



# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ & ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2018-2019

## ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ

Διδάσκοντες: Βαρσάμης Χρήστος, Φωτόπουλος Παναγιώτης

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες

### ΘΕΜΑ 1

Υλικό σημείο κινείται ευθύγραμμα πάνω στον άξονα  $x$  με ταχύτητα,  $v(t)$ , που δίνεται από τη σχέση  $v(t) = At^3 + Bt^2$ , όπου  $A, B$  σταθερές. Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  s το σημείο βρίσκεται στην αρχή των αξόνων ενώ τη χρονική στιγμή  $t = 1$  s,  $\alpha(1) = 0$  με την ταχύτητά του να είναι  $v(1) = 2 \frac{m}{s}$ .

**α)** Να υπολογίσετε σε συνάρτηση με το χρόνο  $t$  την επιτάχυνση,  $\alpha(t)$ , και τη θέση,  $x(t)$ . (1 μονάδα)

**β)** Να προσδιορίσετε τη διάσταση των σταθερών  $A, B$ . (0.5 μονάδα)

**γ)** Να δείξετε ότι ισχύει το θεώρημα ορμής-ώθησης για το χρονικό διάστημα  $[0, t_1]$ . (0.5 μονάδα)

**δ)** Να υπολογίσετε τη μέση επιτάχυνση για το χρονικό διάστημα  $[0, 1]$ s. (0.5 μονάδα)

### ΑΠΑΝΤΗΣΗ

**α)** η επιτάχυνση,  $\alpha(t)$ , είναι:

$$\alpha(t) = \frac{dv}{dt} = 3At^2 + 2Bt \quad (1)$$

ενώ η θέση,  $x(t)$ , δίνεται από ( $x(0) = 0$  και  $v(0) = 0$ ):

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t vdt \Rightarrow x = \int_0^t (At^3 + Bt^2)dt = A \frac{t^4}{4} + B \frac{t^3}{3} \quad (2)$$

από την εκφώνηση, οι τιμές των σταθερών  $A, B$  υπολογίζονται ως εξής:

$$v(1) = 2 \frac{m}{s} \Rightarrow A + B = 2 \quad (3)$$

$$\alpha(1) = 0 \Rightarrow 3A + 2B = 0 \quad (4)$$

και επιλύοντας το σύστημα των σχέσεων (3) και (4) έχουμε:

$$A = -4 \quad B = 6$$

Τελικά, έχουμε ότι:

$$\alpha(t) = -12t^2 + 12t$$



# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ & ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

$$x(t) = -t^4 + 2t^3$$

**β)** Για τη διάσταση των σταθερών  $A, B$  ισχύει:

$$[A] = \frac{[v]}{[t]^3} = LT^{-4} \quad [B] = \frac{[v]}{[t]^2} = LT^{-3}$$

**γ)** το θεώρημα ορμής-ώθησης για το χρονικό διάστημα  $[0, t_1]$  γράφεται:

$$\int_0^{t_1} F dt = mv(t_1) - mv(0)$$

Το αριστερό μέλος είναι:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} F dt &= \int_0^{t_1} madt = \int_0^{t_1} m(-12t^2 + 12t)dt = -12m \frac{t_1^3}{3} + 12m \frac{t_1^2}{2} \\ &= m(-4t_1^3 + 6t_1^2) \end{aligned}$$

Το δεξί μέλος είναι:

$$mv(t_1) - mv(0) = m(-4t_1^3 + 6t_1^2)$$

οπότε το θεώρημα ορμής-ώθησης ισχύει.

**δ)** η μέση επιτάχυνση για το χρονικό διάστημα  $[0,1]s$  δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{a} = \frac{\alpha(1) - \alpha(0)}{1 - 0} = \frac{0}{1} = 0 \frac{m}{s^2}$$

## ΘΕΜΑ 2

Σώμα μάζας  $m = 1Kg$  κινείται υπό την επίδραση συντηρητικής δύναμης  $F(x) = -4x^3 + 4x$ , σε  $N$ , όπου  $x$  η θέση του σώματος σε  $m$ .

**α)** να προσδιορίσετε τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας,  $U(x)$ , αν  $U(0) = 0$ .

(0.5 μονάδα)

**β)** να βρείτε τις θέσεις ισορροπίας και να προσδιορίσετε το είδος τους. (1.5 μονάδα)

**γ)** τι ταχύτητα πρέπει να έχει το σώμα στη θέση  $x = 1 m$  για να φθάσει ακίνητο στην αρχή των αξόνων; (0.5 μονάδα)

## ΑΠΑΝΤΗΣΗ

**α)** Η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι:

$$F = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow dU = -Fdx \Rightarrow \int_0^U dU = -\int_0^x Fdx \Rightarrow U(x) = x^4 - 2x^2 \quad (1)$$

**β)** οι θέσεις ισορροπίας βρίσκονται στα σημεία όπου  $U'(x) = 0$ :

$$\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow 4x(x + 1)(x - 1) = 0$$

δηλαδή είναι τα σημεία:

$$x = 0 \qquad x = -1m \qquad x = 1m$$

Για να προσδιορίσουμε το είδος των θέσεων ισορροπίας υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο,  $\frac{d^2U}{dx^2}$ :

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 12x^2 - 4$$

και βλέπουμε ότι:

$$U''(0) = -4 < 0 \qquad U''(1) = U''(-1) = 8 > 0$$

οπότε έχουμε ότι:

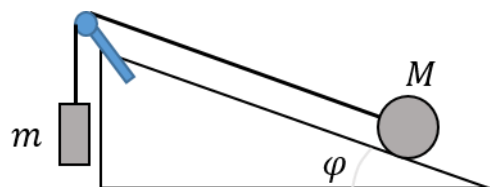
$$x = 0: \text{ ασταθής ισορροπία} \qquad x = -1m, x = 1m: \text{ ευσταθής ισορροπία}$$

**γ)** στη θέση  $x = 1m$  η δυναμική ενέργεια είναι  $U(1) = -1J$ , ενώ στη θέση  $x = 0m$  η δυναμική ενέργεια είναι  $U(0) = 0J$ . Επομένως, για να φθάσει το σώμα ακίνητο στην αρχή των αξόνων θα πρέπει στη θέση  $x = 1m$  να έχει κινητική ενέργεια ίση με  $1J$ . Άρα:

$$\frac{1}{2}mv^2 = 1J \Rightarrow v = \sqrt{2} \frac{m}{s}$$

### ΘΕΜΑ 3

Ομογενής κύλινδρος μάζας  $M = 2Kg$  και ακτίνας  $R = 10cm$  ηρεμεί πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης  $\varphi = 30^\circ$ . Ιδανικό νήμα (μη εκτατό και αμελητέας μάζας) είναι δεμένο στο κέντρο μάζας του κυλίνδρου και από την άλλη του άκρη κρέμεται σώμα μάζας  $m$ . Η τροχαλία στην εικόνα θεωρείται ιδανική, με αμελητέα μάζα και χωρίς τριβές. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου είναι  $\mu_s = \frac{\sqrt{3}}{4}$  και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του είναι  $I = \frac{1}{2}MR^2$ . Ο κύλινδρος αρχίζει να κινείται προς τα πάνω.



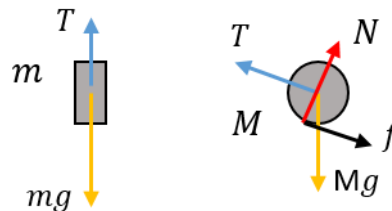
**α)** να δώσετε τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος για τον κύλινδρο και το σώμα μάζας  $m$ . (0.5 μονάδα)

**β)** να γράψετε τις εξισώσεις της δυναμικής για τον κύλινδρο και τη μάζα για τη μεταφορική και την περιστροφική κίνηση. (1 μονάδα)

**γ)** να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της μάζας  $m$  για την οποία ο κύλινδρος ανεβαίνει με κύλιση χωρίς ολίσθηση. (1 μονάδα)

### ΑΠΑΝΤΗΣΗ

**α)** τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος είναι:



όπου:  $T$  η τάση του νήματος,  $N$  η αντίδραση από το επίπεδο και  $f$  η τριβή η οποία γίνεται στατική για κύλιση χωρίς ολίσθηση.

**β)** ο κύλινδρος εκτελεί μεταφορική και περιστροφική κίνηση. Οι εξισώσεις της δυναμικής είναι:

$$\text{μεταφορά: } T - f - Mgsin\varphi = Ma \quad (1)$$

$$\text{περιστροφή: } Rf = Ia_\gamma \quad (2)$$

Το σώμα μάζας  $m$  κάνει μόνο μεταφορική κίνηση:

$$mg - T = ma \quad (3)$$

Η επιτάχυνση των δύο σωμάτων είναι κοινή επειδή το νήμα είναι ιδανικό.

**γ)** προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (3) λαμβάνουμε:

$$mg - f - Mgsin\varphi = (M + m)a \Rightarrow a = \frac{mg - f - Mgsin\varphi}{M + m} \quad (4)$$

Επιλύοντας την εξίσωση (3) ως προς τη γωνιακή ταχύτητα έχουμε:

$$\alpha_\gamma = \frac{Rf}{I} = \frac{Rf}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{2f}{MR} \quad (5)$$

Για να έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση θα πρέπει να ισχύει:

$$v = \omega R \quad (6)$$



# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ & ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

και από τις σχέσεις (4) και (5) διαπιστώνουμε ότι  $\alpha$ ,  $\alpha_\gamma$  είναι σταθερές οπότε:

$v = \alpha t$  και  $\omega = \alpha_\gamma t$  και η σχέση (6) δίνει:

$$\alpha = \alpha_\gamma R \Rightarrow \frac{mg - f - Mgsin\varphi}{M + m} = \frac{2f}{M}$$

Επιλύοντας ως προς τη μάζα,  $m$ :

$$m = \frac{3fM + M^2 g \sin\varphi}{Mg - 2f} \quad (7)$$

Η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής είναι:

$$f^{max} = \mu Mg \cos\varphi$$

και εισάγοντας την τιμή αυτή στην εξίσωση (7) παίρνουμε την ανισότητα:

$$m \leq \frac{3\mu Mg \cos\varphi M + M^2 g \sin\varphi}{Mg - 2\mu Mg \cos\varphi} = \frac{3\mu M \cos\varphi + M \sin\varphi}{1 - 2\mu \cos\varphi}$$

Η αριθμητική αντικατάσταση δίνει:

$$m \leq \frac{3 \frac{\sqrt{3}}{4} 2 \frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{1 - 2 \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\sqrt{3}}{2}} Kg = \frac{9}{4} + 1 \frac{1}{4} Kg = 13Kg$$

## ΘΕΜΑ 4

Ελεύθερος αρμονικός ταλαντωτής με τριβή περιγράφεται στο S.I. από τη διαφορική εξίσωση  $x'' + 3x' + 2x = 0$ .

**α)** Να υπολογίσετε τη φυσική κυκλική συχνότητα του ταλαντωτή και το είδος της απόσβεσης. (0.5 μονάδα)

**β)** Να υπολογίσετε τη θέση του ταλαντωτή σε συνάρτηση με το χρόνο,  $x(t)$ , αν τη χρονική στιγμή  $t = 0$  s η θέση και η ταχύτητά του είναι  $x(0) = 0$  και  $v(0) = -1 \frac{m}{s}$ , αντίστοιχα. (1.5 μονάδα)

**γ)** Για ποια χρονική στιγμή η θέση αποκτά την ελάχιστη τιμή της; (0.5 μονάδα)

## ΑΠΑΝΤΗΣΗ

**α)** από τη διαφορική εξίσωση έχουμε ότι:



# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ & ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

---

$$\omega_0^2 = 2 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Επίσης:

$$2\gamma = 3 \Rightarrow \gamma = 1.5\text{s}^{-1}$$

Δεδομένου ότι:  $\gamma > \omega_0$  έχουμε ισχυρή απόσβεση.

**Εναλλακτικά:** το χαρακτηριστικό τριώνυμο της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$\rho^2 + 3\rho + 2 = 0$$

με διακρίνουσα:

$$\Delta = 9 - 8 = 1 \neq 0 \text{ και πραγματικός}$$

οπότε έχουμε ισχυρή απόσβεση.

**β)** οι ρίζες του χαρακτηριστικού τριωνύμου είναι:

$$\rho_1 = -1 \text{ και } \rho_2 = -2$$

άρα η θέση του ταλαντωτή σε συνάρτηση με το χρόνο,  $x(t)$ , θα είναι:

$$x(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}$$

Τη χρονική στιγμή  $t = 0 \text{ s}$  η θέση είναι  $x(0) = 0$ :

$$A + B = 0$$

και η ταχύτητά του  $v(0) = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ :

$$-A - 2B = -1$$

Επιλύοντας το σύστημα βρίσκουμε ότι:

$$A = -1, B = 1$$

Τελικά:

$$x(t) = -e^{-t} + e^{-2t}$$

**γ)** η θέση αποκτά την ελάχιστη τιμή της όταν:

$$x'(t) = 0 \Rightarrow e^{-t} - 2e^{-2t} = 0 \Rightarrow e^{-t}(1 - 2e^{-t}) = 0 \Rightarrow 2e^{-t} = 1 \Rightarrow t = \ln 2 \text{ s}$$