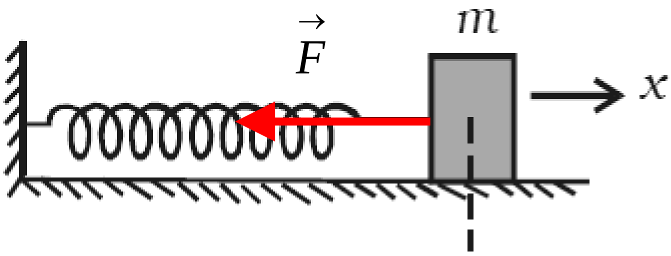
ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ 6.1

Σώμα μάζας $m = 1kgr$ έχει προσδεθεί στην άκρη ενός ελατηρίου και ταλαντώνεται επάνω σε οριζόντιο δάπεδο χωρίς τριβή. Εάν η σταθερά του ελατηρίου είναι $k = 25Nt/m$ και το πλάτος της κίνησης $A = 5cm$ να βρεθούν α) η ολική ενέργεια του συστήματος, β) η κινητική και η δυναμική ενέργεια όταν το σώμα απέχει από την θέση ισορροπίας $x = 4cm$. γ) Να υπολογιστεί η μέγιστη ταχύτητα $\upsilon_{\max}$ και μέγιστη επιτάχυνση $a_{\max}$. δ) Όταν το σώμα περνάει από τη θέση ισορροπίας προσκολλάται επάνω του μικρό σώμα μάζας $\mu = 10gr$. Να υπολογιστεί το νέο πλάτος της αρμονικής ταλάντωσης.

Λύση:



α) Η μοναδική δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα είναι η δύναμη από το ελατήριο, η οποία είναι μία δύναμη επαναφοράς. Με βάση την εξίσωση του Νεύτωνα:

$\Sigma F = m \cdot a$ ή $-k \cdot x = m \cdot a$

οπότε $mx'' + kx = 0$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με τη μάζα του σώματος προκύπτει: $x'' + \frac{k}{m} x = 0$

Εισάγουμε την αντικατάσταση: $\frac{k}{m} = \omega_0{}^2$ οπότε η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$x'' + \omega_0{}^2 \cdot x = 0$$

Η αντικατάσταση $\frac{k}{m} = \omega_0{}^2$ δεν είναι μόνο ένας νέος βολικός συμβολισμός για το πηλίκο $\frac{k}{m}$ που εμφανίζεται στη διαφορική εξίσωση αλλά έχει φυσικό νόημα: το ω_0 παριστάνει την κυκλική συχνότητα. Πώς αιτιολογείται ένας τέτοιος ισχυρισμός; Η απάντηση δίνεται με την βοήθεια της διαστατικής ανάλυσης. Η δύναμη σχετίζεται με την απομάκρυνση μέσω της εξίσωσης: $F = kx \Rightarrow k = \frac{F}{x}$. Οι διαστάσεις της σταθεράς του ελατηρίου είναι: $[k] = \frac{[F]}{[x]}$ $\left\{ \begin{array}{c} [k] = \frac{[F]}{[x]} \\ [F] = M \cdot [a] = M \cdot \frac{L}{T^2} \end{array} \right\}$

Κατά συνέπεια οι διαστάσεις του πηλίκου $\frac{k}{m}$ είναι: $\left[\frac{k}{m}\right] = \frac{L \cdot M}{M \cdot T^2 \cdot L} = \frac{1}{T^2}$

Από την άλλη πλευρά οι διαστάσεις της κυκλικής συχνότητας είναι: $\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \Rightarrow [\omega] = \frac{1}{T}$ γιατί η γωνία είναι αδιάστατο μέγεθος. Προκύπτει λοιπόν ότι το ω_0 και το $\sqrt{\frac{k}{m}}$ έχουν τις ίδιες διαστάσεις και αυτό δικαιολογεί τον ισχυρισμό ότι το ω_0 περιγράφει την κυκλική συχνότητα της αρμονικής ταλάντωσης.

$$x'' + \omega_0{}^2 x = 0$$

Η διαφορική εξίσωση που προέκυψε είναι μία ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση γιατί το δεύτερο μέλος είναι ίσο με το μηδέν. Για τις ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις η συνάρτηση-λύση είναι της μορφής: $x(t) \sim e^{\lambda t}$. Δηλαδή η συνάρτηση $x(t)$ είναι ανάλογη του $e^{\lambda t}$. Αυτό θα μπορούσαμε να το γράψουμε σαν $x(t) = ce^{\lambda t}$. Για να μην εισάγουμε άλλη μια σταθερά, η οποία στο τέλος θα απαλειφθεί, προτιμάμε να το γράψουμε σαν $x(t) \sim e^{\lambda t}$. Παραγωγίζοντας προκύπτει ότι:

$$x'(t) \sim \lambda e^{\lambda t} \quad \text{και} \quad x''(t) \sim \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στη διαφορική εξίσωση αυτή γίνεται:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0{}^2 e^{\lambda t} = 0 \text{ ή } \lambda^2 + \omega_0{}^2 = 0$$

Η εξίσωση $\lambda^2 + \omega_0{}^2 = 0$ ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση της γραμμικής διαφορικής και οι ρίζες της είναι:

$$\lambda^2 + (i\omega_0)^2 = 0 \quad \text{δηλαδή:} \quad \lambda = \pm i\omega_0$$

Κατά συνέπεια προκύπτουν δύο ανεξάρτητες λύσεις για τη διαφορική εξίσωση οι οποίες είναι: $x_1(t) = \alpha e^{i\omega_0 t}$ και $x_2(t) = \beta e^{-i\omega_0 t}$

Όταν μία διαφορική εξίσωση έχει δύο ανεξάρτητες λύσεις τότε η συνολική λύση της θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των ανεξάρτητων λύσεων. Κατά συνέπεια η συνάρτηση-λύση της διαφορικής εξίσωσης θα είναι:

$x(t)=\alpha e^{i\omega_0 t}+\beta e^{-i\omega_0 t}$. Στην έκφραση αυτή αντικαθιστούμε τα φανταστικά εκθετικά με: $e^{i\omega_0 t}=\cos\omega_0 t+i\sin\omega_0 t$ και $e^{-i\omega_0 t}=\cos\omega_0 t-i\sin\omega_0 t$ και προκύπτει:

$x(t)=\alpha e^{i\omega_0 t}+\beta e^{-i\omega_0 t}=\alpha\cos\omega_0 t+i\alpha\sin\omega_0 t+\beta\cos\omega_0 t-i\beta\sin\omega_0 t$ ή

$$x(t)=\alpha e^{i\omega_0 t}+\beta e^{i\omega_0 t}=\underbrace{(\alpha+\beta)}_{B}\cos\omega_0 t+\underbrace{i(\alpha-\beta)}_{C}\sin\omega_0 t$$

δηλαδή: $x(t)=B\cos\omega_0 t+C\sin\omega_0 t$

Ένα άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων, όπως αυτό της ισότητας $x(t)=B\cos\omega_0 t+C\sin\omega_0 t$, γράφεται με πιο συμπαγή μορφή σαν:

$x(t)=A\cdot\cos(\omega_0 t+\phi)$, όπου ϕ είναι η φάση.

Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο προκύπτει η εξίσωση της ταχύτητας.

$$\upsilon(t)=\frac{dx(t)}{dt}=-A\cdot\omega_0\cdot\sin(\omega_0 t+\phi)$$

Η κινητική ενέργεια είναι:

$$K=\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}mA^2\omega_0{}^2\cdot\sin^2(\omega_0 t+\phi)$$

$$K=\frac{1}{2}mA^2\omega_0{}^2\cdot\left[1-\cos^2(\omega_0 t+\phi)\right]$$

$$K=\frac{1}{2}m\omega_0{}^2\cdot\left(A^2-\underbrace{A^2\cos^2(\omega_0 t+\phi)}_{x^2}\right)$$

$$K=\frac{1}{2}m\omega_0{}^2\cdot\left(A^2-x^2\right)$$

Υπολογισμός της Δυναμικής ενέργειας:

$$F=-\frac{dV}{dx}\Rightarrow dV=-F\cdot dx\Rightarrow dV=-(-kx)\cdot dx$$

$\int_0^V dV=\int_0^x kx\cdot dx$, όπου έχουμε δεχθεί ότι η δυναμική ενέργεια είναι 0 όταν η θέση του σώματος είναι $x=0$.

$V=\frac{1}{2}k\cdot x^2$. Η ολική ενέργεια είναι: $E_{o\lambda}=K+V=\frac{1}{2}m\omega_0{}^2\cdot\left(A^2-x^2\right)+\frac{1}{2}m\omega_0{}^2\cdot x^2$

ή $E_{o\lambda}=K+V=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$

β) Υπολογισμός της κινητικής ενέργειας όταν $x = 4cm$:

$$K = \frac{1}{2} m\omega_0{}^2 \cdot \left(A^2 - x^2\right), \quad A = 5cm$$

$$K = \frac{1}{2} 1 \frac{25}{1} \cdot \left(0{,}05^2 - 0{,}04^2\right) = \frac{25 \cdot 0{,}09}{2} = 1{,}125 Joule$$

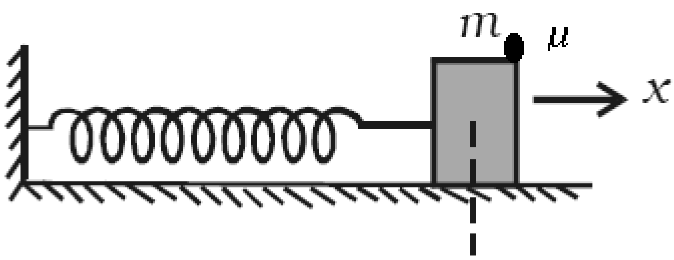
γ) Από την εξίσωση $\upsilon(t) = -A \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \phi)$ προκύπτει ότι η μέγιστη ταχύτητα είναι: $\upsilon_{\max} = A \cdot \omega_0 = 0{,}05 \cdot \sqrt{\frac{25}{1}} = 0{,}25 m/\sec$.

Η συνάρτηση της επιτάχυνσης προσδιορίζεται παραγωγίζοντας την ταχύτητα ως προς το χρόνο.

$a(t) = \frac{d\upsilon(t)}{dt} = -A \cdot \omega_0{}^2 \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)$ οπότε

$$a_{\max} = A \cdot \omega_0{}^2 = 0{,}05 \cdot \frac{25}{1} = 1{,}25 m/\sec^2$$

δ)



Η διαφορική εξίσωση της κίνησης μετά την ενσωμάτωση της μικρής μάζας είναι:

$x'' + \frac{k}{m+\mu} x = 0$ και η νέα κυκλική συχνότητα είναι: $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m+\mu}}$

Η κίνηση γίνεται επάνω σε ένα άξονα και η αρχή διατήρησης της ορμής, τη στιγμή που το σώμα περνάει από τη θέση ισορροπίας, δίνει:

$(m+\mu) \cdot A' \cdot \sqrt{\frac{k}{m+\mu}} = m \cdot A \cdot \omega_0$, λύνοντας ως προς το νέο πλάτος της Α.Τ.:

$A' = \frac{mA}{m+\mu} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{\frac{m+\mu}{k}}$ και $A' = A \cdot \sqrt{\frac{m}{m+\mu}}$

ΑΣΚΗΣΗ 6.2

Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η θέση του δίνεται από τη σχέση: $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)$. Να αποδειχτεί ότι η ισότητα αυτή μπορεί να γραφτεί με τη μορφή: $x(t) = B\cos\omega_0 t + C\sin\omega_0 t$ και να υπολογιστούν οι σταθερές B και C συναρτήσει των A και ϕ . Να αποδειχθεί το αντίστροφο.

Λύση:

Κάνοντας χρήση της ταυτότητας $\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cdot\cos\phi - \sin\theta\cdot\sin\phi$ αντικαθίσταται η ποσότητα $\cos(\omega_0 t+\phi)$ στην εξίσωση της θέσης του σώματος: $x(t) = A\cdot\cos(\omega_0 t+\phi) \Rightarrow x(t) = A(\cos\omega_0 t\cdot\cos\phi - \sin\omega_0 t\cdot\sin\phi)$

$$x(t) = \underbrace{A\cdot\cos\phi}_{B}\cdot\cos\omega_0 t \underbrace{- A\cdot\sin\phi}_{C}\cdot\sin\omega_0 t = B\cdot\cos\omega_0 t + C\cdot\sin\omega_0 t$$

όπου $B = A\cdot\cos\phi$ και $C = -A\cdot\sin\phi$

Αντίστροφα:

Δίνεται ότι $x(t) = B\cos\omega_0 t + C\sin\omega_0 t$ και θα αποδειχθεί ότι: $x(t) = A\cdot\cos(\omega_0 t+\phi)$

$$x(t) = B\left(\cos\omega_0 t + \frac{C}{B}\sin\omega_0 t\right) \quad \text{θέτοντας } \tan\phi = -\frac{C}{B}$$

$$x(t) = B(\cos\omega_0 t - \tan\phi\cdot\sin\omega_0 t)$$

$$x(t) = B\left(\frac{\cos\phi\cdot\cos\omega_0 t - \sin\phi\cdot\sin\omega_0 t}{\cos\phi}\right) = \overbrace{\frac{B}{\cos\phi}}^{A}(\cos\phi\cdot\cos\omega_0 t - \sin\phi\cdot\sin\omega_0 t)$$

$x(t) = A\cdot(\cos\phi\cdot\cos\omega_0 t - \sin\phi\cdot\sin\omega_0 t)$ ή

$x(t) = A\cdot\cos(\omega_0 t+\phi)$, όπου $A = \dfrac{B}{\cos\phi}$ (ε1)

Αυτό που μένει είναι να υπολογιστεί το πλάτος A συναρτήσει των B και C.

$$\left.\begin{array}{r} A = \dfrac{B}{\cos\phi} \Rightarrow \cos\phi = \dfrac{B}{A} \\ \tan\phi = -\dfrac{C}{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \tan\phi\cdot\cos\phi = \frac{B}{A}\cdot\frac{-C}{B} \Rightarrow \sin\phi = -\frac{C}{A} \text{ ή } C = -A\cdot\sin\phi \ (\varepsilon_2)$$

Υψώνουμε τις εξισώσεις (ε1) και (ε2) στο τετράγωνο και προσθέτουμε κατά μέλη:

$$\left.\begin{array}{r} C = -A\cdot\sin\phi \\ B = A\cdot\cos\phi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} C^2 = A^2\cdot\sin^2\phi \\ B^2 = A^2\cdot\cos^2\phi \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} C^2 + B^2 = A^2\left(\underbrace{\sin^2\phi + \cos^2\phi}_{1}\right) \text{ οπότε}$$

$$A = \sqrt{B^2 + C^2}$$

Τελικά $x(t) = \sqrt{B^2 + C^2}\cdot\cos(\omega_0 t+\phi)$ και $\tan\phi = -\dfrac{C}{B}$.

ΑΣΚΗΣΗ 6.3

Ένα σώμα μάζας m έχει προσαρτηθεί στην άκρη ενός ελατηρίου σταθεράς k. Να γράψετε τη διαφορική εξίσωση που διέπει την κίνηση του σώματος. Να αποδειχθεί ότι η θέση του σώματος δίνεται από μια εξίσωση της μορφής: $x(t)=(\alpha+\beta)\cos\omega_0 t+i(\alpha-\beta)\sin\omega_0 t$, όπου ω_0 είναι η κυκλική συχνότητα και α,β σταθερές. Τι πληροφορίες δίνει η λύση της διαφορικής εξίσωσης;

Στη βιβλιογραφία αναφέρεται ότι η εξίσωση της κίνησης μπορεί να γραφτεί με τη μορφή: $x(t)=A\cdot\cos(\omega_0 t+\phi)$. Δίνονται οι ακόλουθες αρχικές συνθήκες: Την χρονική στιγμή $t=0$ η απομάκρυνση είναι $x(0)=0$ και η ταχύτητα $\upsilon(0)=\upsilon_0$. Εφαρμόστε τις αρχικές συνθήκες στις εξισώσεις $x(t)=A\cdot\cos(\omega_0 t+\phi)$ και $x(t)=(\alpha+\beta)\cos\omega_0 t+i(\alpha-\beta)\sin\omega_0 t$. Αποδείξτε ότι και στις δύο περιπτώσεις προκύπτει η ίδια εξίσωση κίνησης. Αριθμητική εφαρμογή: $m=100gr$, $k=0,625Nt/cm$, $\upsilon_0=5m/\sec$

Λύση:

Η μοναδική δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι η δύναμη από το ελατήριο. Η εξίσωση $\Sigma F=m\cdot a$ γίνεται:

$mx''+kx=0$, διαιρώντας και τα δύο μέλη με την μάζα προκύπτει: $x''+\dfrac{k}{m}x=0$

Το πηλίκο $\dfrac{k}{m}$ έχει διαστάσεις $\dfrac{1}{T^2}$ γιατί

$$\left\{\begin{array}{c}[k]=\dfrac{[F]}{[x]}\\ [F]=M\cdot[a]=M\cdot\dfrac{L}{T^2}\end{array}\right\}\text{ οπότε }\quad\left[\frac{k}{m}\right]=\frac{M\cdot L}{T^2\cdot L\cdot M}=\frac{1}{T^2}$$

Κατά συνέπεια το $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ έχει διαστάσεις ίδιες με αυτές της γωνιακής συχνότητας.

$\omega=\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t}\Rightarrow[\omega]=\dfrac{1}{T}$. Με βάση τα παραπάνω θέτουμε $\dfrac{k}{m}={\omega_0}^2$. Η διαφορική εξίσωση γίνεται: $x''+{\omega_0}^2x=0$

Οι γραμμικές ομογενείς διαφορικές εξισώσεις έχουν λύσεις της μορφής: $x(t)\sim e^{\lambda t}$ Με παραγώγιση προκύπτει: $x'(t)\sim\lambda e^{\lambda t}$ και $x''(t)\sim\lambda^2e^{\lambda t}$ και αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση $\lambda^2e^{\lambda t}+{\omega_0}^2e^{\lambda t}=0$ οπότε $\lambda^2+{\omega_0}^2=0$ ή $\lambda^2+(i\omega_0)^2=0$ ή $\lambda=\pm i\omega_0$

Εισάγοντας τις τιμές του λ στην συνάρτηση $x(t) \sim e^{\lambda t}$ προκύπτουν δύο συναρτήσεις-λύσεις της διαφορικής εξίσωσης: $x_1(t) \sim e^{i\omega_0 t}$ και $x_2(t) \sim e^{-i\omega_0 t}$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη οπότε η συνάρτηση-λύση της διαφορικής εξίσωσης θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός τους $x(t) = \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}$

Αξιοποιώντας την εξίσωση του Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ οι όροι $e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}$ γίνονται:

$e^{i\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + i\sin\omega_0 t$ και $e^{-i\omega_0 t} = \cos\omega_0 t - i\sin\omega_0 t$

$$\left.\begin{aligned} \alpha e^{i\omega_0 t} &= \alpha\cos\omega_0 t + i\alpha\sin\omega_0 t \\ \beta e^{-i\omega_0 t} &= \beta\cos\omega_0 t - i\beta\sin\omega_0 t \end{aligned}\right\} \Rightarrow x(t) = \alpha e^{i\omega_0 t} + \beta e^{-i\omega_0 t} = (\alpha+\beta)\cos\omega_0 t + i(\alpha-\beta)\sin\omega_0 t$$

Η συνάρτηση-λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι: $x(t) = (\alpha+\beta)\cos\omega_0 t + i(\alpha-\beta)\sin\omega_0 t$ (1) η οποία μπορεί να γραφεί με την μορφή

$x(t) = A\cdot\cos(\omega_0 t + \phi)$ (2) , όπου $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης πληροφορεί ότι η κίνηση είναι αρμονική. Από την διαφορική εξίσωση προσδιορίστηκε η κυκλική συχνότητα της αρμονικής ταλάντωσης ω_0. Όμως από την διαφορική εξίσωση δεν μπορεί να προσδιοριστεί το πλάτος της ταλάντωσης ούτε η φάση ϕ. Αυτά βρίσκονται εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες στις λύσεις (1) και (2).

Οι αρχικές συνθήκες λένε ότι την χρονική στιγμή $t = 0$ που αρχίσαμε να παρατηρούμε το σώμα αυτό βρισκόταν στη θέση ισορροπίας $x(0) = 0$ και είχε ταχύτητα $\upsilon(0) = \upsilon_0$.

Εισάγοντας την συνθήκη $x(0) = 0$ στην εξίσωση (1) προκύπτει:

$x(0) = (\alpha+\beta)\underbrace{\cos\omega_0 0}_{1} + i(\alpha-\beta)\underbrace{\sin\omega_0 0}_{0} \Rightarrow \alpha+\beta = 0$ ή $\beta = -\alpha$ (α)

Οπότε η (1) γίνεται: $x(t) = \underbrace{(\alpha+\beta)}_{0}\cos\omega_0 t + i\underbrace{(\alpha-\beta)}_{\alpha-(-\alpha)}\sin\omega_0 t = i2\alpha\sin\omega_0 t$

$x(t) = i2\alpha\sin\omega_0 t$ (1)'

Παραγωγίζοντας την (1) προκύπτει η συνάρτηση της ταχύτητας $\upsilon(t) = x'(t) = -\left(\underbrace{\alpha+\beta}_{0}\right)\omega_0\sin\omega_0 t + i\left(\underbrace{\alpha-\beta}_{a-(-a)}\right)\omega_0\cos\omega_0 t$, οπότε

$\upsilon(t) = x'(t) = i2\alpha\omega_0\cos\omega_0 t$, αλλά δίνεται ότι $\upsilon(0) = \upsilon_0$

οπότε $\upsilon_0 = x'(0) = i2\alpha\omega_0\underbrace{\cos\omega_0 0}_{1} = i2\alpha\omega_0$ και λύνοντας ως προς α

$\upsilon_0 = i2\alpha\omega_0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\upsilon_0}{i2\omega_0}$, εισάγοντας την τιμή που προσδιορίστηκε στην εξίσωση (1)’ προκύπτει ότι η εξίσωση της θέσης του σώματος είναι: $x(t) = i2\dfrac{\upsilon_0}{i2\omega_0}\sin\omega_0 t = \dfrac{\upsilon_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$

Η $x(t) = \dfrac{\upsilon_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$ είναι η μορφή που πήρε η εξίσωση (1), δηλαδή η λύση της διαφορικής εξίσωσης, αφού εισήγαμε τις αρχικές συνθήκες.

Τώρα θα εισάγουμε τις αρχικές συνθήκες $x(0) = 0$ και $\upsilon(0) = \upsilon_0$ στην $x(t) = A\cdot\cos(\omega_0 t + \phi)$ (2)

$x(0) = A\cdot\cos(\omega_0 0 + \phi) = A\cdot\cos\phi$ αλλά $x(0) = 0$, οπότε

$A\cdot\cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = \pm\dfrac{\pi}{2}$,

Ποια είναι η σωστή φάση, η $\phi = \dfrac{\pi}{2}$ ή $\phi = -\dfrac{\pi}{2}$;

Για $\phi = \dfrac{\pi}{2}$ η εξίσωση $x(t) = A\cdot\cos(\omega_0 t + \phi)$ της θέσης του σώματος γίνεται:

$x(t) = A\cdot\cos\left(\omega_0 t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ οπότε $\upsilon(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = -A\cdot\omega_0\cdot\sin\left(\omega_0 t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ η οποία για $t = 0$ γίνεται: $\upsilon(0) = -A\cdot\omega_0\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -A\cdot\omega_0 < 0$ που δεν είναι σωστό γιατί από το πρόβλημα $\upsilon(0) = \upsilon_0 > 0$

Για $\phi = -\dfrac{\pi}{2}$ η εξίσωση $x(t) = A\cdot\cos(\omega_0 t + \phi)$ της θέσης του σώματος γίνεται:

$x(t) = A\cdot\cos\left(\omega_0 t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ οπότε $\upsilon(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = -A\cdot\omega_0\cdot\sin\left(\omega_0 t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ η οποία για $t = 0$ γίνεται: $\upsilon(0) = -A\cdot\omega_0\cdot\underbrace{\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)}_{-1} = A\cdot\omega_0 > 0$ η οποί συμφωνεί με την σχέση $\upsilon(0) = \upsilon_0 > 0$

Κατά συνέπεια η (2) θα πάρει τη μορφή $x(t) = A\cdot\cos\left(\omega_0 t - \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow x(t) = A\cdot\sin(\omega_0 t)$ (2)’

Παραγωγίζοντας την (2)’ προκύπτει η εξίσωση της ταχύτητας:

$\upsilon(t) = x'(t) = A\cdot\omega_0\cdot\cos(\omega_0 t)$ αλλά $\upsilon(0)=\upsilon_0$, οπότε

$$\upsilon_0 = A\cdot\omega_0\cdot\underbrace{\cos(\omega_0 0)}_{1} \Rightarrow \upsilon_0 = A\cdot\omega_0 \Rightarrow A=\frac{\upsilon_0}{\omega_0}$$

Εισάγοντας την $A=\dfrac{\upsilon_0}{\omega_0}$ στην (2)' προκύπτει ότι:

$$x(t)=\frac{\upsilon_0}{\omega_0}\cdot\sin(\omega_0 t)$$

Συμπέρασμα: Εισάγοντας τις αρχικές συνθήκες $x(0)=0$ και $\upsilon(0)=\upsilon_0$ στις $\begin{cases} x(t)=(\alpha+\beta)\cos\omega_0 t + i(\alpha-\beta)\sin\omega_0 t \\ x(t)=A\cdot\cos(\omega_0 t+\phi) \end{cases}$ προκύπτει η ίδια εξίσωση κίνησης που είναι η $x(t)=\dfrac{\upsilon_0}{\omega_0}\cdot\sin(\omega_0 t)$.

Αριθμητική εφαρμογή: $m=100gr$, $k=0{,}625Nt/cm$, $\upsilon_0=5m/\sec$

Μετατροπή στο σύστημα μονάδων S.I.

$$m=0{,}1kgr,\ k=0{,}625\frac{Nt}{cm}=\frac{0{,}625Nt}{0{,}01m}=62{,}5\frac{Nt}{m}$$

Η κυκλική συχνότητα είναι: $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{62{,}5}{0{,}1}}=\sqrt{625}=25\dfrac{rad}{\sec}$

και $x(t)=\dfrac{5}{25}\cdot\sin(25t)$ ή $x(t)=0{,}2\cdot\sin(25t)(m)$

ΑΣΚΗΣΗ 6.4

Εισάγετε τις αρχικές συνθήκες $x(0)=x_0$ και η ταχύτητα $\upsilon(0)=0$ στις εξισώσεις $x(t)=(\alpha+\beta)\cos\omega_0 t+i(\alpha-\beta)\sin\omega_0 t$, και $x(t)=A\cdot\cos(\omega_0 t+\phi)$ όπου ω_0 είναι η κυκλική συχνότητα, ϕ η φάση και α,β σταθερές. Αποδείξτε ότι και στις δύο περιπτώσεις προκύπτει η ίδια εξίσωση κίνησης.

Λύση:

Οι αρχικές συνθήκες λένε ότι την χρονική στιγμή $t=0$ που αρχίσαμε να παρατηρούμε το σώμα αυτό βρισκόταν στη θέση μέγιστης απομάκρυνσης $x(0)=x_0$ και όπως αναμένεται, είχε ταχύτητα $\upsilon(0)=0$.

Εισάγοντας την συνθήκη $x(0)=x_0$ στην εξίσωση $x(t)=(\alpha+\beta)\cos\omega_0 t+i(\alpha-\beta)\sin\omega_0 t$ (1)

προκύπτει: $x(0)=(\alpha+\beta)\underbrace{\cos\omega_0 0}_{1}+i(\alpha-\beta)\underbrace{\sin\omega_0 0}_{0}\Rightarrow x_0=\alpha+\beta$ (α)

Οπότε η (1) γίνεται: $x(t)=x_0\cos\omega_0 t+i(\alpha-\beta)\sin\omega_0 t$ (1)'

Παραγωγίζοντας την (1) προκύπτει η συνάρτηση της ταχύτητας $\upsilon(t)=x'(t)=-x_0\cdot\omega_0\sin\omega_0 t+i(\alpha-\beta)\omega_0\cos\omega_0 t$, αλλά δίνεται ότι $\upsilon(0)=0$

οπότε $\upsilon(0)=-x_0\cdot\omega_0\underbrace{\sin\omega_0 0}_{0}+i(\alpha-\beta)\omega_0\underbrace{\cos\omega_0 0}_{1}=i(\alpha-\beta)\omega_0$, αλλά $\upsilon(0)=0$ οπότε:

$i(\alpha-\beta)\omega_0=0\Rightarrow\alpha=\beta$. Αντικαθιστώντας στη (1)' προκύπτει ότι: $x(t)=x_0\cos\omega_0 t$

Η $x(t)=x_0\cos\omega_0 t$ είναι η μορφή που πήρε η εξίσωση (1), δηλαδή η λύση της διαφορικής εξίσωσης, αφού εισήγαμε τις αρχικές συνθήκες.

Τώρα θα εισάγουμε τις αρχικές συνθήκες $x(0)=x_0$ και $\upsilon(0)=0$ στην $x(t)=A\cdot\cos(\omega_0 t+\phi)$ (2)

$x(0)=A\cdot\cos(\omega_0 0+\phi)=A\cdot\cos\phi$ αλλά $x(0)=x_0$, οπότε $A\cdot\cos\phi=x_0\Rightarrow A=\dfrac{x_0}{\cos\phi}$

εισάγοντας την τιμή $A=\dfrac{x_0}{\cos\phi}$ στην (2) προκύπτει: $x(t)=\dfrac{x_0}{\cos\phi}\cdot\cos(\omega_0 t+\phi)$ (2)'

Παραγωγίζοντας την (2)' ως προς τον χρόνο προκύπτει η εξίσωση της ταχύτητας:

$\upsilon(t)=x'(t)=-\dfrac{x_0}{\cos\phi}\cdot\omega_0\cdot\sin(\omega_0 t+\phi)$ αλλά $\upsilon(0)=0$, οπότε

$\upsilon(0)=-\dfrac{x_0}{\cos\phi}\cdot\omega_0\cdot\sin(\omega_0 0+\phi)=0$ ή $-\dfrac{x_0}{\cos\phi}\cdot\omega_0\cdot\sin\phi=0$ κατά συνέπεια:

$\tan\phi=0$ ή $\phi=0$

Τότε η (2)' θα γίνει $x(t)=\dfrac{x_0}{\cos 0}\cdot\cos(\omega_0 t+0)=x_0\cdot\cos\omega_0 t$

Συμπέρασμα: Εισάγοντας τις αρχικές συνθήκες $x(0)=x_0$ και $\upsilon(0)=0$ στις $\begin{cases} x(t)=(\alpha+\beta)\cos\omega_0 t+i(\alpha-\beta)\sin\omega_0 t \\ x(t)=A\cdot\cos(\omega_0 t+\phi)\end{cases}$ προκύπτει η ίδια εξίσωση κίνησης που είναι η $x(t)=x_0\cdot\cos\omega_0 t$.

ΑΣΚΗΣΗ 6.5

Ένα σώμα μάζας m εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους $A=2m$ χωρίς απόσβεση. Αν την χρονική στιγμή $t=0$ είναι $x(0)=1m$, $\upsilon(0)=-4m/\sec$ και $E_{ΟΛ}=4Joule$ να υπολογιστούν: α) Η φάση της αρμονικής ταλάντωσης, β) Η συχνότητα, γ) Η σταθερά της αρμονικής ταλάντωσης και δ) Η μάζα του σώματος.

Λύση:

α) Η εξίσωση της κίνησης είναι $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)$.

Η ταχύτητα προκύπτει με παραγώγιση $\upsilon(t) = -A \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \phi)$

$$x(0) = 1m \Rightarrow A \cdot \cos\phi = 1 \Rightarrow \cos\phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

Εάν $\phi = -\frac{\pi}{3}$, τότε $x(t) = A \cdot \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{3}\right)$ και $\upsilon(t) = -A \cdot \omega_0 \cdot \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{3}\right)$ οπότε για $t = 0$ η εξίσωση της ταχύτητας θα είναι: $\upsilon(0) = -A \cdot \omega_0 \cdot \sin\left(\omega_0 \cdot 0 - \frac{\pi}{3}\right)$ δηλαδή: $\upsilon(0) = -A \cdot \omega_0 \cdot \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}_{-} > 0$ ενώ δίνεται ότι $\upsilon(0) = -4m/\sec$. Κατά συνέπεια $\phi = \frac{\pi}{3}$

οπότε $x(t) = 2 \cdot \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{3}\right)$

β) Υπολογισμός της κυκλικής συχνότητας:

$$\upsilon(0) = -4m/\sec \Rightarrow -2 \cdot \omega_0 \cdot \sin\left(\omega_0 0 + \frac{\pi}{3}\right) = -4 \Rightarrow -2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -4 \Rightarrow \omega_0 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \frac{rad}{\sec}$$

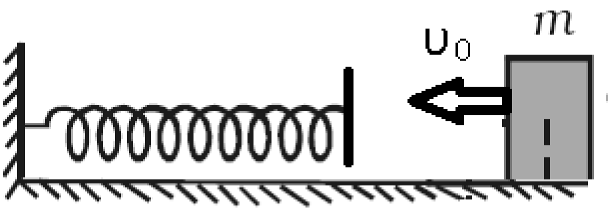
γ) $\left.\begin{aligned} E_{ΟΛ} &= 4Joule \\ E_{ΟΛ} &= \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow k = \frac{8}{4} = 2\frac{Nt}{m}$

δ) $\frac{k}{m} = \omega_0^{\ 2} \Rightarrow m = \frac{k}{\omega_0^{\ 2}} = \frac{6}{16} = 0{,}375kg$

ΑΣΚΗΣΗ 6.6

Ένα σώμα μάζας m κινείται χωρίς τριβές με ταχύτητα υ_0 επάνω σε ένα οριζόντιο τραπέζι και συγκρούεται με ένα αβαρές ελατήριο σταθεράς k. Το ελατήριο συμπιέζεται και στη συνέχεια το σώμα εκτινάσσεται προς την αντίθετη κατεύθυνση. Για πόσο χρόνο το ελατήριο θα βρίσκεται σε επαφή με το σώμα; Ποια είναι η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου; Δεν υπάρχουν τριβές.

Λύση:

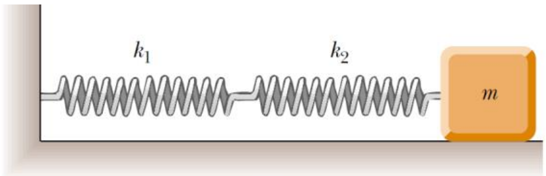


Το σώμα χτυπάει επάνω στο αβαρές ελατήριο στη θέση $x=0$, το ελατήριο συσπειρώνεται και στη συνέχεια εκτινάσσεται μαζί με το σώμα. Επειδή το ελατήριο δεν έχει μάζα θα εκταθεί μέχρι τη θέση $x=0$. Κατά συνέπεια το σώμα θα βρίσκεται σε επαφή με το ελατήριο για χρόνο ίσο με το μισό της περιόδου της ταλάντωσης που θα έκανε η μάζα εάν ήταν προσαρτημένη στο ελατήριο.

$$t=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}=\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Εάν η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου είναι x_0 τότε από την αρχή διατήρησης της ενέργειας θα είναι: $\frac{1}{2}m\upsilon^2{}_0=\frac{1}{2}kx^2{}_0$ οπότε $x_0=\upsilon_0\sqrt{\frac{m}{k}}$

ΑΣΚΗΣΗ 6.7



Το σώμα απομακρύνεται από την θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο να ταλαντωθεί χωρίς τριβές. Να υπολογιστεί η τιμή της ισοδύναμης σταθεράς των δύο ελατηρίων.

Λύση:

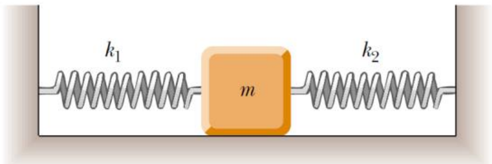
Καθένα από τα ελατήρια επιμηκύνεται με δύναμη μέτρου F, η οποία προκαλεί στα δύο ελατήρια επιμηκύνσεις x_1 και x_2. Από τον 3ο νόμο $F=k_1\cdot x_1=k_2\cdot x_2$. Το 'ισοδύναμο' ελατήριο δέχεται δύναμη F και επιμηκύνεται κατά x και ισχύει $F=k\cdot(x_1+x_2)$ (1). Εισάγοντας τις σχέσεις

$x_1=\frac{F}{k_1}$ και $x_2=\frac{F}{k_2}$ στην (1) προκύπτει: $k=\dfrac{F}{\frac{F}{k_1}+\frac{F}{k_2}}=\dfrac{k_1\cdot k_2}{k_1+k_2}$

ΑΣΚΗΣΗ 6.8

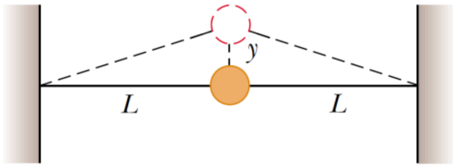
Το σώμα απομακρύνεται από την θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο να ταλαντωθεί χωρίς τριβές. Να υπολογιστεί η τιμή της ισοδύναμης σταθεράς των δύο ελατηρίων.

Λύση:



Εάν το σώμα μετατοπιστεί κατά x το ένα ελατήριο θα συμπιεστεί κατά x και το άλλο θα επιμηκυνθεί κατά x. Το σώμα θα δεχθεί δυνάμεις $F_1 = k_1 \cdot x$ και $F_2 = k_2 \cdot x$ προς την ίδια κατεύθυνση. Οπότε $F = F_1 + F_2 = (k_1 + k_2)x$, άρα $k = k_1 + k_2$

ΑΣΚΗΣΗ 6.9

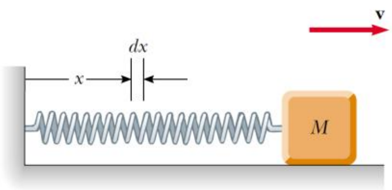


Ένα σώμα μάζας m έχει προσδεθεί σε δύο λάστιχα όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα λάστιχα βρίσκονται υπό τάση T. Το σώμα απομακρύνεται από την θέση ισορροπίας κατά μία μικρή απόσταση y, που είναι κάθετη στην διεύθυνση που έχουν τα δύο λάστιχα. α) Υποθέστε ότι η τάση στα λάστιχα δεν μεταβάλλεται και υπολογίστε την δύναμη επαναφοράς. β) Αποδείξτε ότι το σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση και υπολογίστε τη κυκλική συχνότητα.

Λύση:

Η δύναμη επαναφοράς που δέχεται το σώμα είναι ίση με την προβολή των τάσεων επάνω στην κατεύθυνση y. $\Sigma F = -2T\cos\phi$ όπου ϕ η γωνία που σχηματίζει κάθε λάστιχο με τον φορέα του y. Η σχέση αυτή μπορεί να γραφτεί και σαν $\Sigma F = -2T\sin\theta$, όπου θ η γωνία που σχηματίζει κάθε λάστιχο με τον φορέα των L. Για μικρές γωνίες ισχύει: $\sin\theta = \tan\theta = \dfrac{y}{L}$, οπότε $\Sigma F = -2T\dfrac{y}{L}$. Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι η συνολική δύναμη που δέχεται το σώμα είναι δύναμη επαναφοράς με σταθερά $k = \dfrac{2T}{L}$. Κατά συνέπεια: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{2T}{m \cdot L}}$

ΑΣΚΗΣΗ 6.10



Σώμα μάζας m έχει προσδεθεί σε ελατήριο σταθεράς k και φυσικού μήκους l και εκτελεί αρμονική ταλάντωση χωρίς τριβές. Υποθέστε ότι όλα τα τμήματα του ελατηρίου ταλαντώνονται σε φάση και ότι η ταχύτητα κάθε τμήματος είναι ανάλογη της απόστασής της από το σημείο πρόσδεση του ελατηρίου στον τοίχο $\upsilon_x = \dfrac{x}{l}\upsilon$, υ: η ταχύτητα του σώματος. α) Υπολογίστε τη κινητική ενέργεια του συστήματος ελατηρίου-σώματος και β) την κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης.

Λύση:

Η ολική κινητική ενέργεια ισούται με την κινητική ενέργεια του σώματος και του ελατηρίου

$$dK_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{l}dx\right)\left(\frac{x}{l}\upsilon\right)^2$$

$$K_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = \frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{m}{l}dx\right)\left(\frac{x}{l}\upsilon\right)^2 = \frac{1}{2}\int_0^l\frac{m\upsilon^2}{l^3}x^2\cdot dx = \frac{m\upsilon^2}{2l^3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l$$

$$K_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = \frac{m\upsilon^2}{2l^3}\frac{l^3}{3} = \frac{m\upsilon^2}{6}$$

$$K = K_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} + K_{\sigma\omega\mu} = \frac{m\upsilon^2}{6} + \frac{M\upsilon^2}{2} = \frac{1}{2}\left(M + \frac{m}{3}\right)\upsilon^2$$

Αφού η ισοδύναμη μάζα του ελατηρίου είναι $\frac{m}{3}$ η συχνότητα ταλάντωσης θα είναι:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{m}{3}}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6.11

Ένας κύλινδρος ύψους H, ακτίνας R και πυκνότητας ρ_κ επιπλέει μέσα σε υγρό πυκνότητας ρ_υ βυθισμένος κατά το $\frac{1}{2}$ του ύψους του. Βυθίζουμε τον κύλινδρο κατά μια μικρή επιπλέον απόσταση z_0 και εν συνεχεία τον αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Γράψτε τη διαφορική εξίσωση κίνησης του κυλίνδρου, υποθέτοντας ότι οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο είναι το βάρος του και η άνωση. Δείξτε ότι το σώμα εκτελεί ταλάντωση της μορφής $z(t) = z_0 \cdot \cos\omega t$ όπου ω η κυκλική συχνότητα.

Λύση:

Ο κύλινδρος ισορροπεί στο υγρό οπότε: $B = F_{\text{ΑΝΩΣΗ}}$

$B = \rho_\kappa V g = \rho_\kappa \cdot \pi R^2 H \cdot g$ και $F_{\text{ΑΝΩΣΗ}} = \rho_\upsilon g V_{\text{ΒΥΘΙΣΜΕΝΟ}} = \rho_\upsilon \cdot g\pi R^2 \cdot \frac{H}{2}$ οπότε

$$g\rho_\kappa \pi R^2 H = g\rho_\upsilon \pi R^2 \frac{H}{2} \Rightarrow \rho_\kappa = \frac{\rho_\upsilon}{2}$$

Ο κύλινδρος βυθίζεται περεταίρω κατά z_0. Σε μια τυχαία χρονική στιγμή, όταν η επιπλέον βύθιση του κυλίνδρου είναι z, η δύναμη της άνωσης θα έχει μεταβληθεί και θα είναι:

$F'_{\text{ΑΝΩΣΗ}} = \rho_\upsilon g\pi R^2\left(\frac{H}{2} + z\right)$. Τότε η συνισταμένη των δυνάμεων θα είναι:

$$\Sigma F = B - F'_{\text{ΑΝΩΣΗ}} = \rho_\kappa g \pi R^2 H - \rho_\upsilon g \pi R^2 \left(\frac{H}{2} + z\right)$$ παίρνοντας υπόψη την $\rho_\kappa = \dfrac{\rho_\upsilon}{2}$

γίνεται: $\Sigma F = \rho_\kappa g \pi R^2 \left[H - 2\left(\frac{H}{2} + z\right)\right] = -\rho_\kappa g \pi R^2 2z$

Εφαρμόζοντας τον Νόμο του Νεύτωνα

$$\Sigma F = ma \Rightarrow -\rho_\kappa g \pi R^2 2z = m\frac{d^2 z}{dt^2}$$

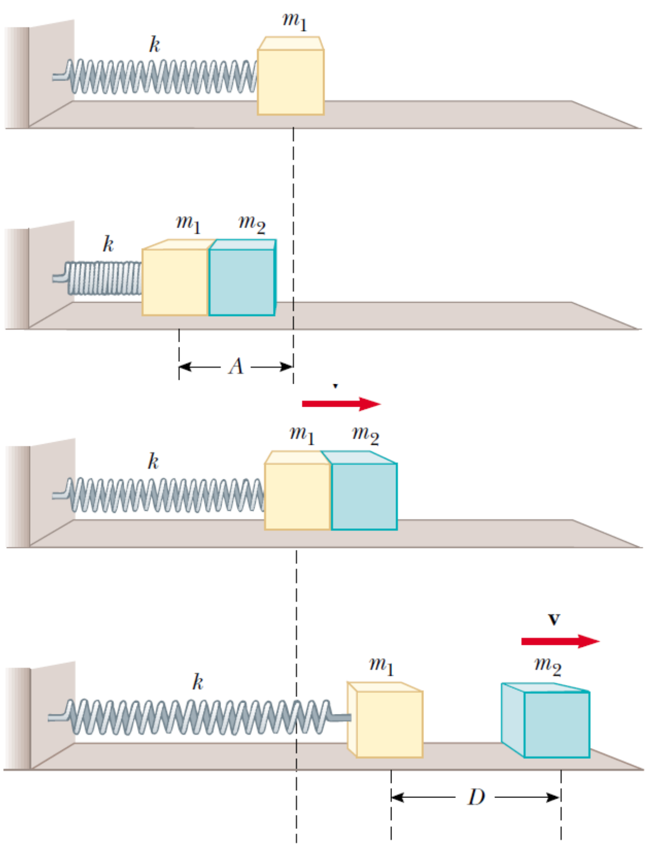
$$-\rho_\kappa g \pi R^2 2z = \underbrace{\rho_\kappa \pi R^2 H}_{m}\frac{d^2 z}{dt^2} \quad \Rightarrow \underbrace{\rho_\kappa \pi R^2 H}_{m}\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\rho_\kappa g \pi R^2 z = 0$$

$\dfrac{d^2 z}{dt^2} + \dfrac{2g}{H} z = 0$. Αντικαθιστώντας $\omega^2 = \dfrac{2g}{H}$, όπου $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{H}}$ η κυκλική συχνότητα, η διαφορική εξίσωση γίνεται: $\dfrac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 z = 0$.

Η λύση της εξίσωσης είναι της μορφής $z = z_0 \cos(\omega t + \phi)$.

ΑΣΚΗΣΗ 6.12:

μ Ένα σώμα μάζας $m_1 = 9kg$ έχει προσδεθεί επάνω σε ένα ελατήριο σταθεράς $k = 100Nt/m$ το οποίο στηρίζεται ακλόνητα στον τοίχο. Το σύστημα σώματος-ελατηρίου βρίσκεται σε ισορροπία επάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Ένα δεύτερο σώμα μάζας $m_2 = 7kg$ σπρώχνεται επάνω στο σώμα m_1 και αναγκάζει το ελατήριο να συμπιεστεί κατά $A = 0,2m$. Στη συνέχεια το σύστημα αφήνεται ελεύθερο και τα δύο σώματα αρχίζουν να κινούνται προς τα δεξιά επάνω στο λείο δάπεδο. Την στιγμή που η μάζα m_1 φτάνει το σημείο ισορροπίας χάνει την επαφή με το σώμα μάζας m_2 το οποίο συνεχίζει την κίνηση προς τα δεξιά με ταχύτητα υ. α) Να βρεθεί η



ταχύτητα υ. β) Πόσο θα απέχουν τα δύο σώματα όταν το ελατήριο θα έχει το μέγιστο μήκος για πρώτη φορά (απόσταση D);

Λύση:

$$E = \frac{1}{2}k \cdot A^2 = \frac{1}{2}100 \cdot 0{,}04 = 2 Joule$$

$$E_{\iota\sigma o\rho\rho} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot \upsilon^2 = \frac{1}{2}16 \cdot \upsilon^2 = 8 \cdot \upsilon^2 Joule$$

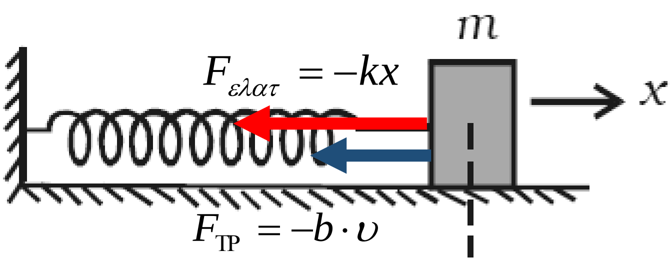
$$E = E_{\iota\sigma o\rho\rho} \Rightarrow \frac{1}{2}k \cdot A^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot \upsilon^2 \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{k \cdot A^2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{k \cdot A^2}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \upsilon = 0{,}5\frac{m}{\sec}$$

ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ 6.13

Ένα σώμα μάζας m έχει προσαρτηθεί στην άκρη ενός ελατηρίου σταθεράς k. Να γράψετε τη διαφορική εξίσωση που διέπει την κίνηση του σώματος εάν η τριβή που ασκείται στο σώμα κατά την κίνησή του είναι ανάλογη της ταχύτητας, $F_{\text{ΤΡ}} = -b \cdot \upsilon$.

Λύση:



Το σώμα δέχεται τις δυνάμεις $F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = -kx$, και $F_{\text{ΤΡ}} = -b \cdot \upsilon$ από το δέπεδο. $\Sigma F = m \cdot a$ ή

$F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} + F_{\text{ΤΡ}} = m \cdot a$ ή $-kx - b\upsilon = m \cdot a$ ή $-kx - bx' = m \cdot x''$

$mx'' + bx' + kx = 0$

$x'' + \frac{b}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$ στην διαφορική εξίσωση εισάγουμε τις αντικαταστάσεις: $\gamma = \frac{b}{2m}$ και $\frac{k}{m} = \omega_0{}^2$.

Οι διαστάσεις του $\sqrt{\frac{k}{m}}$ είναι $\frac{1}{T}$ οπότε δικαιολογημένα η ιδιοσυχνότητα του ταλαντούμενου συστήματος είναι $\frac{k}{m} = \omega_0{}^2$. Προσδιορισμός των διαστάσεων του $\gamma = \frac{b}{2m}$.

$$F_{\text{ΤΡ}} = -b\upsilon \Rightarrow b = \frac{F_{\text{ΤΡ}}}{\upsilon} \qquad [b] = \frac{[F]}{[\upsilon]}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \left[\frac{b}{m}\right] = \frac{[F]/[\upsilon]}{M} \\ [F] = M \cdot [a] = M \cdot \frac{L}{T^2} \end{array} \right\} \qquad \left[\frac{b}{m}\right] = \frac{[F]}{[\upsilon]M} = \frac{M \cdot L}{T^2} \cdot \frac{1}{\frac{L}{T}M} = \frac{M \cdot L}{M \cdot T^2 \cdot \frac{L}{T}} = \frac{1}{T}$$

$$\left[\frac{b}{m}\right] = [\omega] \qquad \text{αλλά} \qquad \gamma = \frac{b}{2m} \text{ οπότε } [\gamma] = \left[\frac{b}{m}\right] = [\omega] = \frac{1}{T}$$

Εισάγοντας τις αντικαταστάσεις στην διαφορική εξίσωση αυτή γίνεται:

$x'' + 2\gamma x' + {\omega_0}^2 x = 0$

Οι γραμμικές ομογενείς διαφορικές εξισώσεις έχουν λύσεις της μορφής: $x(t) \sim e^{\lambda t}$
Με παραγώγιση προκύπτει: $x'(t) \sim \lambda e^{\lambda t}$ και $x''(t) \sim \lambda^2 e^{\lambda t}$, αντικαθιστώντας η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma\lambda e^{\lambda t} + {\omega_0}^2 e^{\lambda t} = 0$ ή $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + {\omega_0}^2 = 0$. Η διακρίνουσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι: $\Delta = 4\gamma^2 - 4{\omega_0}^2 = 4\left(\gamma^2 - {\omega_0}^2\right)$

α) Αν $\gamma < \omega_0$ δηλ. $\Delta < 0$ οι ρίζες είναι $\lambda_{1,2} = \dfrac{-2\gamma \pm 2i\sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}}{2} = -\gamma \pm i\underbrace{\sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}}_{\omega}$

και η συνάρτηση-λύση της διαφορικής εξίσωσης γίνεται:

$x(t) = B \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos\omega t + C \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sin\omega t$ όπου $\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}$

$x(t) = e^{-\gamma t}\left(B \cdot \cos\omega t + C \cdot \sin\omega t\right)$ ή $x(t) = A \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega t + \phi)$

β) Εάν $\gamma > \omega_0$ δηλ. $\Delta > 0$ τότε οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι $\lambda_{1,2} = \dfrac{-2\gamma \pm 2\sqrt{\gamma^2 - {\omega_0}^2}}{2} = -\gamma + \underbrace{\sqrt{\gamma^2 - {\omega_0}^2}}_{p}$

και η συνάρτηση-λύση της διαφορικής εξίσωσης

$x(t) = e^{-\gamma t}\left(c_1 \cdot e^{pt} + c_2 \cdot e^{-pt}\right)$ όπου $p = \sqrt{\gamma^2 - {\omega_0}^2}$

γ) Εάν $\gamma = \omega_0$ δηλ. $\Delta = 0$ τότε οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι $\lambda_{1,2} = -\gamma$

και η συνάρτηση-λύση της διαφορικής εξίσωσης $x(t) = e^{-\gamma t}\left(\mathrm{A} + \mathrm{B}t\right)$

ΑΣΚΗΣΗ 6.14

Η κίνηση ενός σώματος που εκτελεί αρμονική ταλάντωση περιγράφεται από την εξίσωση: $x'' + 6x' + 9x = 0$. Τι είδους κίνηση κάνει το σώμα όταν $x(0) = 1$ και $\upsilon(0) = -2$

Λύση:

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι $\rho_{1,2} = -3$ κατά συνέπεια πρόκειται για μια περίπτωση περιοδικής κίνησης κρίσιμης απόσβεσης, όπου η συνάρτηση-λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι $x(t) = (a \cdot t + b)e^{-3t}$

$x(0)=1 \Rightarrow b=1$

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon(t)=\dfrac{dx}{dt}=a\cdot e^{-3t}-3ate^{-3t}-3be^{-3t} \\ \qquad\qquad \upsilon(0)=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot -3b=-2$$

Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων προκύπτει ότι: $\{a=1, \quad b=1\}$ οπότε:

$x(t)=(t+1)e^{-3t}$

ΑΣΚΗΣΗ 6.15

Η κίνηση ενός σώματος που εκτελεί αρμονική ταλάντωση περιγράφεται από την εξίσωση: $x''+5x'+6x=0$. Τι είδους κίνηση κάνει το σώμα όταν $x(0)=1$ και $\upsilon(0)=0$

Λύση:

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι $\rho_1=-2 \quad \rho_2=-3$ κατά συνέπεια πρόκειται για μια περίπτωση περιοδικής κίνησης με υπεραπόσβεση, όπου η συνάρτηση-λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι $x(t)=a\cdot e^{-2t}+be^{-3t}$

$x(0)=1 \Rightarrow a+b=1$

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon(t)=\dfrac{dx}{dt}=-2a\cdot e^{-2t}-3be^{-3t} \\ \qquad\qquad \upsilon(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2a\cdot -3b=0$$

Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων προκύπτει ότι: $\{a=3, \quad b=-2\}$ οπότε:

$x(t)=3\cdot e^{-2t}-2\cdot e^{-3t}$

Το εκθετικό e^{-2t} ελέγχει τον ρυθμό με τον οποίο η $x(t)$ προσεγγίζει το 0 και αυτό γιατί είναι το εκθετικό που πηγαίνει πιο αργά στο 0 σε σύγκριση με το e^{-3t}.

ΑΣΚΗΣΗ 6.16

Σώμα μάζας $m=2kgr$ κινείται στον άξονα x και δέχεται ελκτική δύναμη $F=8x(Nt)$ προς την αρχή των αξόνων. Να βρεθούν: α) Η διαφορική εξίσωση της κίνησης, η συνάρτηση της θέσης $x(t)$, η συνάρτηση της ταχύτητας $\upsilon(t)$, το πλάτος και η περίοδος της ταλάντωσης. β) Εάν το σώμα δεχθεί δύναμη $F=4\upsilon(Nt)$ όπου υ η ταχύτητα, να υπολογίσετε τα $x(t)$ και $\upsilon(t)$. Δίνεται ότι $x(0)=20m$ και $\upsilon(0)=0$.

Λύση:

α) $ma + kx = 0 \Rightarrow a + \frac{k}{m}x = 0$, αντικαθιστώντας $\frac{k}{m} = \omega^2{}_0$ γίνεται: $x'' + \omega^2{}_0 = 0$ ή $x'' + 4 = 0$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2rad/\sec$. Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 + 4 = 0$

Ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης: $\lambda_{1,2} = \pm i2$

$x(t) = A \cdot \cos(2t + \phi)$, $\upsilon(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -2A \cdot \sin(2t + \phi)$ Εφαρμογή των αρχικών συνθηκών:

$\upsilon(t) = 0 \Rightarrow -2A \cdot \sin\phi = 0 \Rightarrow \phi = \kappa\pi$

$x(0) = 20 \Rightarrow A \cdot \cos(\kappa\pi) = 20$, επειδή το πλάτος είναι θετικό από τις τιμές $\phi = \kappa\pi$ κρατάμε μόνο αυτές που δίνουν αποτέλεσμα +1, δηλ. $\kappa = \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma$ οπότε $\kappa = 2\nu$. Όμως η φάση θα πρέπει να έχει μία μοναδική τιμή οπότε επιλέγουμε $\phi = 0$.

$$\begin{cases} x(t) = 20 \cdot \cos 2t \\ \upsilon(t) = -40 \cdot \sin 2t \end{cases}$$

β) $ma + b\upsilon + kx = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{m}\upsilon + \frac{k}{m}x = 0$ $\begin{cases} \frac{b}{2m} = \gamma \\ \frac{k}{m} = \omega^2{}_0 \end{cases}$ οπότε $a + 2\gamma\upsilon + \omega^2{}_0 x = 0$

Αντικαθιστώντας $\{\omega_0 = 2rad/\sec, \quad \gamma = 1rad/\sec\}$

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης είναι: $x'' + 2\gamma x' + \omega^2{}_0 = 0$ ή $x'' + 2x' + 4 = 0$

Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$

Ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης: $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\underbrace{\sqrt{3}}_{\omega}$

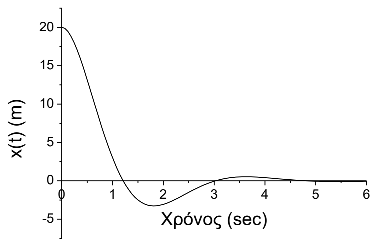
$x(t) = C \cdot e^{-t} \cdot \cos(\sqrt{3}t + \phi)$

$\upsilon(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -C \cdot e^{-t} \cdot \cos(\sqrt{3}t + \phi) - C \cdot e^{-t} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin(\sqrt{3}t + \phi)$

Εφαρμογή των αρχικών συνθηκών:

$\upsilon(0) = -C \cdot \cos\phi - C \cdot \sqrt{3} \cdot \sin\phi = 0 \Rightarrow \tan\phi = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \phi = -\frac{\pi}{6}$

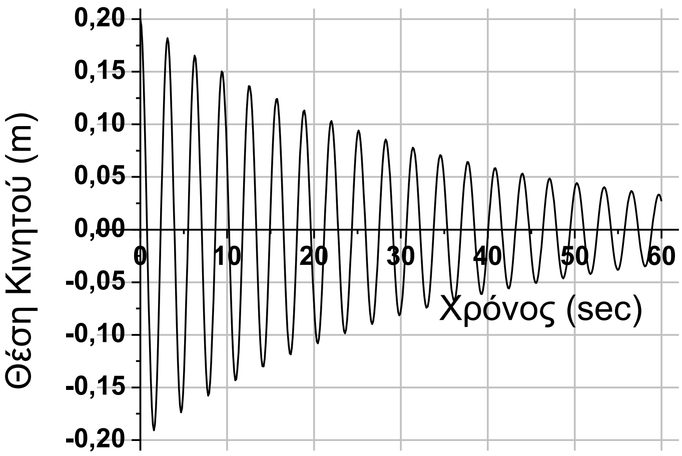
$x(0) = C \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 20 \Rightarrow C = \frac{20}{\cos(\pi/6)} = \frac{40 \cdot \sqrt{3}}{3}$ οπότε:



$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{40\sqrt{3}}{3}\cdot e^{-t}\cdot\cos\left(\sqrt{3}t-\dfrac{\pi}{6}\right) \\ \upsilon(t)=-\dfrac{40\sqrt{3}}{3}\cdot e^{-t}\cdot\left[\cos\left(\sqrt{3}t-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}t-\dfrac{\pi}{6}\right)\right] \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6.17

Ένα σώμα είναι προσαρτημένο σε ένα ελατήριο σταθεράς $k=20Nt/m$. Η γραφική παράσταση δείχνει την μεταβολή της θέσης του κινητού συναρτήσει του χρόνου. α) Ποια είναι η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης; β) Υπολογίστε τον συντελεστή γ γ) Σε πόσο χρόνο η αρχική απόσταση του σώματος από το σημείο ισορροπίας μειώνεται για πρώτη φορά κατά ένα παράγοντα $\frac{1}{2}$; δ) Σε πόσο χρόνο το αρχικό πλάτος μειώνεται κατά ένα παράγοντα e; ε) Υπολογίστε την ιδιοσυχνότητα ω_0 του συστήματος και την μάζα του σώματος.



Λύση:

α) Από την γραφική παράσταση φαίνεται ότι σε 10 sec χωράνε περίπου 3 περίοδοι. Ας πούμε 3,2 περίοδοι.

$$3{,}2\cdot T=10\Rightarrow T=\frac{10}{3{,}2}=3{,}125\sec$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{6{,}28}{3{,}125}\approx 2\frac{rad}{\sec}$$

β) Η εξίσωση που περιγράφει την μεταβολή της θέσης του σώματος περιλαμβάνει δύο παράγοντες:

$$x(t)=\underbrace{A\cdot e^{-\gamma t}}_{απόσβεση}\cdot\underbrace{\cos(\omega t+\phi)}_{ταλάντωση}$$

Ο πρώτος περιγράφει την μείωση που υφίσταται το πλάτος και ο δεύτερος είναι το ταλαντωτικό μέρος. Για την απάντηση της ερώτησης χρειάζεται μόνο ο πρώτος παράγοντας. Από την γραφική παράσταση προκύπτει ότι το αρχικό πλάτος μειώνεται στην μισό της τιμής του σε χρόνο 22,5sec περίπου.

$$A\cdot e^{-\gamma 22,5}=\frac{A}{2}\Rightarrow e^{-\gamma 22,5}=2^{-1}\Rightarrow \ln\left(e^{-\gamma 22,5}\right)=\ln\left(2^{-1}\right)\Rightarrow \gamma=\frac{\ln 2}{22,5}=0,031\frac{1}{\sec}$$

γ) Αγνοούμε την μείωση που υφίσταται το πλάτος στην διάρκεια της πρώτης περιόδου. Για $t=0$ η απομάκρυνση είναι μέγιστη κατά συνέπεια η φάση στον ταλαντωτικό παράγοντα $\cos(\omega t+\phi)$ θα είναι ίση με μηδέν. Η συνάρτηση της θέσης του κινητού θα είναι: $x(t)=A\cdot\cos\omega t$. Όταν η απόσταση του σώματος από την θέση ισορροπίας γίνει $\frac{A}{2}$ θα ισχύει: $\frac{A}{2}=A\cdot\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=\frac{1}{2}\Rightarrow\omega t=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

Όταν το σώμα απέχει από το σημείο ισορροπίας απόσταση $\frac{A}{2}$ για πρώτη φορά είναι $k=0$, οπότε $\omega t=\frac{\pi}{3}$ ή $t=\frac{\pi}{6}\sec$

δ) $A\cdot e^{-\gamma\cdot t}=\frac{A}{e}\Rightarrow e^{-\gamma\cdot t}=e^{-1}\Rightarrow t=\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{0,031}=32,26\sec$

ε) Από την λύση της διαφορικής εξίσωσης $x''+2\gamma x'+{\omega_0}^2 x=0$ προκύπτει ότι η συχνότητα ταλάντωσης για την περίπτωση της υπο-απόσβεσης είναι ίση με:

$$\omega=\sqrt{\omega^2{}_0-\gamma^2}\Rightarrow\omega^2=\omega^2{}_0-\gamma^2\Rightarrow\omega_0=\sqrt{\omega^2+\gamma^2}=\sqrt{2^2+0,031^2}=\sqrt{4,0009}=2,0002 rad/\sec$$

Η ιδιοσυχνότητα υπολογίζεται από την σχέση $\frac{k}{m}={\omega_0}^2$, οπότε η μάζα θα είναι $m=\frac{k}{{\omega_0}^2}=\frac{20}{4,0009}\approx 5kg$.

ΑΣΚΗΣΗ 6.18

Το πλάτος ενός αρμονικού ταλαντωτή μειώνεται στο $\frac{1}{e}$ της αρχικής τιμής του μετά από n περιόδους. Να δειχθεί ότι $\frac{T}{T_0}=\sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2 n^2}}$, όταν T και T_0 είναι οι περίοδοι με απόσβεση και χωρίς απόσβεση αντίστοιχα.

Λύση:

Η κυκλική συχνότητα συνδέεται με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντούμενου συστήματος μέσω της σχέσης $\omega^2=\omega^2{}_0-\gamma^2\Rightarrow\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=\omega^2{}_0-\gamma^2\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2{}_0-\gamma^2}}$,

οπότε

$$\frac{T}{T_0}=\frac{\dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega^2{}_0-\gamma^2}}}{\dfrac{2\pi}{\omega_0}}=\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega^2{}_0-\gamma^2}}=\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{\omega^2{}_0}{\omega_0}-\dfrac{\gamma^2}{\omega_0}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\gamma^2}{\omega_0}}} \qquad (1)$$

$x(t)=A\cdot e^{-\gamma t}\cdot\cos(\omega t+\phi)$ είναι η συνάρτηση της θέσης σε μία αρμονική ταλάντωση με απόσβεση. Το πλάτος μειώνεται από A σε $\frac{A}{e}$ σε χρόνο $t=n\cdot T$. Επιπλέον, επειδή το ερώτημα αφορά στο πλάτος της αρμονικής ταλάντωσης θα είναι $\phi=0$.

$$x(t)=A\cdot e^{-\gamma t}\cdot\cos(\omega nT)=A\cdot e^{-\gamma t}\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}nT\right)=A\cdot e^{-\gamma t}\cdot\underbrace{\cos(2\pi n)}_{1}$$

Εισάγουμε στην εξίσωση τις πληροφορίες του προβλήματος ‘σε χρόνο $t=n\cdot T$ το πλάτος μειώνεται από A σε $\frac{A}{e}$.

$\frac{A}{e}=A\cdot e^{-\gamma\cdot n\cdot T}\cdot\underbrace{\cos(2\pi n)}_{1}\Rightarrow e^{-1}=e^{-\gamma\cdot n\cdot T}\Rightarrow\gamma=\frac{1}{nT}$ αντικαθιστώντας η (1) γίνεται:

$$\frac{T}{T_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1/nT}{\dfrac{2\pi}{T_0}}\right)^2}}\Rightarrow\left(\frac{T}{T_0}\right)^2=\frac{1}{1-\dfrac{T^2{}_0}{4\pi^2n^2T^2}}\Rightarrow\left(\frac{T}{T_0}\right)^2-\frac{1}{4\pi^2n^2}=1$$

Και τελικά $\frac{T}{T_0}=\sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2n^2}}$.

ΑΣΚΗΣΗ 6.19

Ένα ταλαντούμενο σύστημα περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση $x''+4x'+4x=0$. Υπολογίστε τις συναρτήσεις της θέσης και της ταχύτητας εάν $x(0)=1,\quad \upsilon(0)=0$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $\lambda^2+4\lambda+4=0$ ή $(\lambda+2)^2=0$ οπότε έχει μία διπλή ρίζα. $\lambda_1=\lambda_2=-2$. Το σύστημα χαρακτηρίζεται από κρίσιμη απόσβεση.

Στην περίπτωση που η χαρακτηριστική εξίσωση έχει διπλή ρίζα η λύση της διαφορική εξίσωσης είναι: $x(t)=A\cdot e^{-2t}+B\cdot t\cdot e^{-2t}$

Με παραγώγιση προκύπτει η συνάρτηση της ταχύτητας:

$$\upsilon(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -2 \cdot A \cdot e^{-2t} + B \cdot e^{-2t} - 2 \cdot B \cdot t \cdot e^{-2t}$$

Αρχικές συνθήκες:

$\upsilon(0) = 0 \Rightarrow -2 \cdot A + B = 0$ και

$x(0) = 1 \Rightarrow A = 1$ οπότε $B = 2$, τελικά:

$$x(t) = e^{-2t} + 2 \cdot t \cdot e^{-2t}$$

$$\upsilon(t) = -2 \cdot e^{-2t} + 2 \cdot e^{-2t} - 4 \cdot t \cdot e^{-2t} = -4 \cdot t \cdot e^{-2t}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6.20

Ένα ταλαντούμενο σύστημα περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση $x''+4x'+3x = 0$. Υπολογίστε τις συναρτήσεις της θέσης και της ταχύτητας εάν $x(0) = 1, \quad \upsilon(0) = 0$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$, $\Delta = 4$ και $\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -3$. Το σύστημα χαρακτηρίζεται από υπέρ-απόσβεση.

Η λύση της διαφορική εξίσωσης είναι: $x(t) = A \cdot e^{-t} + B \cdot e^{-3t}$

Με παραγώγιση προκύπτει η συνάρτηση της ταχύτητας:

$$\upsilon(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A \cdot e^{-t} - 3 \cdot B \cdot e^{-3t}$$

Αρχικές συνθήκες:

$\upsilon(0) = 0 \Rightarrow -A - 3 \cdot B = 0$ και

$x(0) = 1 \Rightarrow A + B = 1$ οπότε $A = \frac{3}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$, τελικά:

$$x(t) = \frac{3}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} \cdot e^{-3t}$$

$$\upsilon(t) = -\frac{3}{2} \cdot e^{-t} + \frac{3}{2} \cdot e^{-3t}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6.21 :

Ένα σώμα μάζας $m = 0{,}1kgr$ έχει προσαρτηθεί στην άκρη ενός ελατηρίου σταθεράς $k = 40\dfrac{Nt}{m}$. Κατά την κίνησή του το σώμα δέχεται δύναμη τριβής της μορφής $F_{\text{ΤΡ}} = -b \cdot \upsilon$ όπου υ η ταχύτητά του. Να γράψετε τη διαφορική εξίσωση που διέπει την κίνηση του σώματος και να υπολογίσετε την θέση του σώματος $x(t)$ συναρτήσει του χρόνου εάν $x(0) = 2m, \quad \upsilon(0) = 0$ για τις ακόλουθες περιπτώσεις α) $F_{\text{ΤΡ}} = -2{,}4 \cdot \upsilon$, β) $F_{\text{ΤΡ}} = -4 \cdot \upsilon$ και γ) $F_{\text{ΤΡ}} = -5 \cdot \upsilon$.

ΛΥΣΗ:

Σε όλες τις περιπτώσεις το σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με απόσβεση. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι: $F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = -kx$, $F_{\text{ΤΡ}} = -b \cdot \upsilon$, οπότε η εξίσωση $\Sigma F = m \cdot a$ θα γίνεται:

$F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} + F_{\text{ΤΡ}} = m \cdot a$ ή $-kx - b\upsilon = m \cdot a$ ή $-kx - bx' = m \cdot x''$

$mx'' + bx' + kx = 0$

$x'' + \dfrac{b}{m}x' + \dfrac{k}{m}x = 0$ στην διαφορική εξίσωση εισάγουμε τις αντικαταστάσεις: $\gamma = \dfrac{b}{2m}$ και $\dfrac{k}{m} = \omega_0{}^2$ οπότε παίρνει τη μορφή: $x'' + 2\gamma x' + \omega_0{}^2 x = 0$ που είναι μία ομογενής διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής είναι: $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0{}^2 = 0$, όπου $\omega_0{}^2 = \dfrac{k}{m} = \dfrac{40}{0{,}1} = 400 = 20^2 \dfrac{1}{\sec^2}$

α) $F_{\text{ΤΡ}} = -2{,}4 \cdot \upsilon$ οπότε $\gamma = \dfrac{b}{2m} = \dfrac{2{,}4}{2 \cdot 0{,}1} = 12\dfrac{1}{\sec}$

$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2{}_0}$ είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Αλλά $\gamma^2 - \omega^2{}_0 = 12^2 - 20^2 = 144 - 400 = -256 < 0$ οπότε το σώμα κάνει ταλάντωση με μικρή απόσβεση. Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι: $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\underbrace{\sqrt{\omega^2{}_0 - \gamma^2}}_{\omega} = -12 \pm i16$ δηλαδή η κυκλική συχνότητα ταλάντωσης είναι: $\omega = 16 rad/\sec$.

$x(t) = A \cdot e^{-12t} \cdot \cos(16t + \phi)$

$\upsilon(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = -12A \cdot e^{-12t} \cdot \cos(16t + \phi) - A \cdot e^{-12t} \cdot 16 \cdot \sin(\sqrt{3}t + \phi)$

Εφαρμογή των αρχικών συνθηκών:

$$\upsilon(0)=0 \Rightarrow -12A\cdot\cos\phi - A\cdot 16\cdot\sin\phi = 0 \Rightarrow \tan\phi = -\frac{3}{4}$$

$$\arctan\left(\frac{3}{4}\right) \approx 36^0 = \frac{36}{360}\cdot 2\pi(rad) = \frac{\pi}{5}rad$$

Γενικά $\phi = \kappa\pi - \dfrac{\pi}{5}$, εδώ $\phi = -\dfrac{\pi}{5}$

$x(0)=2 \Rightarrow \mathrm{A}\cdot\cos\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)=2 \Rightarrow A=\dfrac{2}{\cos(\pi/5)}=\dfrac{2}{0{,}81}=2{,}5m$ οπότε:

$$x(t)=2{,}5\cdot e^{-12t}\cdot\cos\left(16t-\frac{\pi}{5}\right)$$

β) $F_{\text{ΤΡ}} = -4\cdot\upsilon$ οπότε $\gamma = \dfrac{b}{2m} = \dfrac{4}{2\cdot 0{,}1} = 20\dfrac{1}{\sec}$

$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2{}_0}$ είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Αλλά $\gamma^2 - \omega^2{}_0 = 20^2 - 20^2 = 0$ οπότε το σώμα κινείται με κρίσιμη απόσβεση. Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma = -20$.

Στην περίπτωση που η χαρακτηριστική εξίσωση έχει διπλή ρίζα η λύση της διαφορική εξίσωσης είναι: $x(t) = A\cdot e^{-20t} + B\cdot t\cdot e^{-20t}$

Με παραγώγιση προκύπτει η συνάρτηση της ταχύτητας:

$$\upsilon(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -20\cdot A\cdot e^{-20t} + B\cdot e^{-20t} - 20\cdot B\cdot t\cdot e^{-20t}$$

Αρχικές συνθήκες:

$\upsilon(0)=0 \Rightarrow -20\cdot A + B = 0$ και

$x(0)=2 \Rightarrow A=2$ οπότε $B=40$, τελικά:

$$x(t) = 2\cdot e^{-20t} + 40\cdot t\cdot e^{-20t}$$

γ) $F_{\text{ΤΡ}} = -5\cdot\upsilon$ οπότε $\gamma = \dfrac{b}{2m} = \dfrac{5}{2\cdot 0{,}1} = 25\dfrac{1}{\sec}$

$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2{}_0}$ είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Αλλά $\gamma^2 - \omega^2{}_0 = 25^2 - 20^2 = 625 - 400 = 15^2$ οπότε το σώμα κινείται με υπερ-απόσβεση. Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι:

$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2{}_0} = -25 \pm 15$ από όπου προκύπτουν δύο ρίζες αρνητικές και άνισες

$$\begin{cases} \lambda_1 = -10 \\ \lambda_2 = -40 \end{cases}$$

Η λύση της διαφορική εξίσωσης είναι: $x(t) = A \cdot e^{-10t} + B \cdot e^{-40t}$

Με παραγώγιση προκύπτει η συνάρτηση της ταχύτητας:

$$\upsilon(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -10A \cdot e^{-10t} - 40 \cdot B \cdot e^{-40t}$$

Αρχικές συνθήκες:

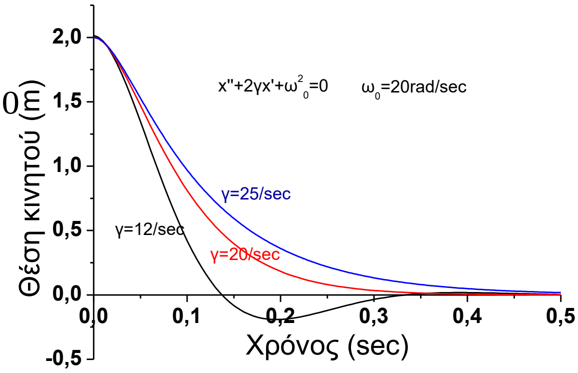
$\upsilon(0) = 0 \Rightarrow -10A - 40B = 0 \Rightarrow A + 4B = 0$

και

$x(0) = 2 \Rightarrow A + B = 2$ οπότε

$A = \frac{8}{3} \quad B = -\frac{2}{3}$, τελικά:

$$x(t) = \frac{8}{3} e^{-10t} - \frac{2}{3} \cdot e^{-40t}$$



ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ 6.22

Ένα σώμα μάζας $m = 0{,}1kgr$ έχει προσδεθεί στην άκρη ενός ελατηρίου σταθεράς $k = 160Nt/m$ και ταλαντώνεται πάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Να βρεθεί η εξίσωση της θέσης του σώματος συναρτήσει του χρόνου όταν: α) Δεν υπάρχουν δυνάμεις απόσβεσης και $\{x(0) = 0 \quad \upsilon(0) = 40cm/\sec\}$, β) Εάν το σύστημα δέχεται δύναμη απόσβεσης $F_{\text{ΑΠΟΣΒ}} = -8 \cdot \upsilon$ και $\{x(0) = 2cm \quad \upsilon(0) = -76cm/\sec\}$. γ) Εάν το σύστημα δέχεται δύναμη απόσβεσης $F_{\text{ΑΠΟΣΒ}} = -2\upsilon$ και αρμονική δύναμη διέγερσης $F_{\text{ΔΙΕΓΕΡ}} = 5 \cdot \cos 50t$ (στην μόνιμη κατάσταση).

Λύση:

α) $\omega^2{}_0 = \dfrac{k}{m} = \dfrac{160}{0{,}1} = 1600 \Rightarrow \omega_0 = 40\dfrac{rad}{\sec}$

$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)$, $\upsilon(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = -A \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \phi)$

Εφαρμογή των αρχικών συνθηκών.

$x(0) = 0 \Rightarrow A \cdot \cos(\phi) = 0 \Rightarrow \phi = \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$ επειδή $\upsilon(0) > 0$

οπότε $x(t) = A \cdot \sin(40t)$

$$\left.\begin{cases} \upsilon(0) = 0{,}4 \Rightarrow -A \cdot 40 \cdot \underbrace{\sin\left(\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)}_{1} = 0{,}4 \\ \kappa = 1{,}3{,}5{,}\ldots \end{cases}\right\} \Rightarrow A = 0{,}01m$$

οπότε: $x(t) = 0{,}01 \cdot \sin(40t)$

β) $F_{\text{ΤΡ}} = -8 \cdot \upsilon$ οπότε $\gamma = \dfrac{b}{2m} = \dfrac{8}{2 \cdot 0{,}1} = 40\dfrac{1}{\sec}$

$x'' + 2\gamma x' + \omega_0{}^2 x = 0$ και αντικαθιστώντας $x'' + 2 \cdot 40x' + 40^2 \cdot x = 0$ οπότε η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής είναι $\lambda^2 + 2 \cdot 40\lambda + 40^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2{}_0}$ είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Αλλά $\gamma^2 - \omega^2{}_0 = 40^2 - 40^2 = 0$ οπότε το σώμα κινείται με κρίσιμη απόσβεση. Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma = -40$.

Στην περίπτωση που η χαρακτηριστική εξίσωση έχει διπλή ρίζα η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι: $x(t) = A \cdot e^{-40t} + B \cdot t \cdot e^{-40t}$

Με παραγώγιση προκύπτει η συνάρτηση της ταχύτητας:

$$\upsilon(t)=\frac{dx(t)}{dt}=-40\cdot A\cdot e^{-40t}+B\cdot e^{-40t}-40\cdot B\cdot t\cdot e^{-40t}$$

Αρχικές συνθήκες:

$x(0)=0{,}02m\Rightarrow A=0{,}02$

$\upsilon(0)=-0{,}76m/\sec\Rightarrow -40\cdot A+B=-0{,}76$ και

οπότε $B=0{,}04$, τελικά:

$x(t)=\left(0{,}02\cdot e^{-40t}+0{,}04\cdot t\cdot e^{-40t}\right)m$

γ) Όταν εφαρμόζεται δύναμη διέγερσης η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την εξίσωση του συστήματος γίνεται: $x''+2\gamma x'+\omega_0{}^2x=F_0\cdot\cos\omega t$ και αντικαθιστώντας $x''+2\cdot 40x'+40^2\cdot x=5\cdot\cos 50t$ και το σύστημα ταλαντώνεται με την κυκλική συχνότητα του διεγέρτη δηλαδή $\omega=50rad/\sec$.

Στην περίπτωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης το πλάτος στην μόνιμη κατάσταση δεν καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες αλλά από τα $\omega,\ \omega_0,\ \gamma$: $A=\dfrac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega^2{}_0\right)^2+(2\gamma\omega)^2}}$

$$A=\frac{5/0{,}1}{\sqrt{\left(50^2-40^2\right)^2+(2\cdot 40\cdot 40)^2}}=\frac{50}{\sqrt{900^2+3200^2}}=0{,}015m$$

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{2\cdot 40\cdot 50}{50^2-40^2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{4000}{900}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{40}{9}\right)=\tan^{-1}(0{,}19)\Rightarrow\phi=0{,}43\cdot\pi rad$$

$x(t)=A\cdot\sin(\omega t-\phi)=0{,}015\cdot\sin(50t-0{,}43\pi)m$

ΑΣΚΣΗΣΗ 6.23

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει μία εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση είναι: $mx''+bx'+kx=F_0\cdot\sin(\omega\cdot t)$, όπου η εξωτερική δύναμη διέγερσης είναι $F=F_0\cdot\sin(\omega\cdot t)$. Εισάγοντας τις αντικαταστάσεις: $\gamma=\dfrac{b}{2m}$ και $\dfrac{k}{m}=\omega_0{}^2$ η εξίσωση γίνεται: $x''+2\gamma x'+\omega_0{}^2x=\dfrac{F_0}{m}\cdot\sin(\omega\cdot t)$. Το πλάτος της ταλάντωσης δίνεται από την εξίσωση: $A=\dfrac{F_0}{m}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega^2{}_0\right)^2+(2\gamma\omega)^2}}$ δηλαδή εξαρτάται από την σχέση που έχουν η ιδιοσυχνότητα ω_0 του ταλαντούμενου συστήματος και η συχνότητα ω

του διεγέρτη. α) Υπολογίστε την συχνότητα του διεγέρτη για την οποία το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο. β) Υπολογίστε την συχνότητα του διεγέρτη για την οποία το πλάτος της ταχύτητας γίνεται μέγιστο.

Λύση:

Για να είναι το πλάτος $A = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega^2{}_0\right)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$ μέγιστο θα πρέπει ο παρονομαστής να παίρνει ελάχιστη τιμή. Για αυτό αρκεί:

$\frac{d}{d\omega}\left[\left(\omega^2 - \omega^2{}_0\right)^2 + (2\gamma\omega)^2\right] = 0$ αλλά

$\frac{d}{d\omega}\left[\left(\omega^2 - \omega^2{}_0\right)^2\right] = 2\left(\omega^2 - \omega^2{}_0\right) \cdot \frac{d}{d\omega}\left(\omega^2 - \omega^2{}_0\right) = 2\left(\omega^2 - \omega^2{}_0\right) \cdot 2\omega$ και

$\frac{d}{d\omega}\left[(2\gamma\omega)^2\right] = 8\gamma^2\omega$ οπότε η εξίσωση $\frac{d}{d\omega}\left[\left(\omega^2 - \omega^2{}_0\right)^2 + (2\gamma\omega)^2\right] = 0$ γίνεται:

$2\left(\omega^2 - \omega^2{}_0\right) \cdot 2\omega + 8\gamma^2\omega = 0 \Rightarrow \left(\omega^2 - \omega^2{}_0\right) + 2\gamma^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \omega^2{}_0 - 2\gamma^2$

Η εξίσωση της κίνησης είναι $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi)$ όπου ω η κυκλική συχνότητα του διεγέρτη, ϕ ένας παράγοντας φάσης και $A = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega^2{}_0\right)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$.

Η ταχύτητα θα είναι $\upsilon(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \cdot \sin(\omega t + \phi)$, κατά συνέπεια το πλάτος της ταχύτητας θα είναι $\frac{F_0}{m} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega^2{}_0\right)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$. Για να είναι μέγιστο το πλάτος της ταχύτητας θα πρέπει να γίνει μέγιστη η ποσότητα $\frac{\omega}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega^2{}_0\right)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$, αλλά για να αποφύγουμε την ρίζα στο παρονομαστή μπορούμε να αναζητήσουμε την τιμή του ω για την οποία γίνεται μέγιστο το τετράγωνο της ίδιας ποσότητας δηλ. το $\frac{\omega^2}{\left(\omega^2 - \omega^2{}_0\right)^2 + (2\gamma\omega)^2}$. Για αυτό αρκεί: $\frac{d}{d\omega}\left[\frac{\omega^2}{\left(\omega^2 - \omega^2{}_0\right)^2 + (2\gamma\omega)^2}\right] = 0$ δηλαδή:

$\frac{2\omega\left[\left(\omega^2 - \omega^2{}_0\right)^2 + (2\gamma\omega)^2\right] - \omega^2\left[4\omega\left(\omega^2 - \omega^2{}_0\right) + 8\gamma^2\omega\right]}{\left[\left(\omega^2 - \omega^2{}_0\right)^2 + (2\gamma\omega)^2\right]^2} = 0$ ή

$2\omega\left(\omega^2 - \omega^2{}_0\right)^2 + 8\gamma^2\omega^3 - 4\omega^3\left(\omega^2 - \omega^2{}_0\right) - 8\gamma^2\omega^3 = 0$ ή

$2\omega\left(\omega^2 - \omega^2{}_0\right)\left(-\omega^2 - \omega^2{}_0\right) = 0$ οπότε η μόνη μη-μηδενική τιμή της κυκλικής συχνότητας του διεγέρτη για την οποία το πλάτος της ταχύτητας γίνεται μέγιστο είναι $\omega = \omega_0$

ΑΣΚΗΣΗ 6.24

Σε μία αρμονική ταλάντωση να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας για την περίπτωση ταλάντωσης: α) με απόσβεση β) χωρίς απόσβεση γ) με απόσβεση και εξωτερική διέγερση.

Λύση:

$$E = V + K = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}k\frac{dx^2}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}k2x\upsilon = (kx)\cdot\upsilon$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d\mathrm{K}}{d\upsilon}\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{d\upsilon^2}{d\upsilon}\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{1}{2}m2\upsilon\cdot a = (ma)\cdot\upsilon$$ οπότε:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dV}{dt} + \frac{dK}{dt} = (kx)\cdot\upsilon + (ma)\cdot\upsilon = (kx+ma)\cdot\upsilon$$

α) Στην περίπτωση της αρμονικής ταλάντωσης χωρίς απόσβεση η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση είναι $kx+ma=0$ οπότε $\frac{dE}{dt} = (kx+ma)\cdot\upsilon = 0$ η οποία λέει ότι στην περίπτωση αυτή η ενέργεια του συστήματος δεν μεταβάλλεται.

β) Στην περίπτωση της αρμονικής ταλάντωση με απόσβεση η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση είναι $ma+b\upsilon+kx=0 \Rightarrow ma+kx=-b\upsilon$ οπότε $\frac{dE}{dt} = (kx+ma)\cdot\upsilon = -(b\upsilon)\cdot\upsilon$ η οποία λέει ότι στην περίπτωση αυτή η ενέργεια του συστήματος μειώνεται και μάλιστα ο ρυθμός μείωσης της ενέργειας ισούται με την ισχύ που απορροφάται από την δύναμη απόσβεσης.

γ) Στην περίπτωση της αρμονικής ταλάντωσης με απόσβεση και αρμονική διέγερση η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση είναι $ma+b\upsilon+kx = F_0\cdot\sin\omega t \Rightarrow ma+kx = F_0\cdot\sin\omega t - b\upsilon$ οπότε:

$\frac{dE}{dt} = (kx+ma)\cdot\upsilon = \left(F_0\cdot\sin\omega t - b\upsilon\right)\cdot\upsilon$ η οποία λέει ότι στην περίπτωση αυτή ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα της ισχύος που προσφέρει στο σύστημα η διεγείρουσα δύναμη και της ισχύος που απορροφάται από την δύναμη απόσβεσης.

ΑΣΚΗΣΗ 6.25

Σώμα μάζας $m = 25kgr$ εξαρτάται από κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 100Nt/m$. Το σώμα δέχεται εξωτερική δύναμη $F(t) = 150\cdot\cos5t(Nt)$ και τριβή

$T = -20\upsilon(Nt)$ όπου υ η ταχύτητα. Να υπολογιστούν: α) Η συχνότητα κα το πλάτος στη μόνιμη κατάσταση και β) Η συνάρτηση της απομάκρυνσης $x(t)$.

Λύση:

Στην μόνιμη κατάσταση, δηλαδή όταν έχουν εκπνεύσει τα μεταβατικά φαινόμενα, η συχνότητα του ταλαντούμενου συστήματος είναι ίδια με την συχνότητα του διεγέρτη.

$F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = -kx = -100x$, $F_{\mathrm{TP}} = -b\cdot\upsilon = -20\upsilon$, $F_{\mathrm{\Delta IE\Gamma EP}} = 150\cdot\cos 5t$

$\Sigma F = m\cdot a$

$F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} + F_{\mathrm{TP}} + F_{\mathrm{\Delta IE\Gamma EP}} = m\cdot a$ ή $-kx - b\upsilon + F_0\cos\omega t = m\cdot a$

ή $-kx - bx' + F_0\cos\omega t = m\cdot x''$

$mx'' + bx' + kx = F_0\cos\omega t$ ή $x'' + \frac{b}{m}x' + \frac{k}{m}x = F_0\cos\omega t$

Αντικαθιστώντας $\begin{cases} \frac{b}{2m} = \gamma \\ \frac{k}{m} = \omega^2{}_0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} \gamma = \frac{20}{50} = 0{,}4\left(\frac{1}{\sec}\right) \\ \omega^2{}_0 = \frac{100}{25} = 4\left(\frac{1}{\sec^2}\right) \end{cases}$ γίνεται:

$x'' + 2\gamma x' + \omega^2{}_0 x = F_0\cos\omega t$ ή $x'' + 0{,}8x' + 4x = 150\cos 5t$

$x(t) = A\cdot\cos(\omega_0 t + \phi)$

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι: $A = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega^2{}_0\right)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$

$$A = \frac{150/25}{\sqrt{\left(5^2 - 2^2\right)^2 + (2\cdot 0{,}4\cdot 5)^2}} = \frac{6}{\sqrt{21^2 + 4^2}} = \frac{6}{\sqrt{457}} = 0{,}28m$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega^2{}_0}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\cdot 0{,}4\cdot 5}{5^2 - 2^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{21}\right) = \tan^{-1}(0{,}19) \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{18}rad$$

ΑΣΚΗΣΗ 6.26

Ένα σύστημα ελατηρίου-μάζας εκτελεί κίνηση με κρίσιμη απόσβεση. Αν $x(0) = 0$ και $\upsilon(0) = \upsilon_0 \neq 0$, α) Να υπολογιστεί η συνάρτηση της θέσης του σώματος συναρτήσει του χρόνου και β) Να βρεθεί η χρονική στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα. Ποια είναι τότε η θέση του κινητού;

Λύση:

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του συστήματος είναι: $mx'' + bx' + kx = 0$ ή

$x'' + \frac{b}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$ Αντικαθιστώντας: $\gamma = \frac{b}{2m}$ και $\frac{k}{m} = \omega_0^{\ 2}$ παίρνει τη μορφή: $x'' + 2\gamma x' + \omega_0^{\ 2} x = 0$ που είναι μία ομογενής διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής είναι: $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^{\ 2} = 0$. Το σύστημα εκτελεί κίνηση με κρίσιμη απόσβεση όταν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει $\Delta = 0$ δηλαδή διπλή ρίζα οπότε η λύση της διαφορική εξίσωσης είναι: $x(t) = A \cdot e^{-\gamma t} + B \cdot t \cdot e^{-\gamma t}$

Με παραγώγιση προκύπτει η συνάρτηση της ταχύτητας:

$$\upsilon(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\gamma \cdot A \cdot e^{-\gamma t} + B \cdot e^{-\gamma t} - \gamma \cdot B \cdot t \cdot e^{-\gamma t}$$

Αρχικές συνθήκες:

$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0$ οπότε $x(t) = B \cdot t \cdot e^{-\gamma t}$

$\upsilon(0) = \upsilon_0 \Rightarrow B = \upsilon_0$ τελικά: $x(t) = \upsilon_0 \cdot t \cdot e^{-\gamma t}$

β) Μετά τον προσδιορισμό των σταθερών από τις αρχικές συνθήκες, η ταχύτητα είναι: $\upsilon(t) = \upsilon_0 \cdot e^{-\gamma t} - \gamma \cdot \upsilon_0 \cdot t \cdot e^{-\gamma t}$ ή $\upsilon(t) = \upsilon_0 \cdot e^{-\gamma t}\left(1 - \gamma \cdot t\right)$.

$\upsilon = 0$ όταν $1 - \gamma \cdot t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{\gamma}$. Σε αυτή η χρονική στιγμή $x(t) = \upsilon_0 \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot e^{-\gamma\frac{1}{\gamma}}$ ή

$x(t) = \frac{\upsilon_0}{\gamma} \cdot e^{-1}$.

ΑΣΚΗΣΗ 6.27

Ένα σύστημα ελατηρίου-μάζας εκτελεί κίνηση με κρίσιμη απόσβεση. Αν $x(0) = x_0$ και $\upsilon(0) = \upsilon_0 \neq 0$, α) Να υπολογιστεί η συνάρτηση της θέσης του σώματος συναρτήσει του χρόνου και β) Αν $\upsilon_0 = -2\omega_0 \cdot x_0$ Να βρεθεί ότι το σύστημα διέρχεται από την θέση ισορροπίας μία φορά, να υπολογιστεί η χρονική στιγμή που συμβαίνει αυτό καθώς και η ταχύτητα διέλευσης.

Λύση:

α) Επειδή το σύστημα εκτελεί κίνηση με κρίσιμη απόσβεση η συνάρτηση της θέσης του σώματος είναι: $x(t) = A \cdot e^{-\gamma t} + B \cdot t \cdot e^{-\gamma t}$

Με παραγώγιση προκύπτει η συνάρτηση της ταχύτητας:

$$\upsilon(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\gamma \cdot A \cdot e^{-\gamma t} + B \cdot e^{-\gamma t} - \gamma \cdot B \cdot t \cdot e^{-\gamma t}$$

Αρχικές συνθήκες:

$x(0) = x_0 \Rightarrow A = x_0$

$\upsilon(0) = \upsilon_0 \Rightarrow -\gamma \cdot x_0 + B = \upsilon_0 \Rightarrow B = \upsilon_0 + \gamma \cdot x_0$

τελικά: $x(t) = x_0 \cdot e^{-\gamma t} + (\upsilon_0 + x_0 \cdot \gamma) \cdot t \cdot e^{-\gamma t}$

β) Εισάγουμε την σχέση $\upsilon_0 = -2\omega_0 \cdot x_0$ στην εξίσωση $x(t) = x_0 \cdot e^{-\gamma t} + (\upsilon_0 + x_0 \cdot \gamma) \cdot t \cdot e^{-\gamma t}$ οπότε προκύπτει:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\gamma t} + \underbrace{(-2\omega_0 \cdot x_0 + x_0 \cdot \omega_0)}_{-x_0 \cdot \omega_0} \cdot t \cdot e^{-\gamma t}$$

$x(t) = x_0 \cdot (1 - \omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\gamma t}$. Όταν το σώμα περνάει από το σημείο ισορροπίας $x(t) = 0$ ή $t = \dfrac{1}{\omega_0}$

Υπολογισμός της ταχύτητας διέλευσης

$$\upsilon(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\gamma \cdot A \cdot e^{-\gamma t} + B \cdot e^{-\gamma t} - \gamma \cdot B \cdot t \cdot e^{-\gamma t}$$

εισάγουμε τις τιμές των σταθερών A, B

$$\upsilon(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\gamma \cdot x_0 \cdot e^{-\gamma t} + (\upsilon_0 + \gamma \cdot x_0) \cdot e^{-\gamma t} - \gamma \cdot (\upsilon_0 + \gamma \cdot x_0) \cdot t \cdot e^{-\gamma t}$$

αντικαθιστούμε την τιμή του χρόνου $t = \dfrac{1}{\omega_0}$ και αντικαθιστούμε $\omega_0 = \gamma$

και προκύπτει $\upsilon(t) = -\dfrac{\omega_0 \cdot x_0}{e}$.