ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ & ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2018-2019

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ, 8 Μαρτίου 2019

Διδάσκοντες: Βαρσάμης Χρήστος, Φωτόπουλος Παναγιώτης

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες

ΘΕΜΑ 1

Υλικό σημείο κινείται ευθύγραμμα πάνω στον άξονα x με ταχύτητα $\upsilon(t)$, που δίνεται από τη σχέση $\upsilon(t) = At^4 - Bt^2$, όπου A, B σταθερές. Τη χρονική στιγμή $t = 0\ s$ το υλικό σημείο βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, ενώ τη χρονική στιγμή $t = 1\ s$ η επιτάχυνση είναι ίση με το μηδέν $\alpha(1) = 0$ και η ταχύτητά του να είναι $\upsilon(1) = -1\frac{m}{s}$.

α) Να υπολογίσετε, σε συνάρτηση με το χρόνο t, την επιτάχυνση $\alpha(t)$ και τη θέση $x(t)$. (1 μονάδα)

β) Να προσδιορίσετε τις διαστάσεις των σταθερών A, B. (0.5 μονάδα)

γ) Να δείξετε ότι ισχύει το θεώρημα ορμής-ώθησης για το χρονικό διάστημα $[0, t_1]$. (0.5 μονάδα)

δ) Να υπολογίσετε τη μέση επιτάχυνση για το χρονικό διάστημα $[0,1]s$. (0.5 μονάδα)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) η επιτάχυνση, $\alpha(t)$, είναι:

$$\alpha(t) = \frac{d\upsilon}{dt} = 4At^3 - 2Bt \tag{1}$$

ενώ η θέση, $x(t)$, δίνεται από ($x(0) = 0$ και $\upsilon(0) = 0$):

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \upsilon dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \upsilon dt \Rightarrow x = \int_0^t (At^4 - Bt^2)dt = A\frac{t^5}{5} - B\frac{t^3}{3} \tag{2}$$

από την εκφώνηση, οι τιμές των σταθερών A, B υπολογίζονται ως εξής:

$$\upsilon(1) = -1\frac{m}{s} \Rightarrow A - B = -1 \tag{3}$$

$$\alpha(1) = 0 \Rightarrow 4A - 2B = 0 \tag{4}$$

και επιλύοντας το σύστημα των σχέσεων (3) και (4) έχουμε:

$A = 1$ $\qquad\qquad$ $B = 2$

Τελικά, έχουμε ότι:

$$\alpha(t) = 4t^3 - 4t$$

$$x(t) = \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^3}{3}$$

β) Για τη διάσταση των σταθερών A, B ισχύει:
$[A] = \frac{[v]}{[t]^4} = \frac{L}{T^5}$ $\qquad$ $[B] = \frac{[v]}{[t]^2} = \frac{L}{T^3}$

γ) το θεώρημα ορμής-ώθησης για το χρονικό διάστημα $[0, t_1]$ γράφεται:

$$\int_0^{t_1} F dt = mv(t_1) - mv(0)$$

Το αριστερό μέλος είναι:

$$\int_0^{t_1} F dt = \int_0^{t_1} madt = \int_0^{t_1} m(4t^3 - 4t)dt = 4m\frac{t_1^4}{4} - 4m\frac{t_1^2}{2} = m(t_1^4 - 2t_1^2)$$

Το δεξί μέλος είναι:

$$mv(t_1) - mv(0) = m(t_1^4 - 2t_1^2)$$

οπότε το θεώρημα ορμής-ώθησης ισχύει.

δ) η μέση επιτάχυνση για το χρονικό διάστημα $[0,1]s$ δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha(1) - \alpha(0)}{1 - 0} = \frac{0}{1} = 0\frac{m}{s^2}$$

ΘΕΜΑ 2

Σώμα μάζας $m = 2Kg$ κινείται υπό την επίδραση συντηρητικής δύναμης $F(x) = 36x - 16x^3$. Για $x = 0$ η δυναμική του ενέργεια παίρνει την τιμή $U(0) = 1Joule$
α) να προσδιορίσετε τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας, $U(x)$. (0,5 μονάδα)

β) να βρείτε τις θέσεις ισορροπίας και να προσδιορίσετε το είδος ισορροπίας.

(1.5 μονάδα)

γ) Όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 1$ έχει ταχύτητα $v(1) = -4m/sec$. Υπολογίστε την ολική ενέργεια του σώματος. Υπολογίστε την κινητική ενέργεια όταν περνάει από την θέση $x = 0$ (0.5 μονάδα)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι:

$$F = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow dU = -Fdx \Rightarrow \int_1^U dU = -\int_0^x Fdx \Rightarrow U(x) = 4x^4 - 18x^2 + 1 \qquad (2)$$

β) οι θέσεις ισορροπίας βρίσκονται στα σημεία όπου $U'(x) = 0$:

$$\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow 16x^3 - 36x = 0 \Rightarrow 4x(4x^2 - 9) = 0$$

δηλαδή είναι τα σημεία:

$x = 0$ $\qquad$ $x = -3/2$ $\qquad$ $x = 3/2$

Για να προσδιορίσουμε το είδος των θέσεων ισορροπίας υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο, $\frac{d^2U}{dx^2}$:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 48x^2 - 36$$

και βλέπουμε ότι:

$U''(0) = -36 < 0 \qquad U''(3/2) = U''(-3/2) = 72 > 0$

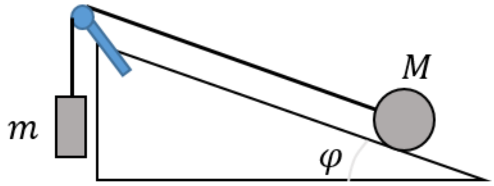
οπότε έχουμε ότι:

$x = 0$: ασταθής ισορροπία $\qquad$ $x = -3/2, x = 3/2$:ευσταθής ισορροπία

γ) $U(1) = -13 Joule \qquad K(1) = \frac{mv^2}{2} = 16 Joule \qquad$ επομένως $E_{ολ} = 3 Joule$

αλλά $U(0) = 1 Joule$ οπότε $K(0) = 2 Joule$

ΘΕΜΑ 3



Ομογενής κύλινδρος μάζας $M = 2\,Kg$ και ακτίνας $R = 10\,cm$ ηρεμεί πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi = 30°$. Ιδανικό νήμα (μη εκτατό και αμελητέας μάζας) είναι δεμένο στο κέντρο μάζας του κυλίνδρου και από την άλλη του άκρη κρέμεται σώμα μάζας m. Η τροχαλία στην εικόνα θεωρείται ιδανική, με αμελητέα μάζα και χωρίς τριβές. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου είναι $\mu_s = \frac{1}{6\sqrt{3}}$ και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$. Ο κύλινδρος κινείται προς τα κάτω.

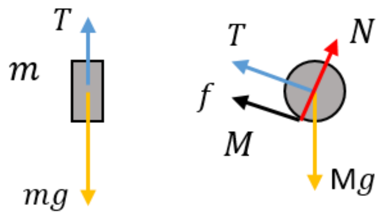
α) να δώσετε τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος για τον κύλινδρο και το σώμα μάζας m. (0,5 μονάδα)

β) να γράψετε τις εξισώσεις της δυναμικής για τον κύλινδρο και τη μάζα για τη μεταφορική και την περιστροφική κίνηση. (0,5 μονάδα)

γ) να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της μάζας m για την οποία ο κύλινδρος κατεβαίνει με κύλιση χωρίς ολίσθηση. (1,5 μονάδες)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος είναι:



όπου: T η τάση του νήματος, N η αντίδραση από το επίπεδο και f η τριβή η οποία γίνεται στατική για κύλιση χωρίς ολίσθηση.

β) ο κύλινδρος εκτελεί μεταφορική και περιστροφική κίνηση. Οι εξισώσεις της δυναμικής είναι:

μεταφορά: $Mgsin\varphi - T - f = M\alpha$ (1)

περιστροφή: $Rf = Ia_{\gamma}$ (2)

Το σώμα μάζας m κάνει μόνο μεταφορική κίνηση:

$$T - mg = ma \quad (3)$$

Η επιτάχυνση των δύο σωμάτων είναι κοινή επειδή το νήμα είναι ιδανικό.

γ) προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (3) λαμβάνουμε:

$$Mgsin\varphi - mg - f = (M+m)a \Rightarrow a = \frac{Mgsin\varphi - mg - f}{M+m} \quad (4)$$

Επιλύοντας την εξίσωση (3) ως προς τη γωνιακή ταχύτητα έχουμε:

$$\alpha_{\gamma} = \frac{Rf}{I} = \frac{Rf}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{2f}{MR} \quad (5)$$

Για να έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση θα πρέπει να ισχύει:

$$\upsilon = \omega R \quad (6)$$

και από τις σχέσεις (4) και (5) διαπιστώνουμε ότι α, α_γ είναι σταθερές οπότε:

$\upsilon = \alpha t$ και $\omega = \alpha_\gamma t$ και η σχέση (6) δίνει:

$$\alpha = \alpha_\gamma R \Rightarrow \frac{Mgsin\varphi - mg - f}{M + m} = \frac{2f}{M}$$

Επιλύοντας ως προς τη μάζα, m:

$$m = \frac{M^2 gsin\varphi - 3fM}{Mg + 2f} \tag{7}$$

Η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής είναι:

$$f^{max} = \mu Mgcos\varphi$$

και εισάγοντας την τιμή αυτή στην εξίσωση (7) παίρνουμε την ανισότητα:

$$m \geq \frac{M^2 gsin\varphi - 3\mu Mgcos\varphi M}{Mg + 2\mu Mgcos\varphi} = \frac{Msin\varphi - 3\mu Mcos\varphi}{1 + 2\mu cos\varphi}$$

Η αριθμητική αντικατάσταση δίνει:

$$m \geq \frac{1 - 3\frac{1}{6\sqrt{3}}2\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2\frac{1}{6\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}} Kg = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{7}{6}} Kg = \frac{3}{7} Kg$$

ΘΕΜΑ 4

Ελεύθερος αρμονικός ταλαντωτής με τριβή περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση $x'' + 7x' + 12x = 0$.

α) Να υπολογίσετε τη φυσική κυκλική συχνότητα ω_0 (ιδιοσυχνότητα) του ταλαντωτή και το είδος της απόσβεσης. (0.5 μονάδα)

β) Να υπολογίσετε τη θέση του ταλαντωτή σε συνάρτηση με το χρόνο, $x(t)$, αν τη χρονική στιγμή $t = 0\,s$ η θέση και η ταχύτητά του είναι $x(0) = 0$ και $\upsilon(0) = 1\frac{m}{s}$, αντίστοιχα. (1.5 μονάδα)

γ) Για ποια χρονική στιγμή η θέση αποκτά την μέγιστη τιμή της; (0.5 μονάδα)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) από τη διαφορική εξίσωση έχουμε ότι:

$$\omega_0^2 = 12\frac{rad^2}{s^2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{12}\frac{rad}{s}$$

Επίσης:

$$2\gamma = 7 \Rightarrow \gamma = 3.5s^{-1}$$

Δεδομένου ότι: $\gamma > \omega_0$ έχουμε ισχυρή απόσβεση.

Εναλλακτικά: το χαρακτηριστικό τριώνυμο της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$\rho^2 + 7\rho + 12 = 0$$

με διακρίνουσα:

$\Delta = 49 - 48 = 1 \neq 0$ και πραγματικός

οπότε έχουμε ισχυρή απόσβεση.

β) οι ρίζες του χαρακτηριστικού τριωνύμου είναι:

$\rho_1 = -3$ και $\rho_2 = -4$

άρα η θέση του ταλαντωτή σε συνάρτηση με το χρόνο, $x(t)$, θα είναι:

$$x(t) = Ae^{-4t} + Be^{-3t}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0\ s$ η θέση είναι $x(0) = 0$: οπότε

$$A + B = 0$$

και η ταχύτητά του $\upsilon(0) = 1\frac{m}{s}$:

$$-4A - 3B = 1$$

Επιλύοντας το σύστημα βρίσκουμε ότι:

$$A = -1, B = 1$$

Τελικά:

$$x(t) = -e^{-4t} + e^{-3t}$$

γ) η θέση αποκτά την μέγιστη τιμή της όταν:

$$x'(t) = 0 \Rightarrow 4e^{-4t} - 3e^{-3t} = 0 \Rightarrow e^{-3t}(4e^{-t} - 3) = 0$$

$$\Rightarrow 4e^{-t} = 3 \Rightarrow -t = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow t = \ln\left(\frac{4}{3}\right)s$$