

ΑΣΚΗΣΗ 5.1

Το διάνυσμα θέσης ενός σώματος μάζας $m=0,5\text{kg}$ δίνεται από τη σχέση:

$\vec{r} = (t^2 - 6t)\hat{i} - (3t - 2)\hat{j}$. α) Βρείτε την θέση και το μέτρο της ταχύτητας του κινητού την χρονική στιγμή $t=0$. β) Τι είδους κίνηση κάνει το κινητό σε κάθε άξονα; γ) υπολογίστε τη στροφορμή του ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και δ) τη ροπή των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα ως προς το ίδιο σημείο.

Λύση:

α) Την χρονική στιγμή $t=0$ είναι $\vec{r}(0) = 2\hat{j}$, δηλαδή το σώμα βρίσκεται στην θέση 2 του άξονα y .

Υπολογισμός της ταχύτητας $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (2t - 6)\hat{i} - (3)\hat{j}$. Την χρονική στιγμή $t=0$ είναι

$\vec{v}(0) = -6\hat{i} - 3\hat{j}$ οπότε το μέτρο της ταχύτητας θα είναι:
 $v = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{45}\text{m/sec}$.

β) Επειδή $x(t) = (t^2 - 6t)$ στον άξονα x κάνει ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση.

$y(t) = 2 - 3t$ οπότε στον άξονα y η κίνηση είναι ομαλή με αρχικό διάστημα $y_0 = 2\text{m}$.

γ) $\vec{p} = m\vec{v} = (4t - 12)\hat{i} - 6\hat{j}$

Η στροφορμή είναι:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ t^2 - 6t & -3t + 2 & 0 \\ 4t - 12 & -6 & 0 \end{vmatrix} = (-3t^2 + 18t + 6t^2 - 22t + 12)\hat{k} = (3t^2 - 4t + 12)\hat{k}$$

Η ροπή που ασκείται στο σώμα είναι ίση με τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής:

$\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(3t^2 - 4t + 12)}{dt}\hat{k} = (6t - 4)\hat{k}$. Το διάνυσμα της ροπής είναι κάθετο στο επίπεδο κίνησης xy .

ΑΣΚΗΣΗ 5.2

Η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ δίνεται από τη σχέση:

$\vec{F}(x, y) = (x - y - 2)\hat{i} + (y - x)\hat{j}$, όπου $x = (t - 1)^2$ και $y = t^2 - 8t - 1$ α) Εκφράστε την

δύναμη σαν συνάρτηση του χρόνου. Στη συνέχεια βρείτε την επιτάχυνση $\vec{a}(t)$, την ταχύτητα $\vec{v}(t)$ και το διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$ του σώματος. Δίνεται ότι την χρονική

στιγμή $t=0$ είναι $\vec{v}(0) = 0$ και $\vec{r}(0) = 0$ β) υπολογίστε τη στροφορμή του ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και γ) τη ροπή των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα ως προς το ίδιο σημείο. δ) Αποδείξτε ότι η δύναμη είναι

διατηρητική και υπολογίστε την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας. ε) Υπολογίστε το έργο όταν το σώμα μετακινείται από το σημείο $A(0,2)$ στο $B(1,4)$

Λύση:

α) Από τις σχέσεις $x = (t-1)^2 = t^2 - 2t + 1$ και $y = t^2 - 8t - 1$ μπορούν να υπολογιστούν οι συνιστώσες της δύναμης.

$$x - y = 6t + 2 \text{ και } y - x = -6t - 2$$

$$\vec{F}(t) = 6t \hat{i} - (6t + 2) \hat{j}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m} = 3t \hat{i} - (3t + 1) \hat{j} \text{ ή } \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 3t \hat{i} - (3t + 1) \hat{j} \Rightarrow d\vec{v}(t) = 3t \cdot dt \hat{i} - (3t + 1) dt \hat{j}$$

Ολοκληρώνοντας η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\int_0^v d\vec{v}(t) = \int_0^t 3t \cdot dt \hat{i} - \int_0^t (3t + 1) dt \hat{j} \Rightarrow \vec{v}(t) = \left[\frac{3t^2}{2} \right]_0^t \hat{i} - \left(\left[\frac{3t^2}{2} \right]_0^t + [t]_0^t \right) \hat{j}$$

$$\text{οπότε } \vec{v}(t) = \frac{3t^2}{2} \hat{i} - \left(\frac{3t^2}{2} + t \right) \hat{j}$$

Ολοκληρώνοντας την συνάρτηση της ταχύτητας υπολογίζεται το διάνυσμα θέσης.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{3t^2}{2} \hat{i} - \left(\frac{3t^2}{2} + t \right) \hat{j} \Rightarrow d\vec{r}(t) = \frac{3t^2}{2} dt \hat{i} - \left(\frac{3t^2}{2} + t \right) dt \hat{j}$$

$$\Rightarrow \int_0^r d\vec{r}(t) = \int_0^t \frac{3t^2}{2} dt \hat{i} - \int_0^t \left(\frac{3t^2}{2} + t \right) dt \hat{j} \Rightarrow \vec{r}(t) = \left[\frac{3t^3}{6} \right]_0^t \hat{i} - \left[\frac{3t^3}{6} \right]_0^t \hat{j} - \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^t \hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = \frac{t^3}{2} \hat{i} - \left(\frac{t^3}{2} + \frac{t^2}{2} \right) \hat{j}$$

$$\beta) \text{ Υπολογισμός της ορμής: } \vec{p}(t) = m \cdot \vec{v}(t) = 2 \frac{3t^2}{2} \hat{i} - 2 \left(\frac{3t^2}{2} + t \right) \hat{j} = 3t^2 \hat{i} - (3t^2 + 2t) \hat{j}$$

$$\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{t^3}{2} & -\frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} & 0 \\ 3t^2 & -(3t^2 + 2t) & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{3t^5}{2} - t^4 + \frac{3t^5}{2} + \frac{3t^4}{2} \right) \hat{k} = \frac{t^4}{2} \hat{k}$$

$$\gamma) \text{ Υπολογισμός της ροπής: } \vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 2t^3 \hat{k}$$

δ) Το σώμα κινείται στο επίπεδο (x, z) και η συνθήκη του Euler θα είναι:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = -1 \text{ οπότε το πεδίο είναι διατηρητικό}$$

Υπολογισμός της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας:

$$F_x = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \Rightarrow dU = -(x - y - 2) dx \Rightarrow \int dU = -\int (x - y - 2) dx$$

$$\Rightarrow U(x, y) = -\frac{x^2}{2} + xy + 2x + g(y)$$

Εισάγουμε την $U(x, y) = -\frac{x^2}{2} + xy + 2x + g(y)$ στην $F_y = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}$

$$F_y = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \Rightarrow (y-x) = -\frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{x^2}{2} + xy + 2x + g(y) \right] \Rightarrow (y-x) = -x - g'(y) \Rightarrow$$

$$g'(y) = -y \Rightarrow \frac{dg(y)}{dy} = -y \Rightarrow \int dg(y) = g(y) = -\frac{y^2}{2} + c$$

οπότε $g(y) = -\frac{y^2}{2} + c$

Άρα $U(x, y) = -\frac{x^2}{2} + xy + 2x - \frac{y^2}{2} + c$

$$W_{(0,2) \rightarrow (1,4)} = U(0,2) - U(1,4) = -2 - \left(-\frac{1}{2} + 4 + 2 - 8 \right) = \frac{1}{2} \text{ Joule}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.3

Ένα σώμα μάζας m κινείται σε πεδίο δυνάμεων και η θέση του δίνεται από το διάνυσμα θέσης: $\vec{r} = a \cos \omega t \hat{i} + b \sin \omega t \hat{j}$, όπου a, b, ω θετικές σταθερές και t ο χρόνος.

α) Ποια είναι η εξίσωση της τροχιάς που διαγράφει το σώμα;

β) Να υπολογιστεί η στροφορμή ως προς την αρχή των αξόνων.

γ) Να υπολογιστεί η δύναμη F που ασκείται στο σώμα και να αποδειχθεί ότι είναι κεντρική.

Λύση:

α) Το διάνυσμα $\vec{r} = a \cdot \cos \omega t \hat{i} + b \cdot \sin \omega t \hat{j}$ βρίσκεται στο επίπεδο xy και οι συνιστώσες του στους άξονες είναι $x = a \cdot \cos \omega t$ και $y = b \cdot \sin \omega t$. Η εξίσωση της τροχιάς είναι η εξίσωση μεταξύ των x και y .

$$\left. \begin{array}{l} x = a \cdot \cos \omega t \\ y = b \cdot \sin \omega t \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1, \text{ που είναι η εξίσωση μιας έλλειψης.}$$

β) Το διάνυσμα της ταχύτητας προκύπτει με παραγωγή του διανύσματος θέσης.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -a \cdot \omega \cdot \sin \omega t \hat{i} + b \cdot \omega \cdot \cos \omega t \hat{j} \text{ οπότε η ορμή θα είναι:}$$

$$\vec{p} = -m \cdot \omega \left(a \cdot \sin \omega t \hat{i} - b \cdot \cos \omega t \hat{j} \right)$$

Η στροφορμή ορίζεται σαν $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a \cdot \cos \omega t & b \cdot \sin \omega t & 0 \\ -a \cdot \omega \cdot \sin \omega t & b \cdot \omega \cdot \cos \omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{L} = m(a \cdot b \cdot \omega \cdot \cos^2 \omega t + a \cdot b \cdot \omega \cdot \sin^2 \omega t) \hat{k}$$

$\vec{L} = m \cdot a \cdot b \cdot \omega \cdot \hat{k}$. Το διάνυσμα της στροφορμής είναι κάθετο στο επίπεδο κίνησης.

γ) Η δύναμη που ασκείται στο σώμα μπορεί να υπολογιστεί με την χρήση της εξίσωσης που Νεύτωνα.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \cdot \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \left(-a \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t \hat{i} - b \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \hat{j} \right) = \\ &= -m \cdot \omega^2 \underbrace{\left(a \cdot \cos \omega t \hat{i} + b \cdot \sin \omega t \hat{j} \right)}_{\vec{r}} \end{aligned}$$

$\vec{F} = -m \cdot \omega^2 \vec{r}$ που είναι εξίσωση κεντρικής δύναμης. Η στροφορμή μιας κεντρικής δύναμης παραμένει σταθερή. Αυτό φαίνεται υπολογίζοντας την ροπή της δύναμης.

$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$, εισάγοντας την εξίσωση της δύναμης γίνεται

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \left(-m \cdot \omega^2 \vec{r} \right) = 0, \text{ δηλαδή } \vec{r} \times \vec{F} = 0. \text{ Αλλά η ροπή ισούται με τον}$$

ρυθμό μεταβολής της στροφορμής, δηλαδή: $\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$. Κατά συνέπεια η στροφορμή μένει σταθερή.

ΑΣΚΗΣΗ 5.4

Σώμα μάζας m βάλλεται από σημείο O υπό γωνία ϕ με αρχική ταχύτητα v_0 . Υπολογίστε τη στροφορμή του ως προς το O σαν συνάρτηση του χρόνου. Υπολογίστε την παράγωγο της στροφορμής ως προς τον χρόνο. Εξηγείστε το φυσικό της νόημα.

Λύση:

Στον άξονα x κάνει ομαλή κίνηση με ταχύτητα $v_x = v_0 \cos \phi$. Η απόσταση από το σημείο O είναι $x = v_0 \cos \phi \cdot t$

Στον άξονα y κάνει επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση g και αρχική ταχύτητα $v_y = v_0 \sin \phi - gt$. Η απόσταση από το σημείο O είναι $y = v_0 \sin \phi \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$.

Το διάνυσμα θέσης είναι $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = v_0 \cos\phi \cdot t\hat{i} + \left(v_0 \sin\phi \cdot t - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{j}$

Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = v_0 \cos\phi\hat{i} + (v_0 \sin\phi - gt)\hat{j}$ και

το διάνυσμα της ορμής $\vec{p} = p_x\hat{i} + p_y\hat{j} = mv_0 \cos\phi\hat{i} + m(v_0 \sin\phi - gt)\hat{j}$

$$\text{Η στροφορμή δίνεται από τη σχέση } \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = m \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_0 t \cos\phi & v_0 t \sin\phi - \frac{1}{2}gt^2 & 0 \\ v_0 \cos\phi & v_0 \sin\phi - gt & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= m \left(v_0^2 t \cos\phi \cdot \sin\phi - v_0 t^2 g \cos\phi - v_0^2 t \cos\phi \cdot \sin\phi + \frac{1}{2} v_0 t^2 g \cos\phi \right) \hat{k} =$$

$$= -\frac{1}{2} m v_0 t^2 g \cos\phi \hat{k}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -m v_0 g t \cos\phi \hat{k} = -(mg) \cdot (v_0 t \cos\phi) \hat{k} = -B \cdot x \hat{k} \text{ που είναι η ροπή του βάρους.}$$

Πράγματι, η ροπή του βάρους ως προς το σημείο Ο είναι

$$\vec{T} = \vec{B} \times \vec{r} = (mg)\hat{j} \times (x\hat{i} + y\hat{j}) =$$

$$= (mg)\hat{j} \times x\hat{i} + \underbrace{(mg)\hat{j} \times y\hat{j}}_0 = mgx \underbrace{(\hat{j} \times \hat{i})}_{-\hat{k}} = -mg v_0 \cos\phi \cdot t \hat{k}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.5

Η στροφορμή ενός σωματιδίου ως προς ένα σημείο Ο δίνεται από τη σχέση

$$\vec{L} = \vec{a} + \vec{b}t^2 \text{ όπου } \vec{a} \text{ και } \vec{b} \text{ είναι σταθερά διανύσματα κάθετα μεταξύ τους } \vec{a} \perp \vec{b} . \text{ Να}$$

υπολογιστεί η ροπή της δύναμης \vec{T} που ασκείται στο σωματίδιο ως προς το ίδιο

σημείο Ο, τη στιγμή που τα διανύσματα \vec{L} και \vec{T} σχηματίζουν γωνία $\left(\vec{L}, \vec{T}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Λύση:

Προφανώς η λύση απαιτεί τη σχέση ροπής-στροφορμής:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{a} + \vec{b} \cdot t^2) = 2\vec{b}t \quad (1)$$

Η γωνία των διανυσμάτων \vec{L} και \vec{T} υπολογίζεται από το εσωτερικό τους γινόμενο:

$$\vec{L} \cdot \vec{T} = (\vec{a} + \vec{b} \cdot t^2) \cdot (2\vec{b} \cdot t) = 2b^2 t^3$$

Υπολογισμός του μέτρου της στροφορμής: $L = \sqrt{\vec{L}^2} = \sqrt{a^2 + \underbrace{2\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot t^2}_0 + b^2 t^4}$

οπότε $L = \sqrt{a^2 + b^2 t^4}$

Υπολογισμός του μέτρου της ροπής: $T = \sqrt{\vec{T}^2} = \sqrt{2bt}$

$\vec{L} \cdot \vec{T} = L \cdot T \cdot \cos\phi$, αντικαθιστώντας τις τιμές των μέτρων των διανυσμάτων γίνεται:

$2bt\sqrt{a^2 + b^2 t^4} \cdot \cos(\pi/4) = 2b^2 t^3$ ή

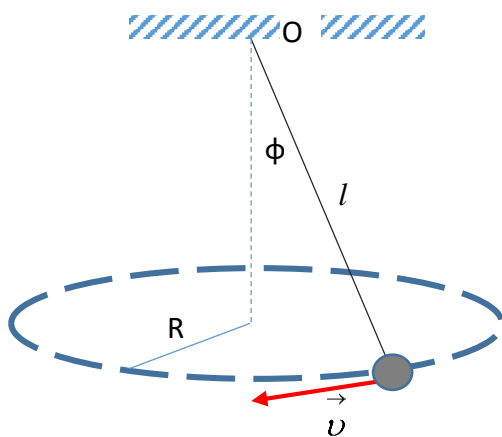
$\sqrt{a^2 + b^2 t^4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = bt^2$, υψώνοντας στο τετράγωνο:

$(a^2 + b^2 t^4) \frac{1}{2} = b^2 t^4$ ή $b^2 t^4 = a^2$ ή $t = \sqrt{\frac{a}{b}}$ και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1)

$\vec{T} = 2b\sqrt{\frac{a}{b}}$

ΑΣΚΗΣΗ 5.6

Μια μικρή σφαίρα μάζας m κρέμεται από αβαρές νήμα μήκους l και περιστρέφεται σε οριζόντια κυκλική τροχιά ακτίνας R προς την κατεύθυνση των δεικτών του ρολογιού με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω . Βρείτε τη στροφορμή ως προς το σημείο ανάρτησης O .



Λύση:

Η στροφορμή δίνεται από τη σχέση $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Υπολογίζοντας την στροφορμή ως προς το σημείο O : Το διάνυσμα θέσης της σφαίρας βρίσκεται στην ευθεία που ενώνει το O με την θέση του κινητού. Όμως η ευθεία αυτή είναι κάθετη στο διάνυσμα της ταχύτητας, οπότε η εξίσωση της στροφορμής γίνεται:

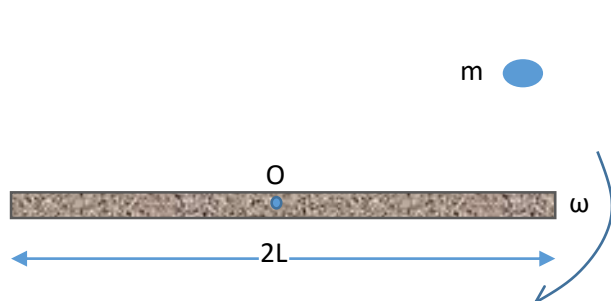
$L = mvl$ (1). Αλλά,

$$\left. \begin{array}{l} v = \omega \cdot R \\ R = l \cdot \sin\phi \end{array} \right\} \Rightarrow v = \omega \cdot l \cdot \sin\phi$$

Αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει: $L = m \cdot v \cdot l^2 \cdot \sin\phi$. Σε ότι αφορά την διεύθυνση της στροφορμής, αυτή είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν το νήμα και το διάνυσμα της ταχύτητας και η φορά προκύπτει με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

ΑΣΚΗΣΗ 5.7

Μια ομογενής λεπτή ράβδος έχει μήκος $2L$ και μάζα M . Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο της O και είναι κάθετος σε αυτήν. Η ροπή αδράνειας της ράβδου γύρω από αυτόν τον άξονα είναι $I_0 = M \frac{L^2}{3}$. Η ράβδος είναι αρχικά ακίνητη και οριζόντια. Μια σημειακή μάζα



$m = \frac{M}{3}$ βρίσκεται αρχικά ακίνητη πάνω από το ένα άκρο της ράβδου και σε ύψος L πάνω από αυτό. Η μάζα αφήνεται ελεύθερη, με μηδενική αρχική ταχύτητα να συγκρουστεί με το άκρο της ράβδου, στο οποίο και σφηνώνεται.

Δείξτε ότι: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2L}}$

α) Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μετά από την κρούση είναι $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2L}}$

β) Κατά την κρούση, η μισή κινητική ενέργεια της m μετατρέπεται σε θερμότητα.

γ) Η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος της ράβδου και της σημειακής μάζας στην κίνηση που θα επακολουθήσει είναι $\omega_{\max} = \sqrt{3}\omega_0$

Λύση:

α) Το σύστημα μάζας-ράβδου είναι απομονωμένο οπότε η στροφορμή του διατηρείται.

Εάν η ταχύτητα του μικρού σώματος λίγο πριν την κρούση με τη ράβδο είναι v , η ροπή αδράνειας της ράβδου είναι I_0 και η ταχύτητα του σώματος μετά την ενσωμάτωσή της επάνω στη ράβδο είναι u , θα ισχύει:

$$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}} \Rightarrow m \cdot v \cdot L \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = I_0 \omega_0 + m \cdot L \cdot u \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \text{ εισάγουμε τις σχέσεις:}$$

$$m = \frac{M}{3} \text{ και } I_0 = M \frac{L^2}{3}$$

$$\frac{M}{3} \cdot v \cdot L = \frac{M \cdot L^2}{3} \omega_0 + \frac{M}{3} \cdot L \cdot u \text{ ή } v = L \cdot \omega_0 + u \quad (1)$$

Το σώμα μάζας m κάνει ελεύθερη πτώση οπότε: $v = \sqrt{2gL}$

Μετά την ενσωμάτωση το σώμα μάζας m παρακολουθεί την κίνηση της ράβδου οπότε: $u = \omega_0 \cdot L$.

$$\text{Η εξίσωση (1) γίνεται: } \sqrt{2gL} = L \cdot \omega_0 + L \cdot \omega_0 \text{ και τελικά } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2L}}$$

β) Η ολική ενέργεια πριν την κρούση είναι: $E_0 = L \cdot m \cdot g = \frac{M \cdot g \cdot L}{3}$

Η ολική ενέργεια μετά την κρούση είναι: $E = \frac{1}{2} m \cdot u^2 + \frac{1}{2} I_0 \cdot \omega_0^2$

$E = \frac{1}{2} \frac{M}{3} \cdot (\omega_0 \cdot L)^2 + \frac{1}{2} \frac{M \cdot L^2}{3} \cdot \omega_0^2 = \frac{M \cdot L^2}{3} \cdot \omega_0^2$ εισάγοντας την σχέση $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2L}}$ γίνεται

$$E = \frac{M \cdot L^2}{3} \cdot \left(\sqrt{\frac{g}{2L}} \right)^2 = \frac{M}{3} \frac{g \cdot L}{2} \text{ δηλαδή } E = \frac{E_0}{2}$$

γ) Το σύστημα ράβδου-σώματος έχει την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα όταν βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση. Επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας επιλέγεται αυτό που περνάει από το κέντρο μάζας της ράβδου. Αρχική θέση επιλέγεται αυτή που έχει το σύστημα αμέσως μετά την ενσωμάτωση και τελική η κατακόρυφη. $K_1 + V_1 = K_{\max} + V$ ή $K_1 = K_{\max} + V$

Η ροπή αδράνειας μετά την ενσωμάτωση της μάζας m είναι $I = M \frac{L^2}{3} + m \cdot L^2$ ή

$$I = M \frac{L^2}{3} + \frac{M}{3} L^2 = \frac{2M \cdot L^2}{3} \text{ οπότε}$$

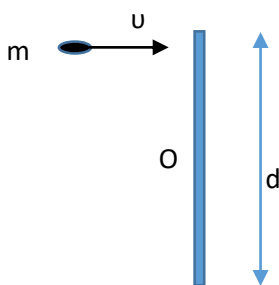
$$\frac{m \cdot g \cdot L}{2} = \frac{1}{2} I \omega_{\max}^2 - m \cdot g \cdot L \Rightarrow \frac{M \cdot g \cdot L}{6} = \frac{1}{2} \left(2M \frac{L^2}{3} \right) \omega_{\max}^2 - m \cdot g \cdot L$$

$$\Rightarrow \frac{M \cdot g \cdot L}{6} = \frac{1}{2} \left(2M \frac{L^2}{3} \right) \omega_{\max}^2 - \frac{M}{3} \cdot g \cdot L$$

$$\Rightarrow \frac{M \cdot g \cdot L}{2} = \frac{1}{2} \left(2M \frac{L^2}{3} \right) \omega_{\max}^2 \Rightarrow \omega_{\max} = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.8

Το βλήμα σφηνώνεται στο άκρο της ακίνητης ράβδου που έχει μάζα M και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το μέσο της O . Να υπολογιστούν: α) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας μετά την κρούση. β) Το κλάσμα της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος εξαιτίας της κρούσης. (Serway, Jewett Ασκ. 51, σελ. 461)



Λύση:

Οι στροφορμές υπολογίζονται ως προς άξονα που περνάει από το μέσο της ράβδου. Αρχική στροφορμή:

$$L_0 = m v \frac{d}{2}, \text{ οφείλεται μόνο στην ταχύτητα του βλήματος.}$$

Στροφορμή μετά την κρούση: Ροπή αδράνειας βλήματος-ράβδου μετά την κρούση:

$$I = I_0 + I_m = \frac{M d^2}{12} + m \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \frac{M d^2}{12} + m \frac{d^2}{4}$$

$L = \left(\frac{Md^2}{12} + m \frac{d^2}{3} \right) \omega$, το σύστημα βλήματος-ράβδου είναι απομονωμένο οπότε η στροφορμή διατηρείται:

$$L_0 = L \Rightarrow \omega = \frac{6m \cdot v_0}{M \cdot d + 3m \cdot d}$$

β) Η αρχική κινητική ενέργεια οφείλεται στην ταχύτητα του βλήματος μόνο.

$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$. Η κινητική ενέργεια αμέσως μετά την ενσωμάτωση του βλήματος είναι:

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{Md^2}{12} + m \frac{d^2}{3} \right) \omega^2 = \frac{3m^2 v_0^2 d}{2(Md + 3md)}$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι: $\Delta E = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{3m^2 v_0^2 d}{2(Md + 3md)} = \frac{mM v_0^2}{2(M + 3m)}$

Το κλάσμα της μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι $\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{\frac{mM v_0^2}{2(M + 3m)}}{\frac{1}{2} m v_0^2} = \frac{M}{M + 3m}$

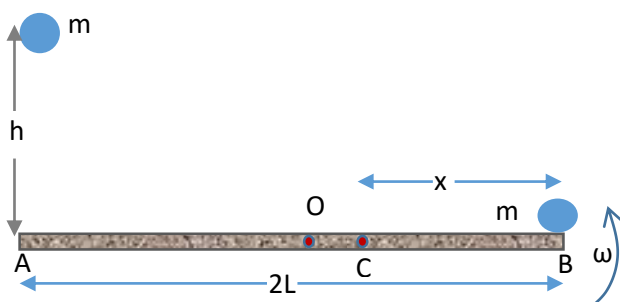
ΑΣΚΗΣΗ 5.9

Ομογενής ράβδος με άκρα A και B , μήκους $2L$ και μάζας M μπορεί να περιστραφεί ελεύθερα σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από άξονα κάθετο στη ράβδο που περνά από το σημείο C . Σημειακό σώμα μάζας m βρίσκεται στο άκρο B της ράβδου και το σύστημα ισορροπεί στην οριζόντια θέση.

α) να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου C από το σημείο B και τη ροπή αδράνειας της μάζας ως προς το σημείο C , I_C .

Από ύψος h σε κάθετη απόσταση από το άκρο A αφήνεται να πέσει από την ηρεμία σημειακό σώμα μάζας m το οποίο όταν χτυπά τη ράβδο παραμένει προσκολλημένο πάνω της.

β) να υπολογίσετε την ενέργεια που χάθηκε κατά την κρούση και τη γωνιακή



ταχύτητα του συστήματος μετά την κρούση

γ) με τις δοθείσες τιμές η ράβδος εκτελεί ταλάντωση ή κυκλική κίνηση;

Δεδομένα: $L = 0.6m$, $M = 2Kg$, $m = 0.4Kg$, $h = 2m$,

$$g = 10 \frac{m}{s^2}$$

Λύση:

Το σύστημα ράβδου-μάζας ισορροπεί γύρω απ' το σημείο C, δηλαδή η συνολική ροπή ως προς το C είναι μηδέν. Θεωρούμε όλη την μάζα της ράβδου συγκεντρωμένη στο μέσον της O, οπότε το πρόβλημα ισορροπίας περιλαμβάνει την ροπή της μάζας M που βρίσκεται στο σημείο O και την ροπή της μάζας m που βρίσκεται στο σημείο B.

$$\Sigma T_C = 0 \Rightarrow Mg \cdot OC - mg \cdot CB = 0 \Rightarrow M \cdot (L - x) - m \cdot x = 0 \Rightarrow x = \frac{M}{M + m} \cdot L$$

Αριθμητικός υπολογισμός: $x = 0,5m$

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το O είναι: $I_O = \frac{M \cdot L^2}{3}$. Η ροπή αδράνειας

της ράβδου ως προς το C είναι: $I_C = I_O + M(L - x)^2 = \frac{M \cdot L^2}{3} + M(L - x)^2$

Αριθμητικός υπολογισμός: $I_C = \frac{2 \cdot 0,6^2}{3} + 2(0,6 - 0,5)^2 = 0,26 \text{ kgr} \cdot \text{m}^2$

Η ροπή αδράνειας της μάζας m στο σημείο B είναι: $I_m = m \cdot x^2$

Αριθμητικός υπολογισμός: $I_m = 0,4 \cdot 0,5^2 = 0,1 \text{ kgr} \cdot \text{m}^2$

Η ροπή αδράνειας ράβδου-μάζας είναι: $I = 0,36 \text{ kgr} \cdot \text{m}^2$

β) Υπολογισμός της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος αμέσως μετά την κρούση και την ενσωμάτωση της μάζας m.

Οι στροφορμές υπολογίζονται ως προς άξονα που περνάει από το σημείο C. Η αρχική στροφορμή του συστήματος οφείλεται στην ταχύτητα v της μάζας m λίγο πριν ενσωματωθεί στη ράβδο. Η ταχύτητα αποκτήθηκε στην διάρκεια ελεύθερης πτώσης οπότε θα είναι $v = \sqrt{2gh}$.

$$L_0 = m \cdot v \cdot (2L - x) = m \cdot \sqrt{2gh} \cdot (2L - x)$$

Η τελική στροφορμή οφείλεται στην περιστροφική κίνηση του συστήματος μάζα-ράβδος-μάζα. Η ροπή αδράνειας θα είναι

$$I_{ολ} = I_C + m(2L - x)^2 = \frac{M \cdot L^2}{3} + M(L - x)^2 + m(2L - x)^2$$

$$L_{τελ} = I_{ολ} \cdot \omega$$

Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής θα είναι:

$$L_0 = L_{τελ} \Rightarrow \omega = \frac{m \cdot v \cdot (2L - x)}{I_C + mx^2 + m(2L - x)^2}$$

Αριθμητικός υπολογισμός: $\omega = \frac{0,4 \cdot \sqrt{40} \cdot (1,2 - 0,5)}{0,26 + 0,4 \cdot 0,5^2 + 0,4 \cdot (1,2 - 0,5)^2} = \frac{56\sqrt{10}}{55,6}$

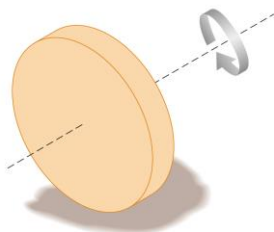
$$\omega = 3,18 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

Αρχή διατήρησης ενέργειας: $mgh = \frac{1}{2} I_{ολ} \cdot \omega^2 + Q \Rightarrow Q = mgh - \frac{1}{2} I_{ολ} \cdot \omega^2$

Αριθμητικός υπολογισμός: $Q = 0,4 \cdot 10 \cdot 2 - \frac{1}{2} 0,556 \cdot 3,18^2 = 5,19 \text{ Joule}$

γ) Για να μπορέσει το σύστημα να κάνει κυκλική κίνηση θα πρέπει η ενέργεια που θα αποκτήσει αμέσως μετά την σύγκρουση με την μάζα m $\left(\frac{1}{2} I_{\text{ολ}} \cdot \omega^2\right)$, να είναι μεγαλύτερη από την δυναμική ενέργεια στην κατακόρυφη θέση με το σημείο A επάνω, $(M(L-x) + m(2L-x))$ πράγμα που ισχύει. Οπότε το σύστημα θα εκτελέσει κυκλική κίνηση.

ΑΣΚΗΣΗ 5.10



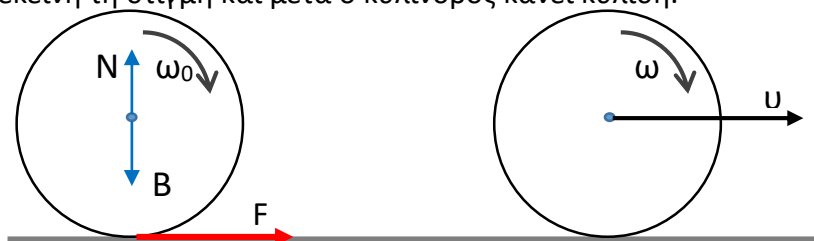
Ένας ομογενής συμπαγής δίσκος ακτίνας R και μάζας m αρχίζει να περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_0 , γύρω από ένα άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Ενώ περιστρέφεται, ο δίσκος έρχεται σε επαφή με οριζόντια επιφάνεια και αφήνεται ελεύθερος. Υποθέστε ότι ο συντελεστής τριβής δίσκου-επιφάνειας είναι μ . α) Ποιο είναι

το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου, όταν αρχίζει η κύλιση χωρίς ολίσθηση; β) Ποιο είναι το χρονικό διάστημα από την στιγμή που ο δίσκος ακουμπά στην επιφάνεια μέχρι την στιγμή που ξεκινά η κύλιση χωρίς ολίσθηση. γ) Βρείτε το κλάσμα της μεταβολής της κινητικής ενέργειας από την στιγμή που ο δίσκος ακουμπά την οριζόντια επιφάνεια μέχρι την στιγμή που αρχίζει η κύλιση χωρίς ολίσθηση. δ) Ποια είναι η απόσταση που διανύει ο δίσκος προτού ξεκινήσει η κύλιση χωρίς ολίσθηση; ε) Τι κίνηση θα κάνει ο κύλινδρος στη συνέχεια; Δίνεται ότι $I = \frac{mR^2}{2}$ (Serway, Jewett

Ασκ. 61, σελ. 463)

Λύση:

α) Το σχήμα δείχνει τις δυνάμεις που επενεργούν στον κύλινδρο μόλις έρθει σε επαφή με το οριζόντιο δάπεδο. Αρχικά ο κύλινδρος περιστρέφεται και ολισθαίνει επάνω στο δάπεδο προς τα δεξιά. Η δύναμη της τριβής έχει δύο αποτελέσματα: επιταχύνει το κέντρο μάζας του κυλίνδρου και μειώνει την γωνιακή ταχύτητα κατά συνέπεια έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά στο σχήμα. Κάποια στιγμή η γωνιακή ταχύτητα έχει μειωθεί αρκετά και ταχύτητα του κέντρου μάζας έχει αυξηθεί επαρκώς έτσι ώστε η ταχύτητα του κέντρου μάζας γίνεται $v = R \cdot \omega$, όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του κυλίνδρου εκείνη τη στιγμή. Προφανώς $\omega < \omega_0$. Από εκείνη τη στιγμή και μετά ο κύλινδρος κάνει κύλιση.



Από τη στιγμή που ο κύλινδρος ακουμπά το δάπεδο μέχρι τη στιγμή που έχει αρχίσει η κύλιση χωρίς ολίσθηση ο κύλινδρος συμμετέχει σε δύο κινήσεις.

1. Μεταφορική: Το κέντρο μάζας επιταχύνεται προς τα δεξιά (σχήμα)
2. Περιστροφική: Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας μειώνεται.

Για την μεταφορική κίνηση:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - B = 0 \Rightarrow N = m \cdot g$$

$$\Sigma F_x = m \cdot a \Rightarrow T = m \cdot a \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \Rightarrow a = \mu \cdot g$$

Το κέντρο μάζας εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα.

$$v = \mu \cdot m \cdot g \cdot t \quad (1) \quad \text{και} \quad x = \frac{1}{2} \mu \cdot g \cdot t^2 \quad (2)$$

Για την περιστροφική κίνηση:

$$T = I \cdot a_\gamma \Rightarrow -F \cdot R = \frac{mR^2}{2} a_\gamma \Rightarrow -\mu \cdot m \cdot g \cdot R = \frac{mR^2}{2} a_\gamma \Rightarrow a_\gamma = -\frac{2\mu \cdot g}{R}$$

Ο κύλινδρος εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη περιστροφική κίνηση με αρχική γωνιακή ταχύτητα οπότε .

$$\omega = \omega_0 - a_\gamma \cdot t \Rightarrow \omega = \omega_0 - \frac{2\mu \cdot g}{R} t \Rightarrow \omega R = \omega_0 R - 2\mu \cdot g \cdot t \quad (3)$$

Οι εξισώσεις (1) και (3) λένε ότι σε χρόνο t το σώμα έχει γραμμική ταχύτητα

$$v = \mu \cdot m \cdot g \cdot t \quad \text{και} \quad \text{γωνιακή ταχύτητα} \quad \omega = \omega_0 - \frac{2\mu \cdot g}{R} t . \quad \text{Για τον λόγο αυτό μπορούμε}$$

να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (3) $\omega R = \omega_0 R - \underbrace{2\mu \cdot g \cdot t}_v$ οπότε $\omega R = \omega_0 R - 2v$.

Στον ίδιο χρόνο t αρχίζει η κύλιση οπότε $v = R \cdot \omega$. Εισάγοντας αυτή την σχέση στην

$$\text{τελευταία ισότητα προκύπτει:} \quad \omega R = \omega_0 R - 2\omega \cdot R \Rightarrow 3\omega \cdot R = \omega_0 R \Rightarrow \omega = \frac{\omega_0}{3}$$

β) Υπολογισμός του χρόνου

$$v = \mu \cdot m \cdot g \cdot t \quad \text{και} \quad v = R \cdot \omega \quad \text{οπότε} \quad \omega \cdot R = \mu \cdot m \cdot g \cdot t$$

$$\text{αλλά} \quad \omega = \frac{\omega_0}{3} \Rightarrow t = \frac{\omega_0 \cdot R}{3\mu \cdot g}$$

γ) Υπολογισμός του κλάσματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

$$K_0 = \frac{1}{2} I \omega_0^2 = \frac{1}{4} m R^2 \cdot \omega_0^2$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{4} m R^2 \cdot \left(\frac{\omega_0}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{\omega_0}{3} R\right)^2 = \frac{1}{12} m R^2 \cdot \omega_0^2$$

$$\Delta K = K - K_0 = -\frac{1}{6} m R^2 \cdot \omega_0^2$$

$$\frac{\Delta K}{K_0} = \frac{-\frac{1}{6} m R^2 \cdot \omega_0^2}{\frac{1}{4} m R^2 \cdot \omega_0^2} = -\frac{2}{3}$$

δ) Υπολογισμός του διαστήματος

Από την εξίσωση (2) $x = \frac{1}{2} \mu \cdot g \cdot t^2$ και $t = \frac{\omega_0 \cdot R}{3\mu \cdot g}$ θα είναι

$$x = \frac{1}{2} \mu \cdot g \cdot \left(\frac{\omega_0 \cdot R}{3\mu \cdot g} \right)^2 = \frac{1}{18} \mu \cdot g \frac{\omega_0^2 \cdot R^2}{\mu^2 \cdot g^2} = \frac{\omega_0^2 \cdot R^2}{18\mu \cdot g}$$

ε) Όταν ο κύλινδρος κυλιέται η τριβή είναι ίση με μηδέν. Η δύναμη τριβής εμφανίζεται όταν υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ δύο επιφανειών ή υπάρχει δύναμη η οποία επιχειρεί να προκαλέσει σχετική κίνηση μεταξύ των δύο επιφανειών αλλά δεν το καταφέρνει. Στην συγκεκριμένη περίπτωση δεν συμβαίνει τίποτα από τα δύο παραπάνω. Επιπλέον, όταν ένα σώμα κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει το σημείο επαφής του κυλίνδρου με την επιφάνεια είναι πάντοτε στιγμιαία ακίνητο ως προς την επιφάνεια. Ο κύλινδρος θα συνεχίσει να κυλιέται χωρίς να σταματήσει. Πράγματι με βάση τον νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση, η ροπή προκαλεί μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας. Όταν η ολική ροπή είναι ίση με μηδέν το σώμα συνεχίζει να κυλιέται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Από την εμπειρία καταλαβαίνουμε ότι κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει. Για ποιο λόγο; Μέχρι τώρα θεωρήσαμε τον κύλινδρο σαν εντελώς μη ελαστικό. Στην πραγματικότητα αυτό δεν συμβαίνει. Η επιφάνεια του κυλίνδρου υπόκειται μία μικρή παραμόρφωση, η οποία είναι αρκετή ώστε η δύναμη από το δάπεδο να μην διέρχεται από το κέντρο μάζας και να προκαλεί μία ροπή που αντιτίθεται στην περιστροφή.

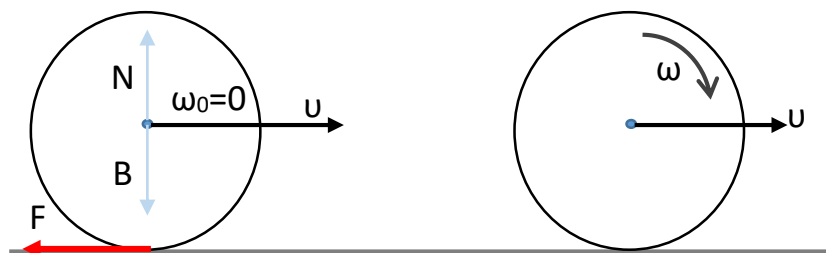
ΑΣΚΗΣΗ 5.11

Μία μπάλα του bowling ακτίνας R και μάζας m ρίχνεται με οριζόντια επιφάνεια με ταχύτητα v_0 χωρίς να περιστρέφεται και αφήνεται ελεύθερη. Υποθέστε ότι ο συντελεστής τριβής μπάλας-επιφάνειας είναι μ α) Ποιο είναι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της μπάλας, όταν αρχίζει η κύλιση χωρίς ολίσθηση; β) Υπολογίστε το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από την στιγμή που έρχεται σε επαφή με το δάπεδο έως ότου αρχίσει η κύλιση χωρίς ολίσθηση. γ) Υπολογίστε την ταχύτητα του κέντρου μάζας κατά την κύλιση. δ) Βρείτε το κλάσμα της μεταβολής της κινητικής ενέργειας από την στιγμή που η μπάλα ακουμπά την οριζόντια επιφάνεια μέχρι την στιγμή που αρχίζει η κύλιση χωρίς ολίσθηση. ε) Ποια είναι η απόσταση που διανύει η μπάλα μέχρι τη στιγμή που ξεκινά η κύλιση χωρίς ολίσθηση; Δίνεται ότι $I = \frac{2mR^2}{5}$

Λύση:

α) Το σχήμα δείχνει τις δυνάμεις που επενεργούν στον κύλινδρο μόλις έρθει σε επαφή με το οριζόντιο δάπεδο. Μόλις η σφαίρα έρχεται σε επαφή με το δάπεδο η δύναμη τριβής την αναγκάζει να περιστρέφεται ενώ συνεχίζει να ολισθαίνει επάνω στο δάπεδο προς τα δεξιά (σχήμα). Η δύναμη της τριβής έχει δύο αποτελέσματα: επιβραδύνει το κέντρο μάζας της σφαίρας και αυξάνει την γωνιακή ταχύτητα, κατά συνέπεια έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά στο σχήμα. Κάποια στιγμή η γωνιακή ταχύτητα έχει αυξηθεί αρκετά και ταχύτητα του κέντρου μάζας έχει μειωθεί έτσι ώστε η ταχύτητα του κέντρου μάζας γίνεται $v = R \cdot \omega$, όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα

περιστροφής του κυλίνδρου εκείνη τη στιγμή. Από εκείνη τη στιγμή και μετά η σφαίρα κάνει κύλιση.



Από τη στιγμή που η σφαίρα ακουμπά το δάπεδο μέχρι τη στιγμή που έχει αρχίσει η κύλιση χωρίς ολίσθηση συμμετέχει σε δύο κινήσεις.

1. Μεταφορική: Το κέντρο μάζας επιβραδύνεται (σχήμα)
2. Περιστροφική: Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής αυξάνεται.

Για την μεταφορική κίνηση:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - B = 0 \Rightarrow N = m \cdot g$$

$$\Sigma F_x = m \cdot a \Rightarrow T = m \cdot a \Rightarrow -\mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \Rightarrow a = -\mu \cdot g$$

Το κέντρο μάζας εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα v_0 .

$$v = v_0 - \mu \cdot m \cdot g \cdot t \quad (1) \quad \text{και} \quad x = v_0 t - \frac{1}{2} \mu \cdot g \cdot t^2 \quad (2)$$

Για την περιστροφική κίνηση:

$$T = I \cdot a_\gamma \Rightarrow F \cdot R = \frac{2mR^2}{5} a_\gamma \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g \cdot R = \frac{2mR^2}{5} a_\gamma \Rightarrow a_\gamma = \frac{5\mu \cdot g}{2R}$$

Ο σφαίρα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση χωρίς αρχική γωνιακή ταχύτητα οπότε .

$$\omega = a_\gamma \cdot t \Rightarrow \omega = \frac{5\mu \cdot g}{2R} t \quad (3)$$

Οι εξισώσεις (1) και (3) λένε ότι σε χρόνο t το σώμα έχει γραμμική ταχύτητα $v = v_0 - \mu \cdot m \cdot g \cdot t$ και γωνιακή ταχύτητα $\omega = \frac{5\mu \cdot g}{2R} t$. Για τον λόγο αυτό μπορούμε

να λύσουμε την εξίσωση (1) ως προς το χρόνο και να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (3) $\omega = \frac{5\mu \cdot g \cdot t}{2R} \frac{v - v_0}{\mu \cdot g}$ οπότε $\omega = \frac{5(v_0 - v)}{2R} \Rightarrow 2R\omega = 5v_0 - 5v$. Στον ίδιο χρόνο t

αρχίζει η κύλιση οπότε $v = R \cdot \omega$. Εισάγοντας αυτή την σχέση στην τελευταία ισότητα προκύπτει: $2\omega \cdot R + 5\omega \cdot R = 5v_0 \Rightarrow \omega = \frac{5v_0}{7R}$

β) Υπολογισμός του χρόνου

Από την (3) $\omega = \frac{5\mu \cdot g}{2R} t$ και $\omega = \frac{5v_0}{7R}$ οπότε

$$t = \frac{2 \cdot v_0}{7\mu \cdot g}$$

γ) Υπολογισμός της ταχύτητας του κέντρου μάζας κατά την κύλιση.

$$\text{Σύμφωνα με την εξίσωση (1)} \quad v = v_0 - \mu \cdot m \cdot g \cdot t \Rightarrow v = v_0 - \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{2 \cdot v_0}{7\mu \cdot g} \Rightarrow v = \frac{5v_0}{7}$$

δ) Υπολογισμός του κλάσματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

$$K_0 = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{2 \cdot m R^2}{5} \cdot \left(\frac{5v_0}{7R} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{5v_0}{7} \right)^2 = \frac{5}{14} m \cdot v_0^2$$

$$\Delta K = K - K_0 = -\frac{1}{7} m \cdot v_0^2$$

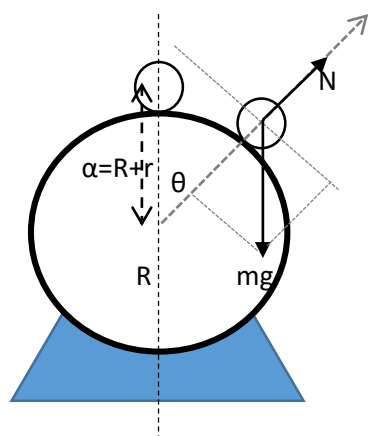
$$\frac{\Delta K}{K_0} = \frac{-\frac{1}{7} m \cdot v_0^2}{\frac{1}{2} m \cdot v_0^2} = -\frac{2}{7}$$

δ) Υπολογισμός του διαστήματος

Από την εξίσωση (2) $x = v_0 t - \frac{1}{2} \mu \cdot g \cdot t^2$ και την $t = \frac{2 \cdot v_0}{7\mu \cdot g}$ θα είναι

$$x = v_0 \frac{2 \cdot v_0}{7\mu \cdot g} - \frac{1}{2} \mu \cdot g \cdot \left(\frac{2 \cdot v_0}{7\mu \cdot g} \right)^2 = \frac{12 \cdot v_0^2}{49\mu \cdot g}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.12



Ένας μικρός κύλινδρος ακτίνας r και μάζας m ισορροπεί επάνω σε ένα μεγαλύτερο κύλινδρο ακτίνας R . Ο μικρός κύλινδρος εκτρέπεται από την κατακόρυφη θέση και αφήνεται να κυλήσει χωρίς ολίσθηση επάνω στον μεγάλο κύλινδρο, ενώ οι άξονές τους παραμένουν παράλληλοι. Ναδειχθεί ότι ο μικρός κύλινδρος σταματά να εφάπτεται στον μεγαλύτερο όταν η ευθεία που ενώνει τα κέντρα τους σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο τέτοια ώστε $\cos \theta = \frac{4}{7}$.

Λύση:

Εφόσον ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει δεν υπάρχει απορρόφηση ενέργειας από την τριβή ολίσθησης. Η δυναμική ενέργεια του κυλίνδρου στην αρχική θέση θα ισούται με την μηχανική ενέργεια στο σημείο που παύει να εφάπτεται με τον μεγάλο κύλινδρο, όπως φαίνεται στο σχήμα.

$$mga = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + mga \cdot \cos \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mga(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Επειδή ο κύλινδρος κυλίεται θα είναι $v = \omega \cdot r \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}$ οπότε η εξίσωση της ενέργειας θα

γίνει: $2mga(1 - \cos\theta) = mv^2 + I\left(\frac{v}{r}\right)^2$. Επιπλέον $I = \frac{mr^2}{2}$, συνεπώς

$$2mga(1 - \cos\theta) = mv^2 + \frac{m}{2}v^2 \text{ ή } 4mga(1 - \cos\theta) = 3mv^2 \quad (1)$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στον μικρό κύλινδρο κατά την ακτινική διεύθυνση ισούται με την κεντρομόλο δύναμη.

$$mg \cos\theta - N = \frac{mv^2}{a}, \text{ την στιγμή που οι κύλινδροι παύουν να εφάπτονται η δύναμη}$$

επαφής $N = 0$, οπότε $mga \cos\theta = mv^2 \quad (2)$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

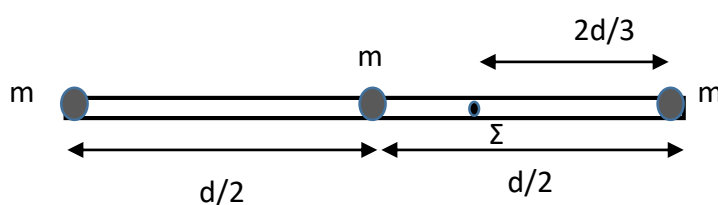
$$4mga(1 - \cos\theta) = 3mga \cos\theta \Rightarrow 7mga \cos\theta = 4mga$$

$$\cos\theta = \frac{4}{7}$$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ Α.5.1

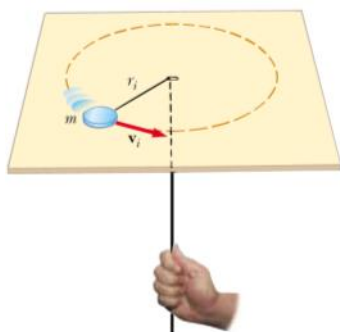
Η μάζα της ράβδου στο παρακάτω σύστημα είναι αμελητέα. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα στο κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνάει από το σημείο Σ. Αν τα m και d είναι γνωστά να βρείτε: α) Την ροπή αδράνειας ως προς το Σ. β) Την ροπή που ασκείται στο σύστημα τη χρονική στιγμή $t = 0$. γ) Την γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος την χρονική στιγμή $t = 0$. δ) Την γραμμική επιτάχυνση της μάζας m στα δεξιά την χρονική στιγμή $t = 0$. ε) Την μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος. στ) Την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα που αποκτά η



ράβδος. ζ) Την μέγιστη στροφορμή του συστήματος η) Την μέγιστη ταχύτητα που αποκτά το σώμα που βρίσκεται στη μέση.

(Serway, Jewett Ασκ. 49, σελ. 460)

ΑΣΚΗΣΗ Α.5.2

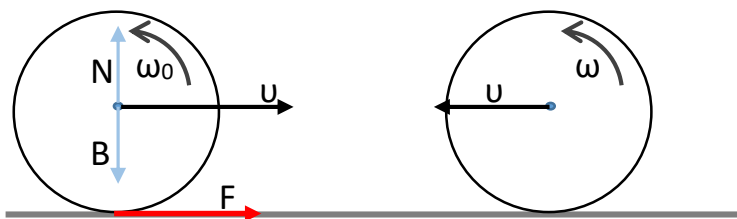


Ένας μικρός πλαστικός δίσκος μάζας m είναι δεμένος σε τεντωμένο σκοινί, το οποίο περνάει μέσα από την μικρή οπή μιας οριζόντιας επιφάνειας και μπορεί να κινείται μέσα από την οπή, χωρίς τριβές. Αρχικά ο δίσκος κινείται σε κύκλο ακτίνας r_1 με ταχύτητα v_1 . Στη συνέχεια τραβάτε το σκοινί προς τα κάτω και η ακτίνα του κύκλου μειώνεται και γίνεται r_2 . α) Υπολογίστε το μέτρο της ταχύτητας όταν η ακτίνα είναι r_2 . β) Βρείτε την τάση του νήματος συναρτήσει της ακτίνας της τροχιάς. γ) Πόσο

έργο παράγετε καθώς τραβάτε το σκοινί μεταβάλλοντας την ακτίνα από r_1 σε r_2 ; (Serway, Jewett Ασκ. 53, σελ. 461)

ΑΣΚΗΣΗ Α.5.3

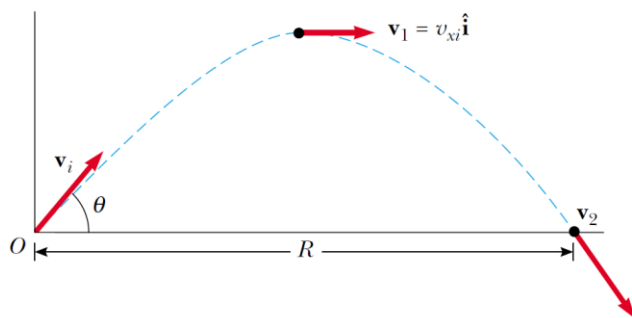
Ένας ομογενής συμπαγής δίσκος ακτίνας R και μάζας m περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_0 αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού, γύρω από ένα άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Ενώ περιστρέφεται, ο δίσκος ρίχνεται σε οριζόντια επιφάνεια με ταχύτητα v_0 προς τα δεξιά και αφήνεται ελεύθερος. Υποθέστε ότι ο συντελεστής τριβής δίσκου-επιφάνειας είναι μ . α) Ποιο είναι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου, όταν αρχίζει η κύλιση χωρίς ολίσθηση; β) Υπολογίστε το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από την στιγμή που έρχεται σε επαφή με το δάπεδο έως ότου αρχίσει η κύλιση χωρίς ολίσθηση. γ) Βρείτε το κλάσμα της μεταβολής της κινητικής ενέργειας από την στιγμή που ο δίσκος ακουμπά την οριζόντια επιφάνεια μέχρι την στιγμή που αρχίζει η κύλιση χωρίς ολίσθηση. δ) Ποια είναι η απόσταση που διανύει ο δίσκος προτού ξεκινήσει η κύλιση χωρίς ολίσθηση;



Υπόδειξη: Μπορείτε να ακολουθήσετε μια διαφορετική λύση. Υπολογίστε την στροφορμή ως προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο κίνησης και διέρχεται από ένα σημείο της ευθύγραμμης τροχιάς. Θα μπορούσε να είναι ο άξονας που περνάει από το σημείο επαφής. Αποδείξτε ότι η στροφορμή διατηρείται.

ΑΣΚΗΣΗ Α.5.4

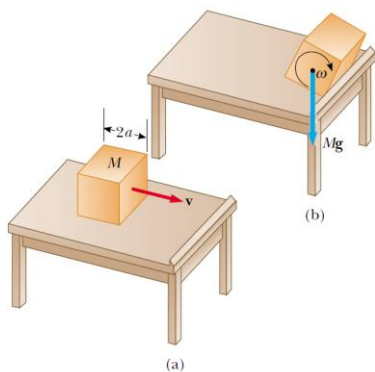
Ένα βλήμα μάζας m εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα v_0 η οποία σχηματίζει γωνία ϕ με την οριζόντιο. Το βλήμα κινείται στο βαρυτικό Πεδίο της γης. Βρείτε τη στροφορμή του βλήματος ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων



α) όταν το βλήμα βρίσκεται στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων β) όταν βρίσκεται στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς του και γ) λίγο πριν φτάσει στο έδαφος. Ποια ροπή προκαλεί μεταβολή της στροφορμής του; (Serway, Jewett

Ασκ. 19, σελ. 456)

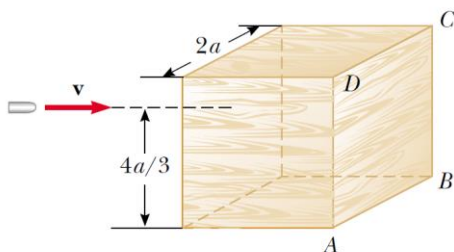
ΑΣΚΗΣΗ Α.5.5



Ένας συμπαγής κύβος με πλευρά $2a$ και μάζα M ολισθαίνει με ταχύτητα v_0 σε επιφάνεια χωρίς τριβές. Ο κύβος προσκρούει σε ένα μικρό εμπόδιο που βρίσκεται στην άκρη του τραπεζιού και παίρνει κλίση. Υπολογίστε την ελάχιστη τιμή της ταχύτητας v_0 που απαιτείται για να ανατραπεί ο κύβος και να πέσει απ' το τραπέζι. Η ροπή αδράνειας του κύβου ως προς μία από τις ακμές του είναι $\frac{8Ma^2}{3}$. (Serway,

Jewett Ασκ. 63, σελ. 463)

ΑΣΚΗΣΗ Α.5.6



Ένας ξύλινος συμπαγής κύβος με πλευρά $2a$ και μάζα M είναι ακίνητος σε μία οριζόντια επιφάνεια. Η μόνη κίνηση που μπορεί να πραγματοποιήσει ο κύβος είναι γύρω από τον σταθερό άξονα AB . Μία σφαίρα με μάζα m και ταχύτητα v_0 βάλετε προς την έδρα που βρίσκεται απέναντι από την έδρα $AB\Gamma\Delta$ σε ύψος

$\frac{4a}{3}$. Η σφαίρα σφηνώνεται στον κύβο. Βρείτε την ελάχιστη τιμή της ταχύτητας v_0 που απαιτείται για να ανατραπεί ο κύβος και να προσγειωθεί στην έδρα $AB\Gamma\Delta$. Υποθέστε ότι $m \ll M$. (Serway, Jewett Ασκ. 62, σελ. 463)

ΑΣΚΗΣΗ Α.5.7

Σώμα μάζας m κινείται σε τροχιά που δίνεται από τις σχέσεις: όπου t ο χρόνος και ω , a σταθερές. $x = 3a \sin \omega t$, $y = 4a \sin \omega t$ και $z = 5a \cos \omega t$ ☐

α) Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκείται στο σώμα

γ) Να υπολογιστεί η στροφορμή του σώματος ως προς την αρχή των αξόνων και να αποδειχθεί εάν μένει σταθερή.