

ΑΣΚΗΣΗ 4.1

Σε σώμα μάζας $m = 1\text{Kg}$ ασκείται η δύναμη $\vec{F} = -5\hat{j}$, όπου \hat{j} το μοναδιαίο διάνυσμα κατακόρυφης διεύθυνσης με φορά προς τα πάνω.

α) να υπολογίσετε το έργο για τη μετατόπιση του σώματος από τη θέση $A = 10\hat{j}$ μέχρι την αρχή των αξόνων, O , με τη σχέση $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Να σχηματίσετε τον κατακόρυφο άξονα όπου θα φαίνονται τα διανύσματα F, j και τα σημεία O και A .

β) να βρείτε τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας του σώματος.

γ) να υπολογίσετε το έργο για τη μετατόπιση του σώματος από τη θέση $A = 10\hat{j}$ μέχρι την αρχή των αξόνων, O , με βάση τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας.

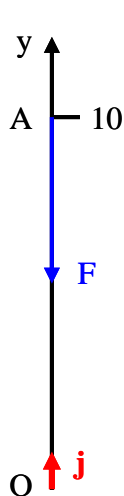
δ) να εξηγήσετε αν το έργο που βρήκατε στα ερωτήματα α) και γ) εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθεί το σώμα από την αρχική στην τελική θέση.

ε) να αποδείξετε ότι η τριβή ολίσθησης είναι μη συντηρητική δύναμη (υπόδειξη: μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις ιδέες του ερωτήματος δ)

Λύση:

α) Κανονικά θα πρέπει να συμπεριλάβουμε και τη δύναμη του βάρους, οπότε στο σώμα ασκείται συνολικά δύναμη $\vec{F} = -15\hat{j}$, θεωρώντας ότι το βάρος $B = mg = 10\text{ N}$. Επειδή όμως η εκφώνηση ζητά το έργο με τη σχέση $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ δεκτή είναι και η λύση όπου το βάρος δε συνυπολογίζεται στη συνολική δύναμη. Με αυτή την προσέγγιση ακολουθεί η ενδεικτική λύση.

Σχηματικά έχουμε:



Το έργο για τη μετατόπιση του σώματος από τη θέση $A = 10\hat{j}$ μέχρι την αρχή των αξόνων, O , δίνεται από τη σχέση:

$$W = \int_A^O \vec{F} \cdot d\vec{y} = \int_A^O -5dy \hat{j} \cdot \hat{j} = \int_{10}^0 -5dy = 50J \quad (1)$$

β) Η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι:

$$F = -\frac{dU}{dy} \Rightarrow dU = -Fdy \Rightarrow \int_0^U dU = -\int_0^y -5dy \Rightarrow U = 5y \quad (2)$$

όπου θεωρήσαμε ότι για $y = 0$ έχουμε $U = 0$ (επιλογή επιπέδου μηδενικής δυναμικής ενέργειας).

γ) Αφού η δύναμη F είναι συντηρητική (πηγάει από δυναμική ενέργεια) ισχύει ότι το έργο για τη μετατόπιση του σώματος από τη θέση $A = 10\hat{j}$ μέχρι την αρχή των αξόνων, O , με βάση τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας θα είναι:

$$W = U(A) - U(O) = (50 - 0)J = 50J \quad (3)$$

που είναι βέβαια ίδιο με εκείνο της σχέσης (1)

δ) το έργο που βρήκαμε στα ερωτήματα α) και γ) ΔΕΝ εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθεί το σώμα από την αρχική στην τελική θέση διότι η δύναμη είναι συντηρητική. Το έργο εξαρτάται μόνο από τη διαφορά της δυναμικής ενέργειας

μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης (βλ. σχέση (3)).

ε) μια γρήγορη απόδειξη είναι να υποθέσουμε ότι η τριβή είναι συντηρητική δύναμη και να καταλήξουμε σε αντίφαση. Θεωρούμε σώμα που κινείται στο οριζόντιο επίπεδο με την τριβή ολίσθησης να είναι πάντα αντίθετη στη φορά κίνησης. Χωρίς απώλεια της γενικότητας θεωρούμε ότι το μέτρο της είναι σταθερό ίσο με T . Επίσης, θεωρούμε ότι το σώμα εκτελεί τη διαδρομή από το σημείο O , αρχή των αξόνων, μέχρι το σημείο A και στη συνέχεια από το σημείο A πίσω στο O . Δηλαδή στη διαδρομή αυτή αρχικό και τελικό σημείο συμπίπτουν. Από την υπόθεση ότι η τριβή είναι συντηρητική δύναμη, το έργο για τη διαδρομή OAO θα είναι (βλ. σχέση (3)):

$$W = U(O) - U(O) = 0 \quad (4)$$

όμως ισχύει ότι:

$$W(OAO) = W(OA) + W(AO) = -T \cdot (OA) - T \cdot (OA) = -2T \cdot (OA) \quad (5)$$

Επομένως, αφού $-2T(OA) \neq 0$ καταλήξαμε σε αντίφαση, δηλαδή η αρχική μας υπόθεση είναι λανθασμένη και η τριβή δεν είναι συντηρητική δύναμη.

ΑΣΚΗΣΗ 4.2

Σώμα μάζας $m = 4 \text{ Kg}$ κινείται σε περιοχή όπου η δυναμική του ενέργεια δίνεται από τη σχέση $U(x) = A x^2$, όπου x η θέση του σώματος σε m . Η σταθερά A έχει αριθμητική τιμή 2.

α) Να βρείτε τη διάσταση της σταθεράς A .

β) Να υπολογίσετε τη δύναμη F

γ) Το σώμα περνά από την αρχή των αξόνων με ταχύτητα $v = 5 \text{ m/s}$. Να προσδιορίσετε την περιοχή μέσα στην οποία μπορεί να κινηθεί το σώμα αν δε δέχεται άλλες δυνάμεις.

Λύση:

α) Η διάσταση της σταθεράς A είναι:

$$[A] = \frac{[U]}{[x]^2}$$

και το U είναι ενέργεια (με μονάδα $J = N m = Kg m s^{-2} m$) με $[U] = ML^2 T^{-2}$ και $[x] = L$, άρα:

$$[A] = \frac{ML^2 T^{-2}}{L^2} = M T^{-2}$$

$$\text{β) } F = -\frac{dU}{dx} = -2Ax = -4x \text{ (N)}$$

γ) Αφού στο σώμα δεν ασκούνται άλλες δυνάμεις και η δύναμη F είναι συντηρητική η ενέργεια διατηρείται. Στην αρχή των αξόνων, $x=0$, $U=0$, οπότε η ενέργεια είναι μόνο κινητική:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 4 \text{ Kg } 25 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 50 \text{ J} \quad (1)$$

Το σώμα μπορεί να μετακινηθεί στην περιοχή όπου η δυναμική του ενέργεια είναι μικρότερη ή ίση με τη συνολική του ενέργεια. Όταν $U(x) = E$ ισχύει:

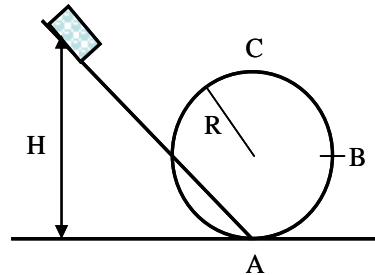
$$2x^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow x^2 = \frac{mv^2}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{v\sqrt{m}}{2} = \pm 5\text{ m}$$

Τελικά, το σώμα μπορεί να κινηθεί στην περιοχή $[-5, 5]$ m.

ΑΣΚΗΣΗ 4.3

Σώμα μάζας m βρίσκεται αρχικά σε ύψος H πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο. Μόλις φθάσει στη βάση του επιπέδου διαγράφει λεία κυκλική τροχιά με ακτίνα R . Να βρείτε:

- το ελάχιστο ύψος H από το οποίο πρέπει να αφήσουμε το σώμα για να κάνει ανακύκλωση.
- την κάθετη αντίδραση N_B που ασκείται στο σώμα στο σημείο B.
- την κάθετη αντίδραση N_A που ασκείται στο σώμα στο κατώτατο σημείο της κυκλικής τροχιάς A.
- το έργο των δυνάμεων από το σημείο A μέχρι το σημείο C.



Λύση:

α) Αρχή διατήρησης ενέργειας:

$$mgH = mg2R + \frac{1}{2}mv_C^2 \quad (1)$$

και για να βρούμε το ελάχιστο ύψος θα πρέπει στο σημείο C η κάθετη αντίδραση να είναι 0, επομένως

$$\frac{mv_C^2}{R} = mg \Rightarrow v_C = \sqrt{gR} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $H = 5R/2$.

β) στο σημείο B η κάθετη αντίδραση είναι και κεντρομόλος, άρα: $N_B = \frac{mv_B^2}{R}$ και την ταχύτητα v_B τη βρίσκουμε από την αρχή διατήρησης ενέργειας:
 $mg \frac{5R}{2} = mgR + \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_B^2 = 3gR$. Τελικά, $N_B = 3mg$.

γ) στο σημείο A ισχύει $N_A - mg = \frac{mv_A^2}{R}$ και την ταχύτητα v_A τη βρίσκουμε από την αρχή διατήρησης ενέργειας: $mg \frac{5R}{2} = \frac{1}{2}mv_A^2 \Rightarrow v_A^2 = 5gR$. Τελικά, $N_A = 6mg$.

δ) $W = \Delta E_K = E_K^C - E_K^A = -2mgR$, αφού $E_K^C = \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}mgR$ και

$$E_K^A = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{5}{2}mgR$$

Εναλλακτικά: $W = -\Delta U = U(A) - U(C) = -2mgR$, αφού $U(A)=0$ και $U(C)=2mgR$.

ΑΣΚΗΣΗ 4.4

Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος είναι ίση με $U(x) = -\frac{A}{x} + \frac{A^2}{x^2}$, όπου A θετική

σταθερά. Να βρείτε:

α) Τη δύναμη που ασκείται στο σώμα.

β) Τις θέσεις ισορροπίας του σώματος.

γ) Το είδος ισορροπίας του σώματος για τις θέσεις του ερωτήματος β.

Λύση:

α) Η δύναμη, $F(x)$, δίνεται από τη σχέση:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\left(\frac{A}{x^2} - \frac{2A^2}{x^3}\right) = -\frac{A}{x^2}\left(1 - \frac{2A}{x}\right) \quad (1)$$

β) Στις θέσεις ισορροπίας ισχύει ότι $F(x)=0$, οπότε από τη σχέση (1) λαμβάνουμε:

$$-\frac{A}{x^2}\left(1 - \frac{2A}{x}\right) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2A}{x} = 0 \Rightarrow x = 2A$$

γ) Για το είδος ισορροπίας της θέσης $x=2A$, ελέγχουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης $U(x)$ στη θέση αυτή:

$$U'(x) = \frac{dU}{dx} = \frac{A}{x^2} - \frac{2A^2}{x^3}$$

$$U''(x) = \frac{dU'}{dx} = -\frac{2A}{x^3} + \frac{6A^2}{x^4} \quad (2)$$

Η σχέση (2) για $x=2A$ δίνει:

$$U''(2A) = -\frac{2A}{8A^3} + \frac{6A^2}{16A^4} = \frac{1}{8A^2} > 0, \text{ αφού το } A \text{ είναι θετική σταθερά.}$$

Άρα η συνάρτηση $U(x)$ στο σημείο $x=2A$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο και επομένως η θέση $x=2A$ είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας.

ΑΣΚΗΣΗ 4.5

Σε σώμα μάζας $m = 2\text{Kg}$ που βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι και είναι αρχικά σε ηρεμία, ασκείται η οριζόντια δύναμη $F(t)=10t$ (σε N), όπου t ο χρόνος. Να βρεθεί το έργο που παράγεται στα δύο πρώτα δευτερόλεπτα της κίνησής του

α) από τη δύναμη $F(t)$.

β) από το βάρος του.

Λύση:

α) Η μόνη οριζόντια δύναμη είναι η $F(t)$, οπότε:

$$F = m\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F}{m} = 5t \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Η ταχύτητα του σώματος, χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες, είναι:

$$v = 5/2 t^2 \quad (1)$$

οπότε για $t = 2 \text{ s}$, $v(2\text{s}) = 10 \text{ m/s}$.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας:

$$W = \frac{1}{2} m v^2(2\text{s}) - 0 = 100 \text{ J}$$

Εναλλακτικά:

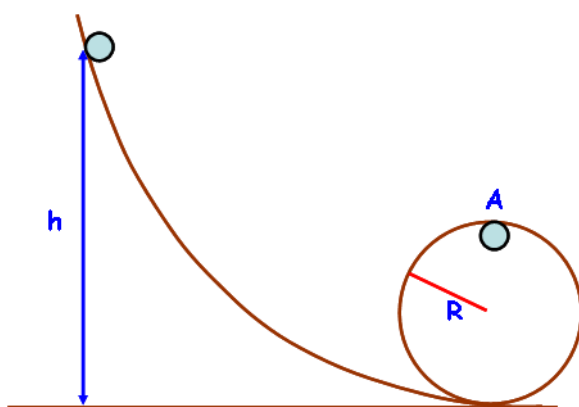
$$W = \int F(t) dx = \int F(t) \frac{dt}{dt} dx = \int F(t) v(t) dt$$

οπότε από τις σχέσεις (1) και $F(t)=10 t$ το έργο που παράγεται στα δύο πρώτα δευτερόλεπτα της κίνησής του είναι:

$$W = \int_0^2 10 t \frac{5t^2}{2} = 25 \frac{t^4}{4} \Big|_0^2 = 100 \text{ J}$$

Προσοχή: το έργο που υπολογίζεται από το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας συμπίπτει με εκείνο της δύναμης $F(t)$ διότι οι υπόλοιπες δυνάμεις δεν παράγουν έργο!

β) Το έργο του βάρους είναι μηδενικό αφού το βάρος είναι κάθετο στη μετατόπιση.



ΑΣΚΗΣΗ 4.6

Σώμα μάζας m βρίσκεται πάνω στη λεία τροχιά του σχήματος. Να βρεθούν: α) η ταχύτητα στο A και, β) η κάθετη αντίδραση στο A .

Λύση:

Θέτουμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το δάπεδο, άρα εκεί έχουμε $U=0$. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας

(ΑΔΜΕ) έχουμε ότι: (Ο είναι το αρχικό σημείο που βρίσκεται το σώμα)

$$E_O = mgh \text{ και } E_A = \frac{1}{2}mv^2 + mg2R$$

αφού από ΑΔΜΕ $E_O = E_A$ ισχύει:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg2R \Rightarrow v = \sqrt{2g(h - 2R)} \quad (1)$$

Για την κάθετη αντίδραση, N, στο σημείο A έχουμε ότι το άθροισμα N και βάρους, mg, θα ισούται με την κεντρομόλο δύναμη, άρα:

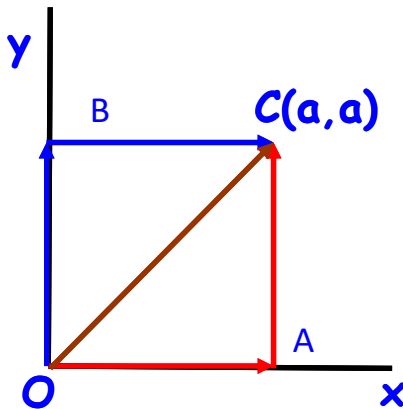
$$N + mg = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow N = \frac{mv^2}{R} - mg \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε ότι:

$$N = 2mg \frac{h}{R} - 5mg$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.7

Σώμα κινείται από το Ο στο C ακολουθώντας τις 3 διαφορετικές χρωματιστές διαδρομές. Πόσο είναι το έργο του βάρους; Τι συμπέρασμα βγάζετε; Τι διαφοροποιείται αν αντί για βάρους έχουμε μόνο τριβή;



Λύση:

Γαλάζια διαδρομή: για να κινηθεί το σώμα κατακόρυφα, και να πάει από το Ο στο Β το έργο του βάρους είναι $W_{OB} = -mga$. Για να κινηθεί από το Β στο C το έργο του βάρους είναι $W_{BC} = 0$. Επομένως, το έργο του βάρους είναι $W = -mga$.

Αναλυτικά:

$$\begin{aligned} W_{OBC} &= \int_{OBC} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_O^B \vec{B} \cdot d\vec{y} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{x} \\ &= \int_0^a -B\hat{j} \cdot dy\hat{j} + \int_0^a -B\hat{j} \cdot dx\hat{i} \\ &= -mga \end{aligned}$$

Κόκκινη διαδρομή: Για να κινηθεί το σώμα από το Ο στο Α το έργο του βάρους είναι $W_{OA} = 0$, ενώ για να κινηθεί το σώμα κατακόρυφα, και να πάει από το Α στο C το έργο του βάρους είναι $W_{AC} = -mga$. Επομένως, το έργο του βάρους είναι $W = -mga$.

Αναλυτικά:

$$W_{OAC} = \int_{OAC} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_O^A \vec{B} \cdot d\vec{x} + \int_A^C \vec{B} \cdot d\vec{y} = \int_0^a -B\hat{j} \cdot dx\hat{i} + \int_0^a -B\hat{j} \cdot dy\hat{j} = -mga$$

Καφέ διαδρομή:

$$W_{OC} = \int_{OC} \vec{B} \cdot d\vec{r}$$

Τώρα όμως ισχύει: $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$ οπότε:

$$\begin{aligned} W_{OC} &= \int_{OC} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_{OC} -B\hat{j} \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) = \int_0^a -Bdx \hat{j} \cdot \hat{i} + \int_0^a -Bdy \hat{j} \cdot \hat{j}) \\ &= 0 - mga = -mga \end{aligned}$$

Συμπέρασμα: το έργο του βάρους μεταξύ δύο σημείων είναι **ανεξάρτητο από τη διαδρομή** που ακολουθούμε διότι το βάρος είναι δύναμη συντηρητική.

Αν αντί για βάρος έχουμε τριβή, T_a , τότε:

$$W_{OB \rightarrow BC} = -2 \alpha T$$

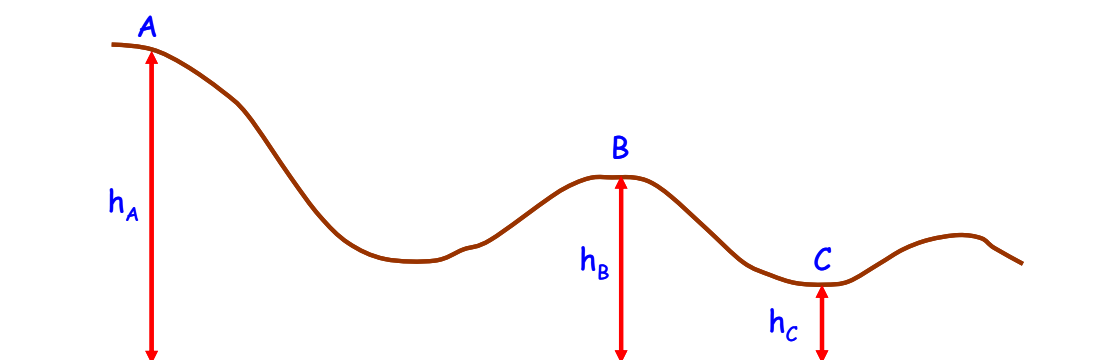
$$W_{OA \rightarrow AC} = -2 \alpha T$$

$$W_{OC} = -\sqrt{2}\alpha T_a$$

οπότε στην περίπτωση της τριβής το έργο μεταξύ δύο σημείων **εξαρτάται από τη διαδρομή** που ακολουθούμε διότι η τριβή είναι δύναμη μη-συντηρητική

ΑΣΚΗΣΗ 4.8

Μάζα, m , βρίσκεται στη λεία τσουλήθρα όπως στο παρακάτω σχήμα. Να βρεθούν: α) οι ταχύτητες στα B και C, β) το έργο του βάρους από το A στο B και από το A στο C. Το σώμα ξεκινά από το σημείο A σε ηρεμία.



Λύση:

Στο σώμα ασκούνται το βάρος του και η κάθετη αντίδραση. Η κάθετη αντίδραση σε κάθε σημείο είναι κάθετη στη μετατόπιση και δεν παράγει έργο, άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται,

$$E_A = E_B = E_C \quad (1)$$

$$\alpha) E_A = mgh_A, E_B = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2, E_C = mgh_C + \frac{1}{2}mv_C^2$$

από τις παραπάνω σχέσεις και τη σχέση (1) υπολογίζουμε τις ταχύτητες στα Β και C. Για παράδειγμα:

$$gh_A = gh_B + \frac{1}{2}v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2g(h_A - h_B)}$$

Όμοια υπολογίζουμε: $v_C = \sqrt{2g(h_A - h_C)}$

β) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας που μας δίνει το έργο του βάρους αφού η κάθετη αντίδραση δεν παράγει έργο:

$$W_{AB} = E_K(B) - E_K(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 = mg(h_A - h_B)$$

$$W_{AC} = E_K(C) - E_K(A) = \frac{1}{2}mv_C^2 = mg(h_A - h_C)$$

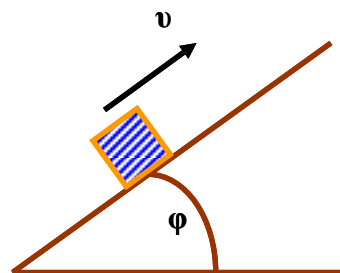
ΑΣΚΗΣΗ 4. 9

Αρχικά το σώμα έχει ταχύτητα u προς τα πάνω. Αν υπάρχει τριβή τότε σταματά;

Λύση:

Το σώμα κινείται με ταχύτητα u προς τα πάνω και σταματά μετά από απόσταση x , στο σημείο Β. Τότε, για το έργο της τριβής ισχύει ότι:

$$|W_T| = T x \quad (1)$$



όπου $T = \mu N = \mu mg \cos\phi$.

Παίρνοντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το αρχικό σημείο εκκίνησης, έστω Α, έχουμε ότι:

$$E_A = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2)$$

$$E_B = mgh \text{ (και ισχύει ότι } \sin\phi = h/x) \quad (3)$$

και η διατήρηση της ενέργειας γράφεται ως:

$$E_A = E_B + |W_T| \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (1)-(4) λαμβάνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

ΑΣΚΗΣΗ 4.10

Σώμα μάζας m βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε ύψος h από το οριζόντιο επίπεδο, πάνω σε καμπύλο τμήμα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

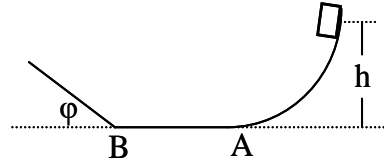
Στη συνέχεια, το σώμα ολισθαίνει χωρίς τριβή μέχρι το σημείο B, όπου και συναντά κεκλιμένο επίπεδο, κλίσης φ , με συντελεστή δυναμικής τριβής ίσο με μ .

Να βρείτε:

α) το έργο για τη μετακίνηση του σώματος από το A στο B.

β) το μέγιστο ύψος στο οποίο φθάνει το σώμα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

γ) την ελάχιστη τιμή που πρέπει να έχει ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ σώματος και κεκλιμένου επιπέδου έτσι ώστε το σώμα να παραμείνει ακίνητο στο μέγιστο ύψος που βρήκατε στο ερώτημα β).



Λύση:

α) Η κίνηση από το A στο B είναι ολίσθηση σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβή, άρα το έργο είναι 0.

β) Από αρχή διατήρησης ενέργειας έχουμε ότι:

$$v_A = v_B = \sqrt{2gh} \text{ και η ενέργεια στο B είναι } E_B = mgh \quad (1)$$

Έστω y το μέγιστο ύψος στο οποίο φθάνει το σώμα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο και x το διάστημα που διανύει το σώμα στο κεκλιμένο επίπεδο. Τότε, η αρχή διατήρησης ενέργειας δίνει:

$$mgy = mgh + Tx \quad (2)$$

$$\text{όπου } T = \mu mg \sin \varphi, \text{ η τριβή και ισχύει επίσης ότι } \eta \mu \varphi = y/x \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1)-(3) έχουμε ότι:

$$y = \frac{h}{1 + \mu \cot \varphi}$$

γ) Για να παραμείνει το σώμα ακίνητο στο μέγιστο ύψος που βρήκατε στο ερώτημα

β) θα πρέπει:

$$mg \sin \varphi \leq \mu_s mg \cos \varphi \Rightarrow \tan \varphi \leq \mu_s$$

άρα η ελάχιστη τιμή που πρέπει να έχει ο συντελεστής στατικής τριβής, μ_s , μεταξύ σώματος και κεκλιμένου επιπέδου είναι $\tan \varphi$.

ΑΣΚΗΣΗ 4.11

Σώμα κινείται υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F} = (-Ax + Bx^2)\hat{i}$, όπου A και B σταθερές και \hat{i} το μοναδιαίο άνυσμα στον άξονα x. Να βρεθεί η δυναμική ενέργεια $U(x)$ και η μεταβολή της ΔU για μετατόπιση Δx .

Λύση:

Από τη σχέση που συνδέει τη δύναμη και τη δυναμική ενέργεια έχουμε:

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dx}\hat{i} \Rightarrow F = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow dU = -Fdx \Rightarrow \int dU = -\int (-Ax + Bx^2)dx \Rightarrow U(x) = \frac{Ax^2}{2} - \frac{Bx^3}{3} + C$$

όπου C σταθερά που ορίζεται επιλέγοντας αυθαίρετα το σημείο όπου η δυναμική ενέργεια μηδενίζεται. Για παράδειγμα, αν επιλέξουμε $U(0)=0$ τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι $C=0$.

Η μεταβολή ΔU για μετατόπιση Δx είναι:

$$\Delta U = -\int_x^{x+\Delta x} Fdx = \left. \frac{Ax^2}{2} - \frac{Bx^3}{3} \right|_x^{x+\Delta x} = \frac{A(x+\Delta x)^2}{2} - \frac{B(x+\Delta x)^3}{3} - \left(\frac{Ax^2}{2} - \frac{Bx^3}{3} \right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.12

Ποιες από τις παρακάτω δυνάμεις είναι συντηρητικές; Να υπολογίσετε τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας.

$$\alpha) \vec{F} = k\hat{i} + m\hat{j}, \quad \beta) \vec{F} = xy\hat{i} + (x+y)\hat{j}, \quad \gamma) \vec{F} = 2x^2\hat{i} + 3y^2\hat{j}$$

Λύση:

Μία δύναμη με συνιστώσες στους άξονες x και y μόνο, δηλ. $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$ είναι

διατηρητική όταν $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ (κριτήριο του Euler)

α) $\frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial m}{\partial x} = 0$, είναι διατηρητική. Υπολογισμός της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = -k \Rightarrow U(x, y) = -k \cdot x + g(y), \text{ για να υπολογιστεί η } g(y)$$

εισάγουμε την $U(x, y) = -k \cdot x + g(y)$ στην εξίσωση: $F_y = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = -m \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} [-k \cdot x + g(y)] = -m \Rightarrow g'(y) = -m \Rightarrow g(y) = -m \cdot y + C$$

οπότε: $U(x, y) = -k \cdot x - m \cdot y + C$

β) $\frac{\partial(xy)}{\partial y} = x$ και $\frac{\partial(x+y)}{\partial x} = 1$ δεν είναι διατηρητική.

γ) $\frac{\partial(2x^2)}{\partial y} = \frac{\partial(3y^2)}{\partial x} = 0$, είναι διατηρητική. Υπολογισμός της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = -2x^2 \Rightarrow U = -2 \int x^2 dx = -2 \frac{x^3}{3} + g(y)$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = -3y^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{2x^3}{3} + g(y) \right) = -3y^2 \Rightarrow g'(y) = -3y^2 \Rightarrow g(y) = -y^3 + c$$

οπότε $U(x, y) = -\frac{2x^3}{3} - y^3 + c$

ΑΣΚΗΣΗ 4.13

Σε σώμα μάζας $m = 0,02 \text{ kg}$ ασκείται μία δύναμη \vec{F} η οποία το κινεί επάνω στο επίπεδο xy . Το διάνυσμα θέσης του σώματος είναι $\vec{r} = 10\cos(5t)\hat{i} + 6\sin(5t)\hat{j}$.

α) Να δείξετε ότι το σώμα κινείται σε έλλειψη. β) Από το διάνυσμα θέσης υπολογίστε την δύναμη \vec{F} που δέχεται το σώμα, δείξετε ότι είναι διατηρητική και σχεδιάστε την κατεύθυνσή της. γ) Να υπολογίσετε το έργο που παράγεται από τη δύναμη κατά την κίνηση του σώματος από το Α στο Β, όπου τα Α και Β είναι τα άκρα των ημιαξόνων της έλλειψης.

Λύση:

α) Από το διάνυσμα θέσης του κινητού $\vec{r} = \underbrace{10\cos(5t)}_x \hat{i} + \underbrace{6\sin(5t)}_y \hat{j}$ είναι:

$$x = 10\cos(5t) \text{ και } y = 6\sin(5t), \text{ οπότε } x^2 = 100\cos^2(5t) \text{ και } y^2 = 36\sin^2(5t)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{100} = \cos^2(5t) \\ \frac{y^2}{36} = \sin^2(5t) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \text{ η τροχιά είναι έλλειψη.}$$

β) Υπολογισμός της επιτάχυνσης:

$$x = 10\cos(5t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -50\sin(5t) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -250\cos(5t)$$

$$y = 6\sin(5t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 30\cos(5t) \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -150\sin(5t)$$

$$\vec{a} = -250\cos(5t)\hat{i} - 150\sin(5t)\hat{j}$$

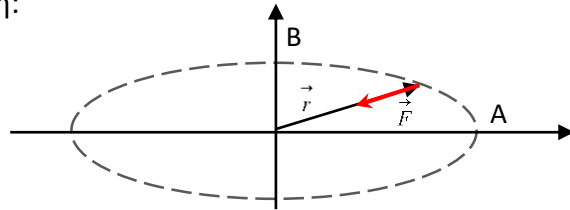
οπότε $\vec{F} = m\vec{a} = -5\cos(5t)\hat{i} - 3\sin(5t)\hat{j}$. Συγκρίνοντας με την εξίσωση του διανύσματος θέσης φαίνεται ότι $F_x = -5\cos(5t) = -\frac{1}{2}x$ και $F_y = -3\sin(5t) = -\frac{1}{2}y$

δηλαδή: $\vec{F} = -\frac{1}{2}x\hat{i} - \frac{1}{2}y\hat{j}$

Έλεγχος εάν η δύναμη είναι διατηρητική:

Θα πρέπει να ισχύει $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$

Πράγματι $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0$



γ) Υπολογισμός της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας:

$$F_x = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \Rightarrow dU(x,y) = -F_x \cdot dx \Rightarrow dU(x,y) = \frac{1}{2}x \cdot dx$$

$$\Rightarrow \int dU(x,y) = \frac{1}{2} \int x \cdot dx \Rightarrow U(x,y) = \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + g(y) \Rightarrow U(x,y) = \frac{x^2}{4} + g(y)$$

Σκοπός είναι να υπολογιστεί η $g(y)$. Εισάγουμε την $U(x,y) = \frac{x^2}{4} + g(y)$ στην

εξίσωση: $F_y = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$ και προκύπτει: $-\frac{1}{2}y = -\frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{x^2}{4} + g(y) \right]$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}y = -g'(y) \Rightarrow g(y) = \frac{y^2}{4} + c \text{ οπότε}$$

$$U(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + c$$

Το σημείο Α έχει συντεταγμένες $A(10,0)$ επομένως

$$U(10,0) = \frac{10^2}{4} + \frac{0^2}{4} + c = 25 + c$$

Το σημείο Β έχει συντεταγμένες $B(0,6)$ επομένως

$$U(0,6) = \frac{0^2}{4} + \frac{6^2}{4} + c = 9 + c$$

$$W_{A \rightarrow B} = U(10,0) - U(0,6) = 16 \text{ Joule}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.14

Σώμα κινείται υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F} = (y - x^2)\hat{i} + 3xy\hat{j}$.

Να υπολογισθεί το έργο της δύναμης αυτής για μετακίνηση του σώματος από το σημείο (0,0) μέχρι το σημείο (2,4) ακολουθώντας τις εξής διαδρομές:

α) Πάνω στον άξονα x από το (0,0) ως το (2,0) και παράλληλα προς τον άξονα y ως το (2,4).

β) Την ευθεία από το (0,0) στο (2,4).

γ) Την παραβολή $y = x^2$.

Λύση:

α) Υπολογισμός του έργου από το (0,0) ως το (2,0)

$$W = \int_{(0,0)}^{(2,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(0,0)}^{(2,0)} \left[(y - x^2)\hat{i} + 3xy\hat{j} \right] \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) = \int_{(0,0)}^{(2,0)} (y - x^2)dx + \int_{(0,0)}^{(2,0)} 3xy \cdot dy =$$

$$\int_{(0,0)}^{(2,0)} ydx - \int_{(0,0)}^{(2,0)} x^2 dx + \int_{(0,0)}^{(2,0)} 3xy \cdot dy.$$

Από τα όρια της ολοκλήρωσης φαίνεται ότι το y παραμένει σταθερό $y = 0$, οπότε

$$\int_{(0,0)}^{(2,0)} ydx = \underset{0}{y} \cdot \int_0^2 dx = 0 \cdot [x]_0^2 = 0$$

Επίσης το $\int_{(0,0)}^{(2,0)} x^2 dx$ δεν εξαρτάται από το y οπότε μπορεί να γραφτεί σαν $\int_{x=0}^{x=2} x^2 dx$

Τέλος, στο $\int_{(0,0)}^{(2,0)} 3xy \cdot dx$ είναι $y = 0$ οπότε $\int_{(0,0)}^{(2,0)} 3xy \cdot dx = 0$, οπότε

$$\int_{(0,0)}^{(2,0)} y \cdot dx - \int_{(0,0)}^{(2,0)} x^2 \cdot dx + \int_{(0,0)}^{(2,0)} 3xy \cdot dy = \underset{0}{y}[x]_0^2 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + 3 \underset{0}{y^2}[x]_0^2 = 0 - \frac{8}{3} = -\frac{8}{3} \text{ Joule}$$

Υπολογισμός του έργου από το (2,0) ως το (2,4)

$$W = \int_{(2,0)}^{(2,4)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(2,0)}^{(2,4)} \left[(y - x^2)\hat{i} + 3xy\hat{j} \right] \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) = \int_{(2,0)}^{(2,4)} (y - x^2)dx + \int_{(2,0)}^{(2,4)} 3xy \cdot dy =$$

$$\int_{(2,0)}^{(2,4)} y \cdot dx - \int_{(2,0)}^{(2,4)} x^2 \cdot dx + \int_{(2,0)}^{(2,4)} 3xy \cdot dy$$

Στο $\int_{(2,0)}^{(2,4)} y \cdot dx$ το x παραμένει σταθερό $x = 2$ οπότε $dx = 0$ άρα $\int_{(2,0)}^{(2,4)} y \cdot dx = 0$

Το ολοκλήρωμα $\int_{(2,0)}^{(2,4)} x^2 \cdot dx$ δεν εξαρτάται από το y οπότε μπορεί να γραφτεί

$$\int_{x=2}^{x=2} x^2 \cdot dx = 0$$

Τέλος στο $\int_{(2,0)}^{(2,4)} 3xy \cdot dy$ το x παραμένει σταθερό $x=2$ οπότε μπορεί να βγει έξω από

την ολοκλήρωση και να γίνει $3x \int_{y=0}^{y=4} y \cdot dy$, οπότε προκύπτει το αποτέλεσμα:

$$y[x]_2^2 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^0 + 3x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^4 =$$

$$= 0 - 0 + 3 \cdot 2 \cdot \frac{16}{2} = 48 \text{ Joule}$$

$$\text{Συνολικά } -\frac{8}{3} + 48 = \frac{136}{3} \text{ Joule}$$

β) Η ευθεία που περνάει από τα $(0,0)$ και $(2,4)$, έχει εξίσωση $y = 2x$ οπότε $dy = 2 \cdot dx$

$$W = \int_{(0,0)}^{(2,4)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(0,0)}^{(2,0)} \left[\left(\frac{2x}{y} - x^2 \right) \hat{i} + 3x \cdot \frac{2x}{y} \hat{j} \right] \cdot \left(dx \hat{i} + \frac{2dx}{dy} \hat{j} \right) = \int_{(0,0)}^{(2,4)} (2x - x^2) dx + \int_{(0,0)}^{(2,0)} 12x^2 \cdot dx$$

και επειδή δεν περιέχει y μπορεί να γραφτεί:

$$\int_{x=0}^{x=2} (2x - x^2) dx + \int_{x=0}^{x=2} 12x^2 \cdot dx = \int_{x=0}^{x=2} 2x \cdot dx + \int_{x=0}^{x=2} 12x^2 \cdot dx = \left[x^2 \right]_0^2 + 11 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2$$

$$= 4 - 0 + 11 \cdot \frac{8}{3} = \frac{100}{3} \text{ Joule}$$

γ) Το σώμα κινείται ακολουθώντας την καμπύλη που περνάει από τα $(0,0)$ και $(2,4)$, έχει εξίσωση $y = x^2$ οπότε $dy = 2x \cdot dx$

$$W = \int_{(0,0)}^{(2,4)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(0,0)}^{(2,0)} \left[\left(\frac{x^2}{y} - x^2 \right) \hat{i} + 3x \cdot \frac{x^2}{y} \hat{j} \right] \cdot \left(dx \hat{i} + \frac{2x dx}{dy} \hat{j} \right) = \int_{(0,0)}^{(2,4)} (x^2 - x^2) dx + \int_{(0,0)}^{(2,0)} 6x^4 \cdot dx$$

και επειδή δεν περιέχει y μπορεί να γραφτεί:

$$\int_{x=0}^{x=2} (x^2 - x^2) dx + \int_{x=0}^{x=2} 6x^4 \cdot dx = 6 \int_{x=0}^{x=2} x^4 \cdot dx = 6 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{192}{5} \text{ Joule}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.15

Να υπολογισθεί το έργο της δύναμης $\vec{F} = x^2 \hat{i} + y^2 \hat{j}$ όταν μετακινείται το σημείο εφαρμογής της από το σημείο $(0,1)$ μέχρι το σημείο $(2,2)$ ακολουθώντας τις εξής διαδρομές:

α) Πάνω στον άξονα y από το $(0,1)$ ως το $(0,2)$ και παράλληλα προς τον άξονα x ως το $(2,2)$. β) Επάνω στην ευθεία από το $(0,1)$ στο $(2,2)$. γ) Επάνω στην καμπύλη με εξίσωση

$y = \frac{x^2}{4} + 1$. δ) Αποδείξτε ότι η δύναμη είναι διατηρητική. ε) Υπολογίστε την δυναμική

ενέργεια. στ) Υπολογίστε το έργο από το σημείο $(0,1)$ έως το $(2,2)$ κάνοντας χρήση της δυναμικής ενέργειας

Λύση:

α) Υπολογισμός του έργου από το (0,1) ως το (0,2)

$$W = \int_{(0,1)}^{(0,2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(0,1)}^{(0,2)} [x^2 \hat{i} + y^2 \hat{j}] \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j}) = \int_{(0,1)}^{(0,2)} x^2 dx + \int_{(0,1)}^{(0,2)} y^2 \cdot dy =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^0 + \left[\frac{y^3}{3} \right]_1^2 = 0 + \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{ Joule}$$

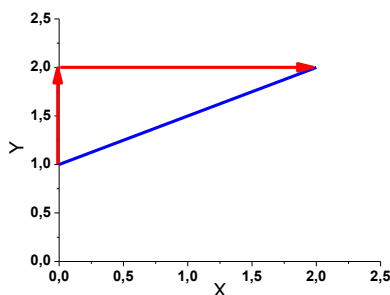
Υπολογισμός του έργου από το (0,2) ως το (2,2)

$$W' = \int_{(0,2)}^{(2,2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(0,2)}^{(2,2)} [x^2 \hat{i} + y^2 \hat{j}] \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j}) = \int_{(0,2)}^{(2,2)} x^2 dx + \int_{(0,2)}^{(2,2)} y^2 \cdot dy =$$

$$\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \left[\frac{y^3}{3} \right]_2^2 = \frac{8}{3} \text{ Joule Συνολικά } \frac{7}{3} + \frac{8}{3} = 5 \text{ Joule}$$

β) Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα (0,1)

και (2,2) είναι: $y = \frac{x}{2} + 1$ οπότε $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dy = \frac{dx}{2}$



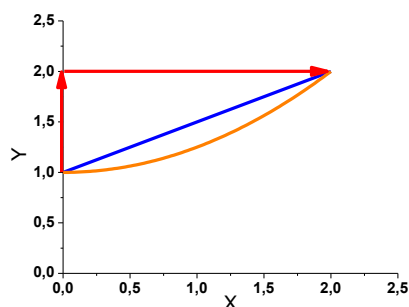
$$W_{ολ} = \int_{(0,1)}^{(2,2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(0,1)}^{(2,2)} [x^2 \hat{i} + y^2 \hat{j}] \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j}) = \int_{(0,1)}^{(2,2)} x^2 dx + \int_{(0,1)}^{(2,2)} \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 \cdot \frac{dx}{2} =$$

$$\int_{(0,1)}^{(2,2)} x^2 dx + \int_{(0,1)}^{(2,2)} \frac{x^2}{4} \cdot \frac{dx}{2} + \int_{(0,1)}^{(2,2)} x \cdot \frac{dx}{2} + \int_{(0,1)}^{(2,2)} \frac{dx}{2} =$$

$$\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{24} \right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^2 + \left[\frac{dx}{2} \right]_0^2 = \frac{8}{3} + \frac{8}{24} + 1 + 1 = 5 \text{ Joule}$$

γ) Το σώμα ακολουθεί την καμπύλη: $y = \frac{x^2}{4} + 1$ οπότε $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4} \Rightarrow dy = \frac{x}{2} dx$

$$W_{ολ} = \int_{(0,1)}^{(2,2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(0,1)}^{(2,2)} [x^2 \hat{i} + y^2 \hat{j}] \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j}) = \int_{(0,1)}^{(2,2)} x^2 dx + \int_{(0,1)}^{(2,2)} \left(\frac{x^2}{4} + 1\right)^2 \cdot \frac{x}{2} dx =$$



$$\int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 \left(\frac{x^2}{4} + 1\right)^2 \cdot \frac{x}{2} dx =$$

$$\int_0^2 x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{2} + 1\right) \cdot x \cdot dx =$$

$$\int_0^2 x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\frac{x^5}{16} + \frac{x^3}{2} + x \right) \cdot dx =$$

$$\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{x^6}{6 \cdot 16} \right]_0^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + 1 + 1 = 5 \text{ Joule}$$

δ) Μία δύναμη $\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$ είναι διατηρητική όταν $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$

Στην προκειμένη περίπτωση: $\frac{\partial x^2}{\partial y} = \frac{\partial y^2}{\partial x} = 0$

$$\epsilon) F_x = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \Rightarrow dU(x, y) = -F_x \cdot dx \Rightarrow dU(x, y) = -x^2 \cdot dx$$

$$\Rightarrow \int dU(x, y) = -\int x^2 \cdot dx \Rightarrow U(x, y) = -\frac{x^3}{3} + g(y)$$

Σκοπός είναι να υπολογιστεί η $g(y)$. Εισάγουμε την $\Rightarrow U(x, y) = -\frac{x^3}{3} + g(y)$ στην

$$\text{εξίσωση: } F_y = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \text{ και προκύπτει: } y^2 = -\frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{x^3}{3} + g(y) \right] \Rightarrow y^2 = -g'(y)$$

$$\Rightarrow \frac{dg(y)}{dy} = -y^2 \Rightarrow dg(y) = -y^2 \cdot dy \Rightarrow \int dg(y) = -\int y^2 \cdot dy \Rightarrow g(y) = -\frac{y^3}{3} + c$$

$$\text{οπότε } U(x, y) = -\frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3} + c$$

$$\text{στ) } U(0,1) = -\frac{0^3}{3} - \frac{1^3}{3} + c = -\frac{1}{3} + c$$

$$U(2,2) = -\frac{2^3}{3} - \frac{2^3}{3} + c = -\frac{16}{3} + c$$

$$W_{(0,1) \rightarrow (2,2)} = U(0,1) - U(2,2) = 5 \text{ Joule}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.16

Ένα σώμα δέχεται δύναμη $\vec{F} = \left(2x - \frac{y}{3} - z^2 \right) \hat{i} + \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + 2z \right) \hat{j} + (x - 2y - z) \hat{k}$. Το

σώμα υποχρεώνεται να κινηθεί επάνω στο επίπεδο xy ακολουθούμενο από το διάνυσμα θέσης $\vec{r} = 3 \cos \theta \hat{i} + 4 \sin \theta \hat{j}$, όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης με τον άξονα x . α) Να αποδειχθεί ότι η τροχιά του σώματος είναι έλλειψη. β) Να υπολογιστεί το έργο όταν η γωνία μεταβάλλεται από 0 σε 2π .

Λύση:

Η δύναμη δίνεται να εξαρτάται από τα x, y, z . Όμως το σώμα συγκρατείται επάνω στο επίπεδο xy οπότε $z = 0$. Επομένως και η μεταβολή του z θα είναι $dz = 0$.

Η εξίσωση της δύναμης γίνεται: $\vec{F} = \left(2x - \frac{y}{3}\right)\hat{i} + \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)\hat{j} + (x - 2y)\hat{k}$

α) Από το διάνυσμα θέσης: $\vec{r} = 3\cos\theta\hat{i} + 4\sin\theta\hat{j}$ είναι:

$$x = 3\cos\theta \text{ και } y = 4\sin\theta, \text{ οπότε } x^2 = 9\cos^2\theta \text{ και } y^2 = 16\sin^2\theta$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{9} = \cos^2\theta \\ \frac{y^2}{16} = \sin^2\theta \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ η τροχιά είναι έλλειψη.}$$

$$\beta) dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left[\left(2x - \frac{y}{3}\right)\hat{i} + \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)\hat{j} \right] \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j})$$

$$dW = \left(2x - \frac{y}{3}\right) \cdot dx + \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right) \cdot dy$$

Στην έκφραση του στοιχειώδους έργου εισάγονται οι σχέσεις: $x = 3\cos\theta$ και $y = 4\sin\theta$ και μετά από παραγωγή οι σχέσεις: $dx = -3\sin\theta \cdot d\theta$ και $dy = 4\cos\theta \cdot d\theta$, οπότε το στοιχειώδες έργο είναι:

$$dW = \left(2 \cdot 3\cos\theta - \frac{4\sin\theta}{3}\right) \cdot \underbrace{(-3\sin\theta \cdot d\theta)}_{dx} + \left(\frac{3\cos\theta}{3} + \frac{4\sin\theta}{4}\right) \cdot \underbrace{(4\cos\theta \cdot d\theta)}_{dy}$$

$$dW = -3\left(6\cos\theta - \frac{4\sin\theta}{3}\right) \cdot \sin\theta \cdot d\theta + 4(\cos\theta + \sin\theta) \cdot \cos\theta \cdot d\theta$$

$$dW = -18\cos\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta + \underbrace{4\sin^2\theta \cdot d\theta + 4\cos^2\theta \cdot d\theta}_{4 \cdot d\theta} + 4\sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta$$

$$dW = -14\cos\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta + 4 \cdot d\theta \quad \text{ή} \quad dW = -7\sin(2\theta) \cdot d\theta + 4 \cdot d\theta, \quad \text{όπου}$$

χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα: $\sin(2\phi) = 2\sin\phi \cdot \cos\phi$

ολοκληρώνοντας

$$W = -7 \int_0^{2\pi} \sin(2\theta) \cdot d\theta + 4 \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \Rightarrow W = \underbrace{[\cos(2\theta)]_0^{2\pi}}_0 + 4[\theta]_0^{2\pi} = 8\pi$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.17

Υλικό σημείο μάζας $m = 1 \text{ kg}$ κινείται στον άξονα x υπό την επίδραση της δύναμης

$F = 12x^2 - 6x$. α) Να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας και να προσδιοριστούν οι θέσεις ισορροπίας του υλικού σημείου. β) Αν το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x = 1/5$ με αρχική ταχύτητα $v(1/5) = 0,2 \text{ m/sec}$, να βρεθεί η ταχύτητα στη θέση $x = 0$, η ολική ενέργεια και οι επιτρεπτές περιοχές κίνησης.

Λύση:

$$\alpha) F = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow dV = -F \cdot dx \Rightarrow V(x) = -\int (12x^2 - 6x) dx = -12 \frac{x^3}{3} + 6 \frac{x^2}{2} + c$$

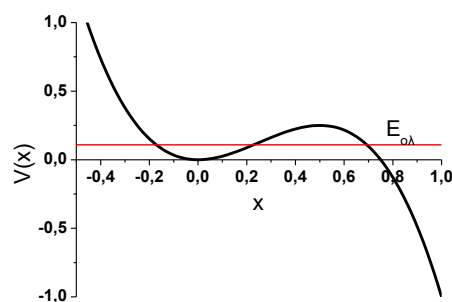
$$V(x) = -4x^3 + 3x^2 + c$$

Σημεία ισορροπίας είναι εκείνα για τα οποία $V'(x) = 0$ δηλαδή $-12x^2 + 6x = 0$

$$x = \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\}, V''(x) = -24x + 6$$

Για $x = 0$ $V''(0) = 6 > 0$ σημείο ευστάθειας

Για $x = \frac{1}{2}$ $V''\left(\frac{1}{2}\right) = -24 \cdot \frac{1}{2} + 6 = -6 < 0$ σημείο αστάθειας



β) Στην θέση $x = 0$ η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας μηδενίζεται και παρουσιάζει ελάχιστο, επομένως στο σημείο αυτό, η γραφική παράσταση $V = V(x)$ εφάπτεται στον άξονα x . Η ολική ενέργεια στο σημείο $x = 0$ θα είναι ίση με την ολική ενέργεια στο $x = 1/5$. Όμως $V(0) = 0$

επομένως στο $x = 0$ όλη η ενέργεια είναι κινητική.

$$K\left(\frac{1}{5}\right) + V\left(\frac{1}{5}\right) = K(0) + V(0) \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}mv^2 + \frac{11}{125} = K(0) + 0 \quad \text{ή} \quad K(0) = \frac{1}{50} + \frac{11}{125} = \frac{27}{250}$$

$$\text{Επομένως } E_{ολ} = \frac{27}{250} \text{ Joule και } v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{27}{500}} \text{ m/sec}$$

Βρήκαμε ότι:

$$V(x) = 4x^3 - 3x^2 + c$$

$$E_{ολ} = \frac{27}{250} \text{ Joule και ισχύει } V(x) + K(x) = E_{ολ} \quad \text{οπότε}$$

$$K(x) = E_{ολ} - V(x) = \frac{27}{250} - (4x^3 - 3x^2 + c) \stackrel{c=0}{=} \frac{27}{250} - 4x^3 + 3x^2$$

Το σώμα επιτρέπεται να κινηθεί μόνο στα σημεία εκείνα για τα οποία η δυναμική ενέργεια είναι μικρότερη ή ίση της ολικής.

ΑΣΚΗΣΗ 4.18

Αποδείξτε ότι το πεδίο της δύναμης $\vec{F} = xz\hat{i} + \frac{x^2}{2}\hat{k}$ είναι διατηρητικό. Υπολογίστε την συνάρτηση δυναμικού και το έργο κατά την μετακίνηση από το σημείο (0,2) στο (3,4).

Λύση:

Το σώμα κινείται στο επίπεδο (x, z) και η συνθήκη του Euler θα είναι:

$$\frac{\partial xz}{\partial z} = \frac{\partial(x^2/2)}{\partial x} = x \text{ οπότε το πεδίο είναι διατηρητικό}$$

Υπολογισμός της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας:

$$F_x = -\frac{\partial U(x, z)}{\partial x} \Rightarrow dU = -xzdx \Rightarrow \int dU = -\int xzdx \Rightarrow U(x, z) = -z\frac{x^2}{2} + g(z)$$

$$\text{Εισάγουμε την } U(x, z) = -z\frac{x^2}{2} + g(z) \text{ στην } F_z = -\frac{\partial U(x, z)}{\partial z}$$

$$F_z = -\frac{\partial U(x, z)}{\partial z} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[-z\frac{x^2}{2} + g(z) \right] \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} + g'(z) \Rightarrow g'(z) = 0$$

οπότε $g(z) = c$

$$\text{Άρα } U(x, z) = -z\frac{x^2}{2} + c$$

$$W_{(0,2) \rightarrow (3,4)} = U(0,2) - U(3,4) = -2\frac{0^2}{2} + 4\frac{3^2}{2} = 18 \text{ Joule}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.19

Αποδείξτε ότι το πεδίο της δύναμης $\vec{F} = (x+y)\hat{i} + (x-3y)\hat{j}$ είναι διατηρητικό. Υπολογίστε την συνάρτηση δυναμικού και το έργο κατά την μετακίνηση από το σημείο (1,1) στο (2,2).

Λύση:

$$\text{Μία δύναμη } \vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} \text{ είναι διατηρητική όταν } \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$$\text{Στην προκειμένη περίπτωση: } \frac{\partial(x+y)}{\partial y} = \frac{\partial(x-3y)}{\partial x} = 1$$

$$F_x = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \Rightarrow dU(x, y) = -F_x \cdot dx \Rightarrow dU(x, y) = -(x+y) \cdot dx$$

$$\Rightarrow \int dU(x, y) = -\int (x+y) \cdot dx \Rightarrow U(x, y) = -\int x \cdot dx - \int y \cdot dx$$

$$\Rightarrow U(x, y) = -\frac{x^2}{2} - xy + g(y)$$

$$\text{Σκοπός είναι να υπολογιστεί η } g(y). \text{ Εισάγουμε την } \Rightarrow U(x, y) = -\frac{x^2}{2} - xy + g(y)$$

στην εξίσωση: $F_y = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}$ και προκύπτει:

$$x - 3y = -\frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{x^2}{2} - xy + g(y) \right] \Rightarrow x - 3y = x - g'(y) \text{ δηλαδή}$$

$$\frac{dg(y)}{dy} = 3y \Rightarrow g(y) = 3\frac{y^2}{2} + c$$

$$\text{οπότε } U(x, y) = -\frac{x^2}{2} - xy + 3\frac{y^2}{2} + c$$

$$U(1,1) = -\frac{1^2}{2} - 1 + 3\frac{1^2}{2} + c = c$$

$$U(2,2) = -\frac{2^2}{2} - 4 + 3\frac{2^2}{2} + c = c$$

$$W_{(1,1) \rightarrow (2,2)} = U(0,1) - U(2,2) = 0$$

Όπως φαίνεται από την σχέση $U(x, y) = -\frac{x^2}{2} - xy + 3\frac{y^2}{2} + c$ τα σημεία της ευθείας

$$y = x \text{ έχουν την ίδια δυναμική ενέργεια } U(x, y = x) = -\frac{x^2}{2} - x^2 + 3\frac{x^2}{2} + c = c$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.20

Σε ένα σώμα μάζας m ασκείται η δύναμη:

$\vec{F} = (x + 2y - z^2)\hat{i} + (2x - y + z)\hat{j} + (x - y^2 + z^3)\hat{k}$. Να υπολογιστεί το έργο που παράγεται όταν το σώμα μετατοπίζεται από το σημείο (1,2) στο σημείο (3,6) ακολουθώντας την ευθεία $y = 2x$.

Λύση:

$$W = \int_{(1,2)}^{(3,6)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(1,2)}^{(3,6)} \left[(x + 2y - z^2)\hat{i} + (2x - y + z)\hat{j} + (x - y^2 + z^3)\hat{k} \right] \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k})$$

$$W = \int_{(1,2)}^{(3,6)} \left[(x + 2y - z^2)dx + (2x - y + z)dy + (x - y^2 + z^3)dz \right]$$

Το σώμα κινείται στο επίπεδο (x, y) επομένως $z = 0$ και $dz = 0$

$$W = \int_{(1,2)}^{(3,6)} \left[(x + 2y)dx + (2x - y)dy \right]$$

Αντικαθιστώντας $y = 2x$ και $dy = 2dx$ προκύπτει:

$$W = \int_{(1,2)}^{(3,6)} \left[(x + 4x)dx + (2x - 2x)2dx \right] = \int_1^3 [5x dx] = \left[5\frac{x^2}{2} \right]_1^3 = 20 \text{ Joule}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.21

Ένα σώμα με μάζα $m = 1\text{kg}$ κινείται σε μια διάσταση υπό την επίδραση δυναμικής ενέργειας $V(x) = kx^2 - \lambda x^3$, όπου $k = 1 \frac{Nt}{m}$ και $\lambda = \frac{1}{3} \frac{Nt}{m^2}$. α) Να βρείτε τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η δυναμική ενέργεια. β) Τα σημεία ισορροπίας και να πείτε εάν είναι σημεία ευσταθούς ή ασταθούς. γ) Να υπολογίσετε τη δύναμη $F(x)$.

δ) Εάν το σώμα ξεκινά από τη θέση $x = 1m$ με αρχική ταχύτητα $\vec{v} = -1 \hat{i} \frac{m}{\text{sec}}$, να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια και την ολική ενέργεια και να περιγράψετε την κίνηση του σώματος.

Λύση:

α) Εισάγοντας τις τιμές $k = 1 \frac{Nt}{m}$ και $\lambda = \frac{1}{3} \frac{Nt}{m^2}$ η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας

$$\text{γίνεται: } V(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

$$V(x) = 0 \Rightarrow x^2 \left(1 - \frac{1}{3}x\right) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

β) Στα σημεία ισορροπίας η δύναμη είναι ίση με μηδέν, αλλά $F = -\frac{dV}{dx}$ οπότε όταν

η δύναμη είναι μηδέν θα είναι μηδέν και το $\frac{dV}{dx}$. Οπότε σημεία ισορροπίας είναι

$$\text{εκείνα για τα οποία } \frac{dV}{dx} = 0 \text{ ή } 2x - \frac{1}{3}3x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$

Είδος ισορροπίας στο $x = 0$

Κριτήριο για το αν η ισορροπία είναι ευσταθής ή ασταθής είναι το πρόσημο της 2ης

παραγώγου. Αν $\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=0} > 0$ το σημείο $x = 0$ είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας. Αν

$\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=0} < 0$ το σημείο $x = 0$ είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας.

$$V(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

$$\frac{dV}{dx} = 2x - \frac{1}{3}3x^2 = 2x - x^2$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 2 - 2x$$

στο σημείο $x = 0$ είναι $\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=0} = 2 - 0 > 0$ ευσταθής ισορροπία

στο σημείο $x = 2$ είναι $\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=2} = 2 - 2 \cdot 2 = -2 < 0$ ασταθής ισορροπία.

γ)

$$V(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

$$F = -\frac{dV(x)}{dx} \text{ οπότε } F = -2x + x^2$$

δ) Από την δύναμη μπορεί να υπολογιστεί η επιτάχυνση. $a = \frac{F}{m}$ αλλά $m = 1 \text{ kg}$ οπότε

$$a = -2x + x^2$$

Από την επιτάχυνση μπορεί να υπολογιστεί η ταχύτητα. Επειδή όμως η επιτάχυνση δεν είναι συναρτήσεως του χρόνου αλλά της θέσης x , η ταχύτητα θα υπολογιστεί με ολοκλήρωση κάνοντας χρήση του κανόνα της αλυσίδας.

$$a = -2x + x^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -2x + x^2 \text{ επειδή το δεύτερο μέλος είναι συνάρτηση της θέσης}$$

με την βοήθεια του κανόνα της αλυσίδας θα είναι $\frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -2x + x^2$ ή

$$\frac{dv}{dx} \cdot v = -2x + x^2 \Rightarrow dv \cdot v = (-2x + x^2) dx \Rightarrow \int_{-1}^v dv \cdot v = \int_1^x (-2x + x^2) dx, \quad \text{στην}$$

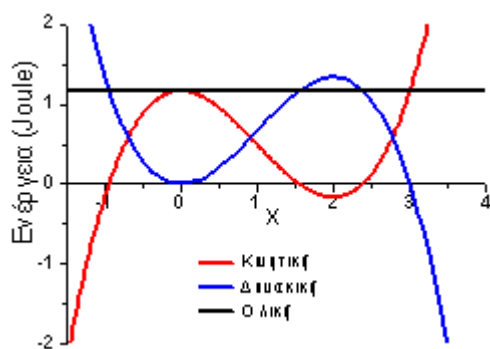
τελευταία ισότητα έχουμε εισάγει την αρχική συνθήκη όταν $x = 1 \text{ m}$ η ταχύτητα είναι $\vec{v} = -1 \hat{i} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

$$\left[\frac{v^2}{2} \right]_{v=-1}^v = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=1}^x - [x^2]_{x=1}^x \Rightarrow \frac{v^2 - 1}{2} = \frac{x^3 - 1}{3} - (x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow 3(v^2 - 1) = 2(x^3 - 1) - 6(x^2 - 1) \Rightarrow 3v^2 = 2x^3 - 6x^2 + 7 \Rightarrow v^2 = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{7}{3}$$

οπότε η κινητική ενέργεια θα είναι $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{7}{6}$, γιατί $m = 1 \text{ kg}$

Η ολική ενέργεια είναι $E_{ολ} = K + V = \frac{7}{6} \text{ Joule}$

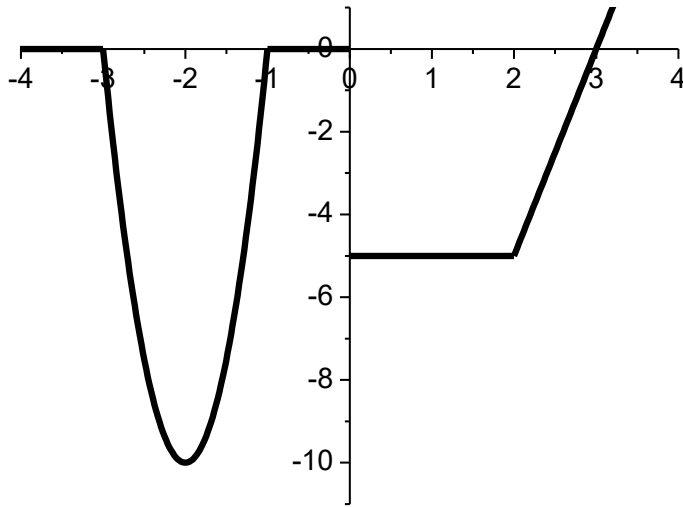


ε) Σε ότι αφορά την κίνηση του σώματος: Μπορούμε να φανταστούμε το σώμα σαν μια μπίλια που κυλάει επάνω στην μπλε γραμμή της δυναμικής ενέργειας, χωρίς όμως να περνάει πάνω από την μαύρη ευθεία που είναι η ολική ενέργεια. Σύμφωνα με τα παραπάνω το σώμα επιτρέπεται να κινείται από το $x = -1 \text{ m}$ (περίπου) μέχρι το $x = 1,5 \text{ m}$ (περίπου) και στην περίπτωση που έρθει από μεγάλες τιμές του x θα επιτρέπεται να κινηθεί μέχρι το $x = 2,4 \text{ m}$ (περίπου). Εάν αφήσουμε

το σώμα στη θέση $x = 1 \text{ m}$ με αρχική ταχύτητα $\vec{v} = -1 \hat{i} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, αυτό θα κινηθεί μέχρι

τη θέση $x = -1 \text{ m}$. Στη συνέχεια θα κινηθεί προς τα δεξιά μέχρι τη θέση $x = 1,5 \text{ m}$ κ.ο.κ. Αφού το σημείο $x = 0$ είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας το σώμα θα εκτελεί περιοδική κίνηση ανάμεσα στα σημεία $x = 1,5 \text{ m}$ και $x = -1 \text{ m}$.

ΑΣΚΗΣΗ 4.22



Σώμα μάζας $m = 0,2\text{kg}$ κινείται σε μια διάσταση με δυναμική ενέργεια που περιγράφεται από το ακόλουθο σχήμα και την παρακάτω εξίσωση:

α) Το σώμα έχει ολική ενέργεια $E = -5\text{J}$ και παρατηρείται στη θέση $x = -2,5$. Πόση είναι η κινητική του ενέργεια στη θέση $x = -2,5$; Βρείτε τα όρια της κίνησής του. β) Το

σώμα έχει ολική ενέργεια $E = 1\text{J}$ και παρατηρείται στη θέση $x = 0$. Βρείτε τα όρια της κίνησής του. γ) Αν το σώμα ισορροπεί στην θέση $x = -2$ και του δοθεί ένα ελάχιστο ποσό ενέργειας να εξηγήσετε γιατί το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση. Υπολογίστε την συχνότητα. δ) Το σώμα έχει ολική ενέργεια $E = -3\text{J}$ και παρατηρείται στη θέση $x = 1$ κινούμενο προς τα αριστερά. Μόλις το σώμα φτάσει στη θέση $x = 0$ χάνει το μισό της κινητικής του ενέργειας. Μετά από τις τρεις πρώτες κρούσεις στο σημείο $x = 0$ πόση ενέργεια θα έχει; ε) Πόση ενέργεια θα έχει το σώμα μετά από πολλές τέτοιες κρούσεις;

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , x < -3 \\ 10(x^2 + 4x + 3) & , -3 \leq x \leq -1 \\ 0 & , -1 < x < 0 \\ -5 & , 0 \leq x \leq 2 \\ 5(x-3) & , x > 2 \end{cases}$$

Λύση:

α) Όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = -2,5$ η δυναμική ενέργεια δίνεται από την σχέση $V(-2,5) = 10[(-2,5)^2 + 4(-2,5) + 3] = -7,5\text{Joule}$

$$E = K(-2,5) + V(-2,5) \Rightarrow K(-2,5) = E - V(-2,5) = -5 - (-7,5) = 2,5\text{Joule}$$

Στα όρια της κίνησης $K(x) = 0$ και $V(x) = E$

$$10(x^2 + 4x + 3) = -5 \Rightarrow x^2 + 4x + \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -1 + \sqrt{2} \\ -1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

β) Το σώμα έχει ολική ενέργεια $E = 1\text{J}$ και παρατηρείται στη θέση $x = 0$.

Η κίνηση προς τα αριστερά δεν περιορίζεται, προς τα δεξιά μπορεί να κινηθεί μέχρι τη θέση x όπου $5(x-3) = 1 \Rightarrow x = \frac{16}{5}$

γ) Προσδιορισμός των σημείων ισορροπίας στη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(x) = 10(x^2 + 4x + 3)$

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow 20 \cdot x + 40 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ επομένως το σημείο } x = -2 \text{ είναι σημείο}$$

ισορροπίας και επειδή $\frac{d^2V}{dx^2} = 20 > 0$ είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας, κατά

συνέπεια το σώμα θα εκτελεί περιοδική κίνηση γύρω από το σημείο $x=2$. Για να βρούμε το είδος της περιοδικής κίνησης υπολογίζουμε την συνάρτηση της δύναμης.

$F = -\frac{dV}{dx} = -20x - 40$, όπου ο προσθετός $-20 \cdot x$ είναι δύναμη επαναφοράς με

σταθερά $k = 20$, επομένως η κίνηση θα περιλαμβάνει μία αρμονική ταλάντωση με

σταθερά $k = 20 \text{ Nt/m}$ και κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$

δ) Το σώμα έχει ολική ενέργεια $E = -3 \text{ J}$ και παρατηρείται στη θέση $x = 1$ κινούμενο προς τα αριστερά. Από την γραφική παράσταση φαίνεται ότι η δυναμική ενέργεια στο σημείο $x = 1$ είναι $V(1) = -5 \text{ Joule}$ οπότε $\underbrace{V(1)}_{-5} + K(1) = -3 \Rightarrow K(1) = 2 \text{ Joule}$

Μόλις το σώμα φτάσει στη θέση $x = 0$ χάνει το μισό της κινητικής του ενέργειας επομένως:

μετά την 1^η κρούση θα έχει απομείνει με κινητική ενέργεια $K_1 = 1 \text{ Joule}$ και ολική ενέργεια $E_1 = V + K_1 = -4 \text{ Joule}$

μετά την 2^η κρούση θα έχει απομείνει με κινητική ενέργεια $K_2 = 0,5 \text{ Joule}$ και ολική ενέργεια $E_2 = V + K_2 = -4,5 \text{ Joule}$

μετά την 3^η κρούση θα έχει απομείνει με κινητική ενέργεια $K_3 = 0,25 \text{ Joule}$ και ολική ενέργεια και ολική ενέργεια $E_1 = V + K_1 = -4 \text{ Joule}$. Μετά από η κρούσεις η ενέργεια

θα είναι: $E_n = V + K_n = -5 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow -5 \text{ Joule}$

ΑΣΚΗΣΗ 4.23

Σημειακή μάζα κινείται στον άξονα x υπό την επίδραση διατηρητικής δύναμης με γνωστή συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V = V(x)$. Εάν το σώμα έχει συνολική ενέργεια E και τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 βρίσκεται στις θέσεις x_1 και x_2 αντίστοιχα, να υπολογιστεί ο χρόνος $t_2 - t_1$.

Λύση:

α) Η ολική ενέργεια δίνεται από τη σχέση: $E = V + K$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = E - V \Rightarrow v^2 = \frac{2(E - V)}{m} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(E - V)}{m}}$ για να υπολογιστεί ο χρόνος

της κίνηση αντικαθιστούμε $v = \frac{dx}{dt}$ και προκύπτει $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2(E - V)}{m}}$. Το δεξί μέλος

περιέχει την συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας, η οποία εξαρτάται από το x , οπότε

η ποσότητα $\sqrt{\frac{2(E - V)}{m}}$ θα πρέπει να έρθει στο ίδιο μέλος με το dx .

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2(E - V)}{m}}} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2(E - V)}{m}}} \Rightarrow t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2(E - V)}{m}}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.24

Σώμα μάζας $m = 2\text{kg}$ κινείται στον άξονα x υπό την επίδραση διατηρητικής δύναμης με σταθερή δυναμική ενέργεια $V = 2\text{Joule}$. Η συνολική ενέργεια είναι $E = 6\text{Joule}$ και την χρονική στιγμή $t_1 = 0$ βρίσκεται στη θέση $x_1 = 0$. Να υπολογιστεί ο χρόνος που απαιτείται για να καλύψει απόσταση x .

Λύση:

Η ολική ενέργεια είναι: $E = V + K$. Εισάγοντας τις τιμές της μάζας, της δυναμικής και της ολικής ενέργειας προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}mv^2 = E - V \Rightarrow v^2 = \frac{2(E - V)}{m} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(6 - 2)}{2}} \text{ ή}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2 \Rightarrow dt = \frac{dx}{2} \Rightarrow \int_0^t dt = \frac{1}{2} \int_0^x dx \Rightarrow t = \frac{x}{2}$$

Αλλιώς θα μπορούσε να σκεφτεί κανείς ως εξής: Αφού η δυναμική ενέργεια είναι σταθερή η δύναμη που ασκείται στο σώμα θα είναι $F = -\frac{dV}{dx} = 0$, άρα το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Η κινητική ενέργεια θα είναι $K = E - V = 4\text{Joule}$ οπότε $\frac{1}{2}mv^2 = 4 \Rightarrow v = 2\text{m/sec}$ και αφού η ταχύτητα είναι σταθερή $t = \frac{x}{v} = \frac{x}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 4.25

Σώμα μάζας $m = 2\text{kg}$ κινείται στον άξονα x προς την θετική κατεύθυνση υπό την επίδραση διατηρητικής δύναμης με δυναμική ενέργεια $V = 4 \cdot x$. Η συνολική ενέργεια είναι $E = 36\text{Joule}$ και την χρονική στιγμή $t_1 = 0$ βρίσκεται στη θέση $x_1 = 0$. Να υπολογιστεί ο χρόνος που απαιτείται για να καλύψει μία απόσταση x .

Λύση:

Η ολική ενέργεια είναι: $E = V + K$. Εισάγοντας τις τιμές της μάζας, της δυναμικής και της ολικής ενέργειας προκύπτει ότι $\frac{1}{2}mv^2 = E - V$ ή $v^2 = \frac{2(E - V)}{m}$ και αφού το

σώμα κινείται προς την θετική κατεύθυνση θα είναι $v = \sqrt{\frac{2(36 - 4 \cdot x)}{2}}$

$$\Rightarrow v = \sqrt{36 - 4 \cdot x} \text{ ή } \frac{dx}{dt} = 2\sqrt{9 - x} \Rightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{9 - x}} \Rightarrow$$

$$\int_0^t dt = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{9 - x}} \Rightarrow t = \frac{1}{2} (-2) [\sqrt{9 - x}]_0^x = -(\sqrt{9 - x} - \sqrt{9})$$

οπότε $t = (3 - \sqrt{9 - x})\text{sec}$. Προφανώς θα πρέπει $9 - x \geq 0$ συνθήκη που αντιστοιχεί στην επιτρεπόμενη περιοχή κίνησης του σώματος. Πράγματι το σώμα μπορεί να κινηθεί προς τα δεξιά του άξονα x μέχρι το σημείο στο οποίο $V(x) = E$ ή $4x = 36$ δηλαδή $x = 9\text{m}$.

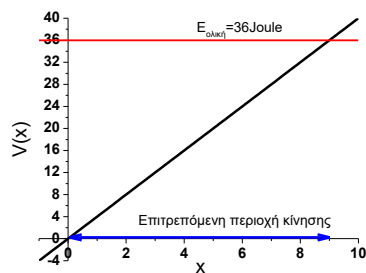
Αλλιώς θα μπορούσε να σκεφτεί κανείς ως εξής: Αφού η δυναμική ενέργεια είναι $V = 4 \cdot x$ η δύναμη που ασκείται στο σώμα θα είναι $F = -\frac{dV}{dx} = -4N$, άρα το σώμα

κάνει μεταβαλλόμενη κίνηση. Υπολογισμός της αρχικής ταχύτητας: Η κινητική ενέργεια στην θέση $x=0$ είναι $K(0) = E - V(0) = 36 \text{ Joule}$ οπότε

$\frac{1}{2} m v_0^2 = 36 \Rightarrow v_0 = 6 \text{ m/sec}$ γιατί δίνεται ότι το σώμα κινείται προς την θετική

κατεύθυνση. Το σώμα κάνει επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα

$v_0 = 6 \text{ m/sec}$ και επιβράδυνση $a = \frac{F}{m} = -\frac{4}{2} = -2 \text{ m/sec}^2$. Η εξίσωση του διαστήματος



θα είναι $x = 6t - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^2$ και για να προσδιοριστεί ο χρόνος μπορεί να γραφτεί σαν:

$$-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^2 + 6t - x = 0 \quad \text{ή} \quad t^2 - 6t + x = 0$$

$\Delta = 36 - 4x$ και $t_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - x}$. Τι νόημα έχουν οι δύο τιμές του χρόνου που βρέθηκαν; Αρχικά πρέπει να

σημειωθεί ότι η εξίσωση σωστά προβλέπει $x \leq 9 \text{ m}$ γιατί αυτή είναι η επιτρεπόμενη περιοχή κίνησης. Το κινητό ξεκινάει από την θέση $x=0$ με αρχική ταχύτητα

$v_0 = 6 \text{ m/sec}$ και κινείται επιβραδυνόμενο προς τα δεξιά μέχρι τη θέση $x=9 \text{ m}$. Μόλις φτάσει εκεί η ταχύτητά του έχει γίνει $v=0$, όμως η δύναμη $F = -4 \cdot x$ συνεχίζει να ασκείται επάνω του και το υποχρεώνει να κινηθεί προς την αρνητική κατεύθυνση κάνοντας επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα. Κατά συνέπεια το κινητό φτάνει σε μία τυχαία θέση x δύο φορές: την πρώτη φορά κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση σε χρόνο $t_1 = 3 - \sqrt{9 - x}$ και την δεύτερη φορά κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση σε χρόνο $t_2 = 3 + \sqrt{9 - x}$.

ΑΣΚΗΣΗ 4.26

Σημειακή μάζα κινείται στον άξονα x υπό την επίδραση διατηρητικής δύναμης με

γνωστή συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(x) = \frac{1}{2} kx^2$. Το σώμα ξεκινάει από τη θέση

x_0 την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ με μηδενική ταχύτητα, να βρεθεί η συνάρτηση θέσης

$$x = x(t). \quad \text{Δίνεται ότι} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right) + c$$

Λύση:

α) Η ολική ενέργεια δίνεται από τη σχέση: $E = V + K$. Την χρονική στιγμή $t = 0$ η εξίσωση της ενέργειας γίνεται: $E = V(0) + K(0)$.

Εφόσον το σώμα ξεκινάει από τη θέση x_0 την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ με μηδενική ταχύτητα θα είναι:

$V(0) = \frac{1}{2} kx_0^2$ και $K(0) = \frac{1}{2} m v_0^2 = 0$ οπότε $E = \frac{1}{2} kx_0^2$. Σε μια τυχαία χρονική στιγμή

η εξίσωση της ενέργειας θα έχει την μορφή: $\frac{1}{2} kx_0^2 = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m v^2$ οπότε

$$v^2 = \frac{k}{m} x_0^2 - \frac{k}{m} x^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{x_0^2 - x^2}$$

Για να προσδιοριστεί η συνάρτηση της θέσης του κινητού αντικαθιστούμε $v = \frac{dx}{dt}$ και

προκύπτει $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{x_0^2 - x^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot dt = \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}}$. Στη συνέχεια

ολοκληρώνουμε από $\{t_0 = 0 \quad x = x_0\}$ μέχρι $\{t \quad x\}$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \int_0^t dt = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t = \left[\arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right) \right]_{x_0}^x$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t = \left[\arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right) \right] - \underbrace{\left[\arcsin\left(\frac{x_0}{x_0}\right) \right]}_{\pi/2} \text{ οπότε } \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t = \left[\arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right) \right] - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ή } \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \frac{\pi}{2} = \left[\arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right) \right] \Rightarrow \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{x}{x_0} \Rightarrow x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

Αντικαθιστώντας $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ προκύπτει η συνάρτηση θέσης της αρμονικής ταλάντωσης

$$x = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.27

Σώμα μάζας $m = 0,5 \text{ kg}$ κινείται κατά μήκος του άξονα x σε περιοχή που χαρακτηρίζεται από την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(x) = 2(x^2 - 1)^2$. α) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας και να χαρακτηρισθούν ως προς την ευστάθεια. β) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $V(x)$. γ) Το σώμα αφήνεται στο σημείο $x = -1$ με ταχύτητα $v_0 < 2 \text{ m/sec}$. Περιγράψτε την κίνηση που θα κάνει. δ) Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το σώμα αν αφηθεί στο σημείο $x = +1$ έτσι ώστε να υποχρεωθεί να εκτελεί περιοδική κίνηση γύρω από το σημείο αυτό; ε) Εάν το σώμα αφηθεί σε ένα από τα σημεία $x = \pm 1$ με ταχύτητα $v_0 \ll \sqrt{8} \text{ m/sec}$, αποδείξτε ότι, σε πολύ καλή προσέγγιση θα κάνει αρμονική ταλάντωση. Υπολογίστε την κυκλική συχνότητα.

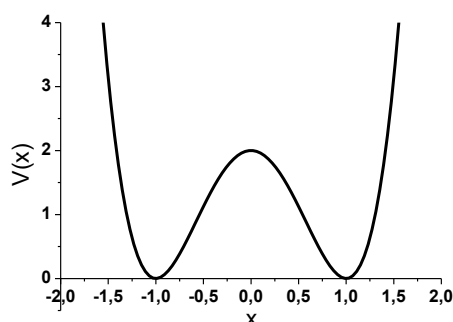
Λύση:

α) Σημεία ισορροπίας είναι τα σημεία στα οποία η πρώτη παράγωγος της δυναμικής ενέργειας ισούται με μηδέν.

$$\frac{dV}{dx} = 2 \cdot 2 \cdot (x^2 - 1)(x^2 - 1) = 4(x^2 - 1) \cdot 2x = 8x(x^2 - 1)$$

Σημεία ισορροπίας: $x = \{-1, 0, 1\}$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 8(x^2 - 1) + 8x \cdot 2x = 8(x^2 - 1) + 16x^2$$



Για $x = -1$ είναι $\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=-1} = 16 > 0$, ελάχιστο άρα

ΕΥΣΤΑΘΗΣ ισορροπία

Για $x = 0$ είναι $\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=0} = -8 < 0$, μέγιστο άρα

ΑΣΤΑΘΗΣ ισορροπία

Για $x = +1$ είναι $\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=1} = 16 > 0$, ελάχιστο άρα

ΕυΣΤΑΘΗΣ ισορροπία

β) Γραφική παράσταση

Η συνάρτηση τέμνει τον άξονα x στα σημεία: $V(x) = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = \{1, -1\}$

Η συνάρτηση τέμνει τον άξονα y στο σημείο $V(0) = 2$ το οποίο είναι τοπικό μέγιστο.

Η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο και τέμνει τον άξονα στα $x = \{1, -1\}$, επομένως στα σημεία αυτά η γραφική παράσταση εφάπτεται στον άξονα x . Με βάση τα παραπάνω σχεδιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης της δυναμικής ενέργειας.

γ) Όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = +1$ έχει μηδενική δυναμική ενέργεια επομένως όλη η ενέργεια που έχει είναι η κινητική. Η ταχύτητα με την οποία αφήνεται το σώμα στη θέση αυτή είναι $v_0 < 2m/\text{sec}$, επομένως η ενέργεια που έχει

είναι $E = K = \frac{1}{2}mv_0^2 < 1\text{Joule}$. Το σώμα κινείται προς τα αριστερά αλλά δεν έχει

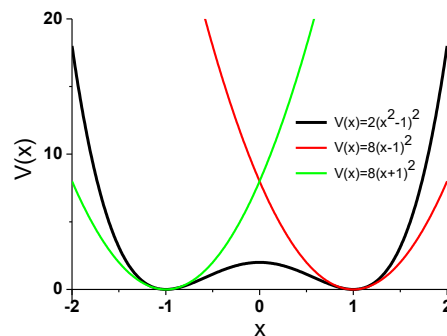
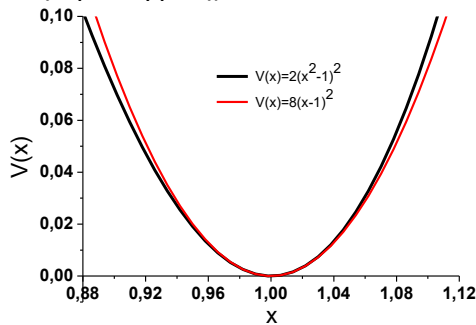
αρκετή ενέργεια για να ξεπεράσει το φράγμα των 2Joule που υπάρχει στη θέση $x = 0$

δ) Για να υποχρεωθεί το σώμα να εκτελεί περιοδική κίνηση γύρω από το σημείο $x = -1$ θα πρέπει η κινητική ενέργεια που θα του δοθεί να μην είναι αρκετή να ξεπεράσει το φράγμα των 2Joule που υπάρχει στη θέση $x = 0$, δηλαδή

$$E(-1) = K(-1) = \frac{1}{2}mv_{-1}^2 > 2 \Rightarrow v_{-1} > \sqrt{8}m/\text{sec}$$

ε) Ένα σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση όταν η δυναμική του ενέργεια μεταβάλλεται σαν $V(x) \sim x^2$. Στην προκειμένη περίπτωση η δυναμική ενέργεια μεταβάλλεται σύμφωνα με την εξίσωση $V(x) = 2(x^2 - 1)^2$, δηλαδή $V(x) \sim x^4$. Όταν η μάζα αφήνεται σε κάποιο από τα σημεία $x = +1$ με πάρα πολύ μικρή ταχύτητα, τότε

αυτό θα κινείται πολύ κοντά στο σημείο ευσταθούς ισορροπίας και στην περίπτωση αυτή, το πρόβλημα ζητά να αποδειχθεί, ότι εκτελεί αρμονική ταλάντωση (σε πολύ καλή προσέγγιση).



Στο γράφημα που βρίσκεται στα αριστερά γίνεται σύγκριση της γραφικής παράστασης της δυναμικής ενέργειας $V(x) = 2(x^2 - 1)^2$ και της συνάρτησης $V(x) = 8(x-1)^2$. Είναι φανερό ότι η διαφορά τους είναι ελάχιστη. Η γραφική παράσταση στα δεξιά συγκρίνει την συνάρτηση $V(x) = 2(x^2 - 1)^2$ με τις παραβολές που εφάπτονται στα σημεία $x = +1$. Όπως φαίνεται η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας προσεγγίζεται με μεγάλη ακρίβεια από τις παραβολές $V(x) = 8(x \pm 1)^2$, μόνο κοντά στα σημεία $x = +1$. Για τα υπόλοιπα η απόκλιση είναι μεγάλη.

Τα παραπάνω δείχνουν πως στην περίπτωση που η ταχύτητα που δίνεται στο σώμα είναι πάρα πολύ μικρή, η δυναμική του ενέργεια στην περιοχή που κινείται είναι σε πολύ καλή προσέγγιση μία παραβολή $V(x) \sim x^2$. Αυτό φαίνεται με την χρήση του αναπτύγματος Taylor.

Το ανάπτυγμα Taylor που ακολουθεί δίνει μία προσέγγιση της συνάρτησης $V(x)$ κοντά στο $x = 1$

$$V(x) = \frac{V(1)}{0!}(x-1) + \frac{V'(1)}{1!}(x-1)^1 + \frac{V''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots \text{ αλλά όπως βρήκαμε } V(1) = 0$$

$$\text{και } V'(1) = 0 \text{ οπότε ο πρώτος μη μηδενικός όρος είναι ο } \frac{V''(1)}{2!}(x-1)^2 = \frac{16}{2}(x-1)^2$$

$$\text{και επειδή η δυναμική ενέργεια ενός αρμονικού ταλαντωτή είναι } V(x) = \frac{1}{2}k(x-1)^2$$

$$\text{θα είναι } k = 16. \text{ Αλλά } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{16}{2}} = \sqrt{8} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 4.1Α

Σώμα κινείται υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F} = (y^2 - z^2)\hat{i} + 2xy\hat{j} + (z - y)\hat{k}$.

Να υπολογισθεί το έργο της δύναμης αυτής για μετακίνηση του σώματος από το σημείο (0,0,0) μέχρι το σημείο (2,4,4) ακολουθώντας την διαδρομή: Πάνω στον άξονα x από το (0,0,0) ως το (2,0,0), παράλληλα προς τον άξονα y ως το (2,4,0) και παράλληλα στον άξονα z ως το (2,4,4).

ΑΣΚΗΣΗ 4.2Α

Η δύναμη $\vec{F} = 3x^2 \hat{i} + 4y^3 \hat{j}$ ασκείται σε ένα σωματίδιο μάζας m και το μεταφέρει από το σημείο $(0,1)$ στο $(3,3)$. Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης.

ΑΣΚΗΣΗ 4.3Α

Ένα σώμα δέχεται δύναμη $\vec{F} = (2x - y + z)\hat{i} + (x + y - z^2)\hat{j} + (3x - 2y + 4z)\hat{k}$. Το σώμα υποχρεώνεται να κινηθεί επάνω στο επίπεδο xy και να διαγράψει περιφέρεια κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $3m$. Υπολογίστε το έργο της δύναμης για πλήρη περιστροφή.

ΑΣΚΗΣΗ 4.4Α

Εξετάστε κατά πόσο το έργο του πεδίου που παράγει την δύναμη:

$\vec{F} = (y^2 z^3 - 6xz^2)\hat{i} + 2xyz^3 \hat{j} + (3xy^2 z^2 - 6x^2 z)\hat{k}$ που ασκείται σε κάποιο σωματίδιο από μια θέση A ως μια θέση B θα εξαρτάται από την καμπύλη που συνδέει τα σημεία A και B .

ΑΣΚΗΣΗ 4.5Α

Υλικό σημείο μάζας m κινείται στον άξονα x υπό την επίδραση της δύναμης

$$F = -kx + \frac{k}{a} x^2, \text{ όπου } k \text{ και } a \text{ θετικές σταθερές.}$$

- Να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας και να καθοριστούν οι θέσεις ισορροπίας του υλικού σημείου.
- Αν το υλικό σημείο ξεκινά από τη θέση $x = -a$ χωρίς αρχική ταχύτητα, να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία περνά από τη θέση όπου η δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη.

ΑΣΚΗΣΗ 4.6Α

Εξετάστε εάν τα πεδία των παρακάτω δυνάμεων είναι διατηρητικά. Στην περίπτωση των διατηρητικών πεδίων υπολογίστε τη συνάρτηση του δυναμικού.

α) $\vec{F}_1 = (2x + 2y)\hat{i} + (3x - y)\hat{j}$, β) $\vec{F}_2 = (x + 2y^2)\hat{i} + 4xy \hat{j}$

γ) $\vec{F}_3 = (x - 3y^2)\hat{i} - 6xy \hat{j}$, δ) $\vec{F}_4 = (x - \sqrt{y})\hat{i} - \frac{x}{2\sqrt{y}} \hat{j}$

ΑΣΚΗΣΗ 4.7Α

Σε ένα σώμα μάζας m ασκείται η δύναμη:

$\vec{F} = (x + 3y - z)\hat{i} + (3x^2 - y + z^2)\hat{j} + (x - 2y - 6z)\hat{k}$. Να υπολογιστεί το έργο όταν το σώμα μετατοπίζεται από το σημείο $(3,9)$ στο σημείο $(4,16)$ ακολουθώντας την παραβολή $y = x^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 4.8Α

Δίνεται το διανυσματικό πεδίο: $\vec{F} = (x - y)\hat{i} + (y - x)\hat{j}$ α) Να αποδείξετε ότι είναι διατηρητικό. β) Να υπολογιστεί η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας, $V = V(x, y, z)$, από την οποία αυτό προέρχεται, θεωρώντας ως σημείο αναφοράς (μηδενικής δυναμικής ενέργειας) το σημείο $(x=0, y=0, z=0)$.

ΑΣΚΗΣΗ 4.9Α

Σώμα κινείται πάνω στον άξονα x , έχει μάζα $m = 2\text{kg}$ και δυναμική ενέργεια που δίνεται από τη σχέση: $V(x) = x^2(x - 4)^2$ (σε μονάδες S.I.)

α) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του σώματος και τα σημεία μηδενισμού της δυναμικής ενέργειας.

β) Να βρεθεί η δύναμη $F(x)$ που ασκεί το πεδίο στο σώμα. Να σχεδιαστεί πρόχειρα η συνάρτηση $V(x)$, αφού βρεθούν τα χαρακτηριστικά της σημεία

γ) Αν το σώμα έχει ολική ενέργεια $E = 8\text{Joule}$, να σχεδιαστούν προσεγγιστικά στο διάγραμμα $V(x)$ τα όρια των τιμών του x ανάμεσα στα οποία μπορεί να κινηθεί το σώμα (δεν χρειάζονται αριθμητικές τιμές).

δ) Αν σε κάποια στιγμή το σώμα βρίσκεται στο σημείο $x = 0$, ποια είναι η ελάχιστη αρχική ταχύτητα που πρέπει να του δώσουμε ώστε να περάσει από το σημείο $x = 4\text{m}$;