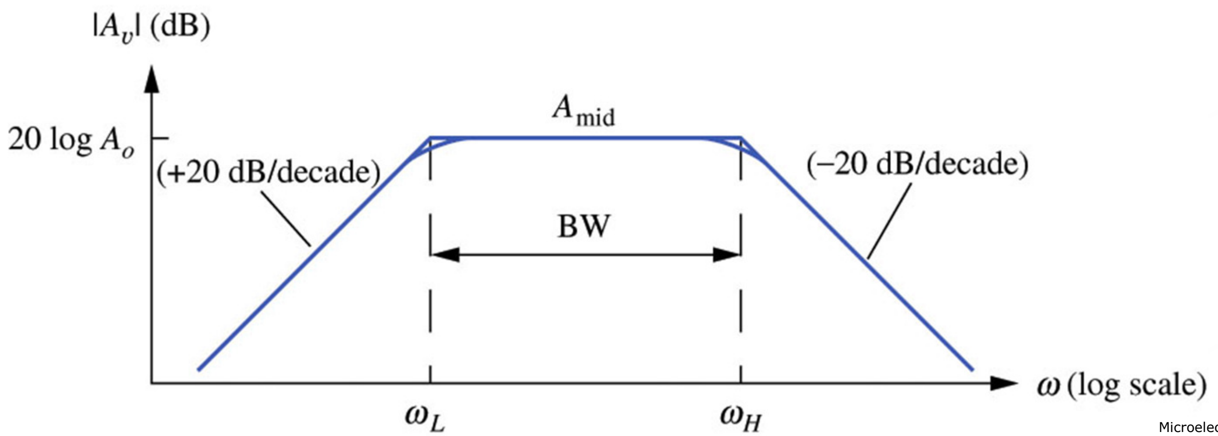
Ζωνοπερατός (Band Pass-BP) ενισχυτής

- Τα χαρακτηριστικά του BP ενισχυτή εξάγονται με σύνθεση των χαρακτηριστικών LP
- Η συνάρτηση μεταφοράς του δίνεται από :

$$A_v(s) = \frac{A_o s \omega_H}{(s+\omega_L)(s+\omega_H)} = A_o \frac{s}{(s+\omega_L)} \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_H}+1\right)}$$

- Ενισχυτές με σύζευξη ac παρουσιάζουν συμπεριφορά BP:
  - Οι πυκνωτές σύζευξης επηρεάζουν τη μετατόπιση χαμηλής συχνότητας
  - Η μετατόπιση υψηλής συχνότητας επηρεάζεται κυρίως από τους περιορισμούς των διακριτών εξαρτημάτων.

BP ενισχυτής: απόκριση μέτρου και φάσης



Microelectronic circuit design /5e – Jaeger/Blalock

- Η απόκριση συχνότητας δείχνει μια ευρεία περιοχή λειτουργίας
- Οι συχνότητες αποκοπής είναι

$$\omega_L \le \omega \le \omega_H \qquad |A_v(j\omega)| \cong A_o$$

- Απόκριση μέτρου

$$|A_v(j\omega)| = \left| \frac{A_o (j\omega)\omega_H}{(j\omega+\omega_L)(j\omega+\omega_H)} \right| = \frac{A_o \omega\omega_H}{\sqrt{(\omega^2+\omega_L^2)(\omega^2+\omega_H^2)}}$$

BP ενισχυτής: απόκριση μέτρου και φάσης (2)

- Τόσο στην ω_H όσο και στην ω_L, υποθέτοντας ότι $\omega_L << \omega_H$, έχουμε

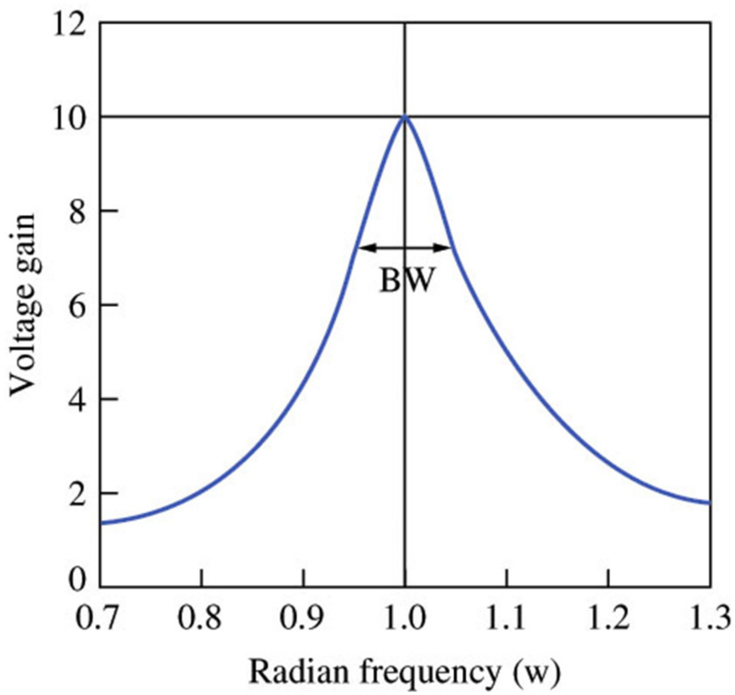
$$\left|A_v(j\omega_L)\right| = \left|A_v(j\omega_H)\right| = \frac{A_o}{\sqrt{2}} \quad \text{or} \quad \left[(20\log A_o) - 3\right] \text{dB}$$

- Εύρος ζώνης (Bandwidth) BW = ω_H - ω_L.

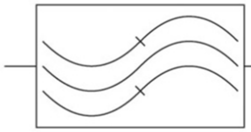
- Απόκριση φάσης

$$\angle A_v(j\omega) = \angle \frac{A_o j\omega}{j\omega + j\omega_L} = \angle A_o + 90^0 - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_L}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_H}\right)$$

Ζωνοπερατοι ενισχυτές στενής ζώνης ή υψηλού Q



Microelectronic circuit design /5e – Jaeger/Blalock



Αν A_o θετική:
γωνία φάσης = 90° , για $\omega << \omega_o$
γωνία φάσης = 0° , για $\omega = \omega_o$
γωνία φάσης = -90° , για $\omega >> \omega_o$

- Μέγιστη απολαβή στην κεντρική συχνότητα ω_o με απότομη μείωση κατά 3dB στις ω_H και ω_L.
- Bandwidth = ω_H - ω_L, (είναι ένα μικρό κλάσμα της κεντρικής συχνότητας ω_o)

$$Q = \frac{\omega_o}{\omega_H - \omega_L} = \frac{f_o}{f_H - f_L} = \frac{f_o}{BW}$$

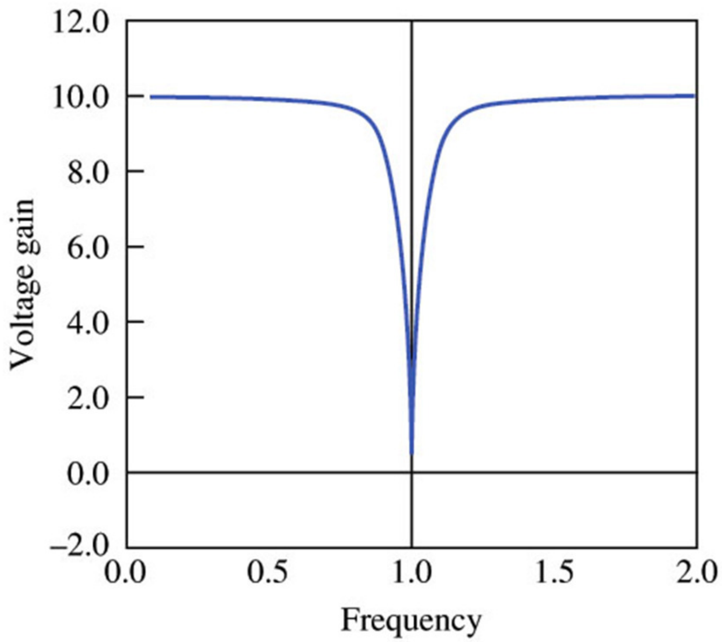
- Για υψηλό Q, οι πόλοι θα είναι μιγαδικοί

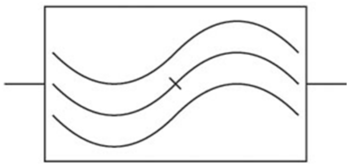
$$A_v(s) = A_o \frac{s\frac{\omega_o}{Q}}{s^2 + s\frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2}$$

- Απόκριση φάσης:

$$\angle A_v(j\omega) = \angle A_o + 90^0 - \tan^{-1}\left(\frac{1}{Q}\frac{\omega\omega_o}{\omega_o^2 - \omega^2}\right)$$

Ενισχυτές απόρριψης ζώνης





Microelectronic circuit design /5e – Jaeger/Blalock

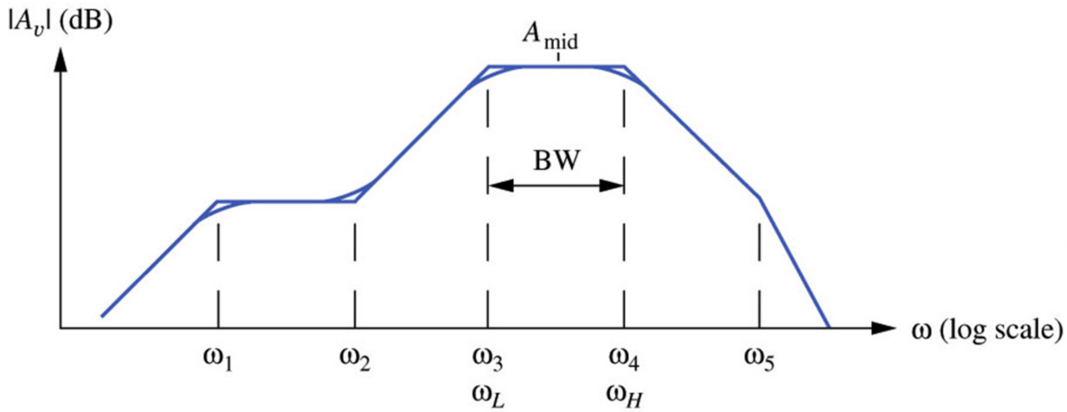
- Μέγιστη απολαβή σε συχνότητες απομακρυσμένες από την ω_o ενώ παρουσιάζει έναν οξύ μηδενισμό στην ω_o.
- Για να επιτευχθεί ο οξύς μηδενισμός, η ΣΜ έχει ένα ζεύγος μηδενικών στον άξονα $j\omega$ στη συχνότητα ω_o , και οι πόλοι είναι μιγαδικοί

$$A_v(s) = A_o \frac{s^2+\omega_o^2}{s^2+s\frac{\omega_o}{Q}+\omega_o^2}$$

- Απόκριση φάσης:

$$\angle A_v(j\omega) = \angle A_o + \angle\left(\omega_o^2-\omega^2\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{Q}\right)\left(\frac{\omega\omega_o}{\omega_o^2-\omega^2}\right)$$

Σύνθετες συναρτήσεις μεταφοράς



$$A_v(s)=\frac{Ks(s+\omega_2)}{(s+\omega_1)(s+\omega_3)(s+\omega_4)(s+\omega_5)}$$

$$A_v(s)=\frac{A_{mid}s(s+\omega_2)}{(s+\omega_1)(s+\omega_3)\left(\frac{s}{\omega_4}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_5}+1\right)}$$

Ο ενισχυτής παρουσιάζει 2 περιοχές συχνοτήτων με σταθερή απολαβή. Η περιοχή μέσου ζώνης ορίζεται πάντοτε η περιοχή με την υψηλότερη απολαβή. Οι συχνότητες αποκοπής ορίζονται με βάση την απολαβή μέσου ζώνης.

$$|A_v(j\omega_L)|=|A_v(j\omega_H)|=\frac{A_{mid}}{\sqrt{2}}$$

Εφόσον $\omega_H \cong \omega_4$ και $\omega_L \cong \omega_3$,

$$\mathrm{BW}=f_4-f_3=\frac{\omega_4-\omega_3}{2\pi}$$