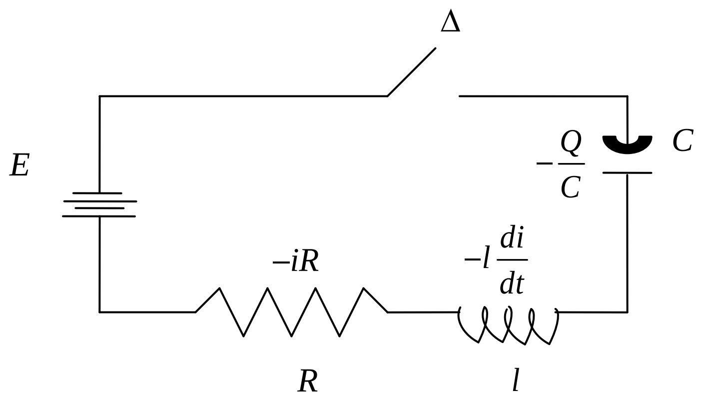
Κεφάλαιο 8 Διαφορικές Εξισώσεις

8.1 Ορισμοί

Έστω ένα κύκλωμα το οποίο αποτελείται από μία πηγή ηλεκτρεργετικής δύναμης *E (Volt)*, η οποία μπορεί να είναι σταθερή ή να εξαρτάται από το χρόνο δηλαδή *E=E(t)*, πυκνωτή χωρητικότητας *C (Farad)*, πηνίο αυτεπαγωγής *l (Herny)*, ωμική αντίσταση *R (Ohm)* και διακόπτη *Δ*, συνδεδεμένα σε σειρά.



Θεωρούμε ότι ο πυκνωτής δεν έχει φορτίο. Κλείνοντας τον διακόπτη ένα φορτίο *q (Coulombs)* θα ρέει στον ολισμό του πυκνωτή. Ο ρυθμός μεταβολής του φορτίου κατά τη ροή του, ο οποίος δίνεται από τον τύπο

$$\frac{dQ}{dt} = i(t)$$

ονομάζεται ένταση και μετριέται σε *Amper*, όταν ο χρόνος t μετριέται σε *sec*. Ένα βασικό πρόβλημα είναι ο υπολογισμός του φορτίου στους πυκνωτές και οι εντάσεις ως συναρτήσεις του χρόνου. Οπότε οι άγνωστες ποσότητες είναι οι *Q(t)* και *i(t)*. Ο δεύτερος νόμος (των τάσεων) του *Kirchoff* μας λέει ότι το άθροισμα των τάσεων στα άκρα όλων των στοιχείων κάθε βρόγχου ενός κυκλώματος είναι ίσο με μηδέν. Θεωρώντας ως θετική φορά την αντίθετη από αυτή των δεικτών του ρολογιού για το πάνω κύκλωμα έχουμε:

a. Πτώση τάσης στα άκρα της αντίστασης $-iR$
b. Πτώση τάσης από αυτεπαγωγή του πηνίου $-l\frac{di}{dt} = -l\frac{d^2Q}{dt^2}$
c. Πτώση τάσης μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή $-\frac{Q}{C}$
d. Πτώση τάσης στα άκρα της πηγής $E(t)$

Εφαρμόζουμε τον νόμο αυτόν έχουμε τη σχέση

$$E(t) - \frac{1}{C}\cdot Q - l\frac{di}{dt} - R\cdot i = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{1}{lC}Q + \frac{R}{l}\cdot i - \frac{E(t)}{l} = 0,$$

Στη σχέση αυτή εμφανίζονται και οι δύο άγνωστες ποσότητες *Q(t)* και *i(t)*, όμως χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$i = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2}$$

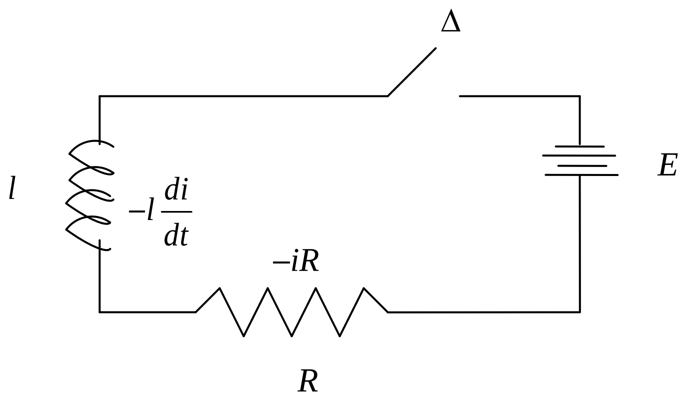
καταλήγουμε σε μία εξίσωση όπου η μοναδική άγνωστη ποσότητα $Q(t)$ εμφανίζεται μαζί με την πρώτη και δεύτερη παράγωγό της:

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{R}{l}\cdot\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{lC}Q-\frac{E(t)}{l}=0$$

Αυτή η εξίσωση ονομάζεται διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξης.

Κύκλωμα RL

Έστω ότι τώρα το κύκλωμα οποίο αποτελείται από μία πηγή ηλεκτρεργετικής δύναμης E *(Volt)*, η οποία μπορεί να είναι σταθερή ή να εξαρτάται από το χρόνο δηλαδή $E=E(t)$, πηνίο αυτεπαγωγής l *(Herny)*, ωμική αντίσταση R *(Ohm)* και διακόπτη Δ, συνδεδεμένα σε σειρά.



Τη χρονική στιγμή $t=0$ ο διακόπτης κλείνει και ζητείται να προσδιοριστεί η τιμή του ρεύματος $i=i(t)$ που αρχίζει να διαρρέει στο κύκλωμα. Εφαρμόζουμε ξανά τον δεύτερο νόμο (των τάσεων) του Kirchoff ο οποίος μας λέει ότι η ηλεκτρεργετική δύναμη ισούται κάθε χρονική στιγμή με το άθροισμα της πτώσης τάσης στο πηνίο $l\frac{di}{dt}$ και της πτώσης τάσης στην αντίσταση iR, δηλαδή:

$$E(t)-iR-l\frac{di}{dt}=0\Rightarrow\frac{di}{dt}+\frac{R}{l}i-\frac{E(t)}{l}=0.$$

Εδώ η άγνωστη ποσότητα $i=i(t)$ εμφανίζεται μαζί με την πρώτη παράγωγό της σε μία εξίσωση. Μία τέτοια εξίσωση ονομάζεται συνήθης διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.

Γενικεύοντας, μπορούμε να ορίσουμε μία **συνήθης διαφορική εξίσωση (δ.ε.)** ως την εξίσωση στην οποία, εκτός από την άγνωστη συνάρτηση $y=y(x)$, εμφανίζονται και διαφόρων τάξεων παράγωγοί της.

$$F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0$$

ή

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},...,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0.$$

Ως **τάξη** της δ.ε. λέμε την ανώτερη παράγωγο που εμφανίζεται στην εξίσωση.

Μία διαφορική εξίσωση ονομάζεται **γραμμική** εάν μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=F(x)$$

Στις **γραμμικές διαφορικές εξισώσεις** η άγνωστη συνάρτηση $y=y(x)$ και οι παράγωγοί της δεν πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους, δεν υψώνονται σε δυνάμεις, δεν εμφανίζονται σε ρητές εκφράσεις ή σε ορίσματα υπερβατικών συναρτήσεων.

Εάν ισχύει $F(x)=0$ η γραμμική δ.ε. ονομάζεται **γραμμική ομογενής** διαφορετικά ονομάζεται **γραμμική μη ομογενής**. Στην περίπτωση που τα $\alpha_0(x),\alpha_1(x),\ldots,\alpha_n(x)$ είναι αριθμοί (και όχι συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής x) τότε λέμε ότι έχουμε μία γραμμική δ.ε. με σταθερούς συντελεστές.

Παραδείγματα:

Πρώτης τάξης γραμμική με σταθερούς συντελεστές:

$$\frac{dy}{dx}=5y \text{ ή } y'=5y \Leftrightarrow y'-5y=0$$

Πρώτης τάξης γραμμική με μη σταθερούς συντελεστές ομογενής :

$$\frac{dy}{dx}=5xy \text{ ή } y'=5xy \Leftrightarrow y'-5xy=0$$

Πρώτης τάξης γραμμική με σταθερούς συντελεστές μη ομογενής :

$$3\frac{dy}{dx}-\sin(x)=0 \text{ ή } 3y'-\sin(x)=0 \Leftrightarrow 3y'=\sin(x)$$

Πρώτης τάξης μη γραμμική $3\frac{dy}{dx}-\sin(y)=0$ ή $3y'-\sin(y)=0$ λόγω του $\sin(y)$.

Τρίτης τάξης μη γραμμικές:

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3-\frac{dy}{dx}=e^x \text{ ή } \left(y^{(3)}\right)^2+\left(y''\right)^3-y'=e^x \;,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx}=\sin(x) \text{ ή } y^{(3)}+y''y=\sin(x)$$

Ονομάζουμε ως **λύση ή ολοκλήρωμα** της δ.ε. τη συνάρτηση $y=y(x)$ εάν αυτή και οι παράγωγοί της (που εννοείται ότι υπάρχουν) ικανοποιούν την εξίσωση της δ.ε.

Παράδειγμα: Δείξτε ότι για οποιεσδήποτε τιμές των παραμέτρων C_1,C_2 η συνάρτηση $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ αποτελεί λύση της δ.ε.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0 \text{ ή } y''+y=0$$

$$y=C_1\cos(x)+C_2\sin(x)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-C_1\sin(x)+C_2\cos(x)\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=-C_1\cos(x)-C_2\sin(x)$$

Φανερά $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\left(C_1\cos(x)+C_2\sin(x)\right)+\left(-C_1\cos(x)-C_2\sin(x)\right)=0$

Μπορεί να δειχθεί ότι ο παραπάνω τύπος δίνει όλες τις πιθανές λύσεις της συγκεκριμένης δ.ε.,

Παράδειγμα: Εξετάστε εάν η $y(x)=2e^{3x}-5e^{5x}$ αποτελεί λύση της δ.ε. με τύπο

$$\frac{d^2y}{dx^2}-7\frac{dy}{dx}+12y=0 \text{ ή } y''-7y'+12y=0$$

Έχουμε $y(x)=2e^{3x}-5e^{5x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=6e^{3x}-25e^{5x}\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=18e^{3x}-125e^{5x}$

Οπότε

$$\frac{d^2y}{dx^2}+-7\frac{dy}{dx}+12y=18e^{3x}-125e^{5x}-7\left(6e^{3x}-25e^{5x}\right)+12\left(2e^{3x}-5e^{5x}\right)=$$
$$=(18-42+24)e^{3x}+(-125+175-60)e^{5x}=0e^{3x}-10e^{5x}\neq 0$$

Άρα δεν αποτελεί λύση της δ.ε.

Μια λύση η οποία δίνει όλες τις λύσεις μίας δ.ε ονομάζεται **γενική λύση** ή **γενικό ολοκλήρωμα** της δ.ε.. Το να λύσουμε μία δ.ε. σημαίνει το να βρούμε τη γενική της λύση. Η γενική λύση μίας δ.ε. τάξης *n* αναμένεται να περιέχει *n* παραμέτρους (αυθαίρετες σταθερές), όπως στο παράδειγμά μας η λύση της δευτέρας τάξης δ.ε. έχει δύο παραμέτρους, τις C_1, C_2.

Μία λύση που προκύπτει εάν στη γενική λύση δώσουμε συγκεκριμένες τιμές σε όλες τις παραμέτρους που περιέχει, τότε ονομάζεται **μερική λύση** ή **ολοκληρωτική καμπύλη** της δ.ε..

Μία λύση δ.ε. η οποία δεν περιέχει παραμέτρους (αυθαίρετες σταθερές) και η οποία δεν προκύπτει από κάποια γενική λύση (δίνοντας τιμές στις παραμέτρους) ονομάζεται **ιδιάζουσα λύση**.

Για να επιλέξουμε τις τιμές των παραμέτρων και να βρούμε μία μερική λύση από μία γενική, θα πρέπει να μας δοθούν ανεξάρτητες μεταξύ τους συνθήκες που θα ικανοποιεί η μερική λύση.

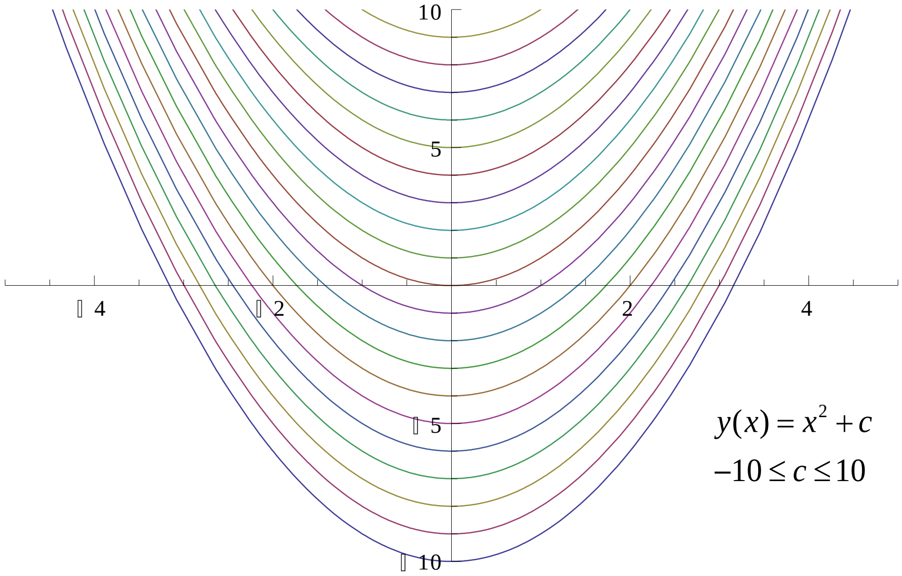
Εάν αυτές οι συνθήκες έχουν την μορφή **αρχικών συνθηκών** δηλαδή $y(\alpha)=\beta_0, y'(\alpha)=\beta_1, y''(\alpha)=\beta_2,\ldots,y^{(n)}=\beta_n$ για καθορισμένη τιμή $x=\alpha$, τότε το πρόβλημα εύρεσης της μερικής λύσης ονομάζεται πρόβλημα αρχικών τιμών.

Η ύπαρξη λύσης δεν θα μας απασχολήσει εδώ αλλά υπάρχουν θεωρήματα που καθορίζουν πότε υπάρχει η γενική λύση μιας δ.ε.

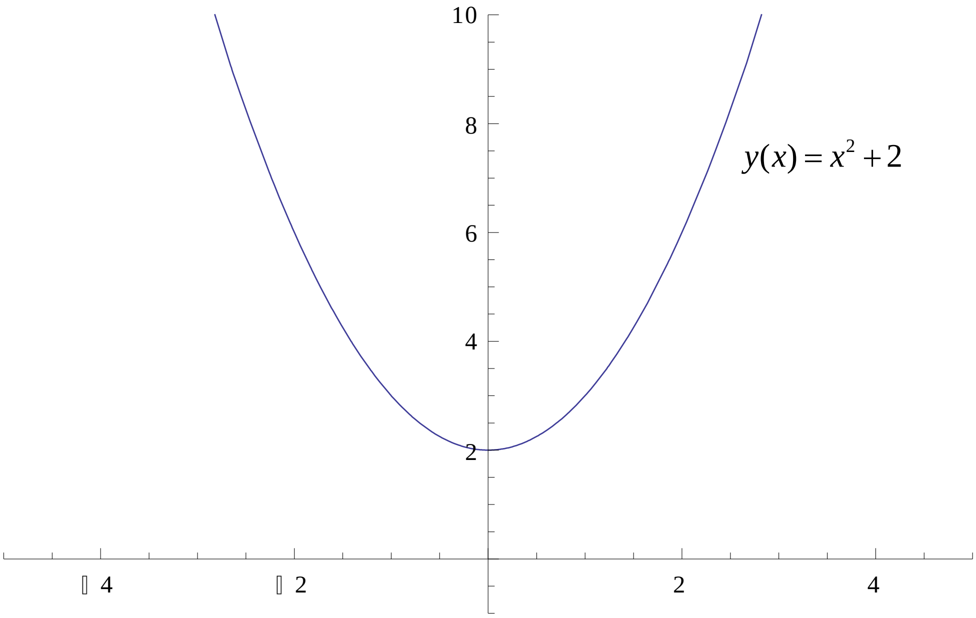
Για να κατανοήσουμε τι είναι γενική και τι μερική λύση ας δούμε τα ακόλουθα απλά παραδείγματα:

α)

Είναι φανερό ότι η διαφορική εξίσωση $y'=2x$ έχει γενική λύση την $y(x)=x^2+c$, διότι εάν την παραγωγίσουμε και την αντικαταστήσουμε στην διαφορική εξίσωση φανερά την ικανοποιεί. Η γενική αυτή λύση είναι μία μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων δηλαδή, περιέχει μία παράμετρο κάτι που αναμέναμε μιας η διαφορική εξίσωση είναι πρώτης τάξης. Είναι εύκολο να σχεδιάσουμε αυτή την οικογένεια λύσεων μιας και αποτελείται από απλές παραβολές οι οποίες μετατοπίζονται ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου c.



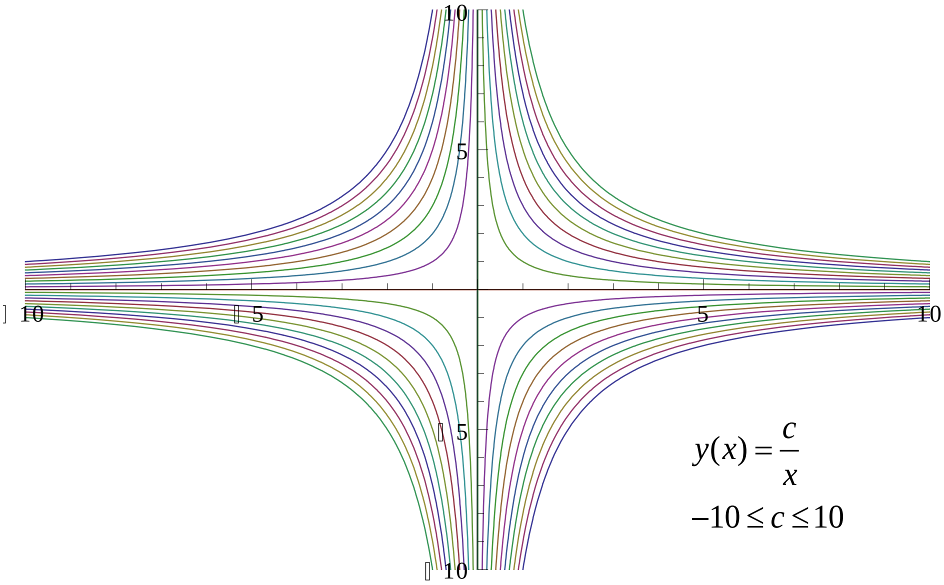
Καθεμία από αυτές τις παραβολές αποτελούν μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης οι οποίες ικανοποιούν ένα πρόβλημα αρχικών τιμών. Η αρχική συνθήκη καθορίζει την τιμή του c, οπότε και ποια από τις μερικές λύσεις ικανοποιεί το συγκεκριμένο πρόβλημα. Για παράδειγμα, εάν η αρχική μας συνθήκη είναι η $y(0)=2$ τότε η παραβολή $y(x)=x^2+2$ αποτελεί τη (μερική) λύση της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποίει το συγκεκριμένο πρόβλημα αρχικών τιμών $y'=2x,\quad y(0)=2$.



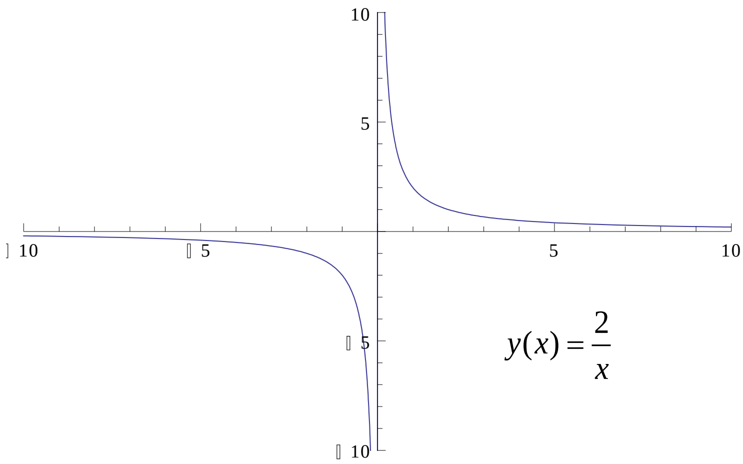
β) Επίσης η διαφορική εξίσωση $xy'+y=0$ έχει γενική λύση την $y(x)=\dfrac{c}{x}$, διότι εάν την παραγωγίσουμε και την αντικαταστήσουμε στην διαφορική εξίσωση φανερά την ικανοποιεί.

$$xy'+y=0\overset{y=\frac{c}{x}}{\Longrightarrow} x\left(-\frac{c}{x^2}\right)+\frac{c}{x}=0$$

Η γενική αυτή λύση είναι μία μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων δηλαδή, περιέχει μία παράμετρο κάτι που αναμέναμε μιας η διαφορική εξίσωση είναι πρώτης τάξης. Είναι εύκολο να σχεδιάσουμε αυτή την οικογένεια λύσεων μιας και αποτελείται από απλές υπερβολές οι οποίες μετατοπίζονται ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου c.



Καθεμία από αυτές τις υπερβολές αποτελούν μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης οι οποίες ικανοποιούν ένα πρόβλημα αρχικών τιμών. Η αρχική συνθήκη καθορίζει την τιμή του c, οπότε και ποια από τις μερικές λύσεις λύνει το συγκεκριμένο πρόβλημα. Για παράδειγμα εάν η αρχική μας συνθήκη είναι η $y(2)=1$ τότε η υπερβολή $y(x)=\frac{2}{x}$ αποτελεί τη (μερική) λύση της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποίει το συγκεκριμένο πρόβλημα αρχικών τιμών $xy'+y=0, \quad y(1)=2$.



8.2 Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

8.2.1 Διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών:

Μία δ.ε. πρώτης τάξης ονομάζεται **χωριζόμενων μεταβλητών** εάν μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$N(y)\frac{dy}{dx}=M(x) \text{ ή } N(y)y'=M(x)$$

ή στην ισοδύναμη διαφορική μορφή

$$N(y)dy = M(x)dx$$

Θεωρώντας το $\dfrac{dy}{dx}$ ως πηλίκο διαφορικών καταφέρνουμε να χωρίσουμε τις μεταβλητές στην εξίσωση.

Μία δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών λύνεται με το να ολοκληρώσουμε ως προς x.

$$N(y)\frac{dy}{dx} = M(x) \Rightarrow \int N(y)\frac{dy}{dx}dx = \int M(x)dx \Rightarrow \int N(y)dy = \int M(x)dx$$

Παράδειγμα: Λύστε τη διαφορική $y' = e^x$ ή $\dfrac{dy}{dx} = e^x$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \Leftrightarrow dy = e^x dx \Leftrightarrow \int dy = \int e^x dx \Leftrightarrow y(x) = e^x + c$$

Παράδειγμα: Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών $xy' + y = 0, \quad y(1) = 2$

$$xy' + y = 0 \Leftrightarrow x\frac{dy}{dx} + y = 0 \Leftrightarrow x\frac{dy}{dx} = -y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + c \Leftrightarrow \ln|y| + \ln|x| = c \Leftrightarrow \ln|yx| = c \Leftrightarrow |yx| = e^c \Leftrightarrow y(x) = \pm e^c \frac{1}{x} \overset{C=\pm e^c}{\Leftrightarrow} y(x) = \frac{C}{x}$$

Από την $y(1) = 2 \Rightarrow C = 2$ και η μερική λύση είναι η $y(x) = \dfrac{2}{x}$.

Παράδειγμα: Λύστε τη διαφορική $y' = (1+y^2)e^x$ ή $\dfrac{dy}{dx} = (1+y^2)e^x$

$$\frac{dy}{dx} = (1+y^2)e^x \Rightarrow \frac{1}{(1+y^2)} = e^x dx \Rightarrow \int \frac{1}{(1+y^2)}dy = \int e^x dx \Rightarrow$$

$$\arctan(y) + C = e^x \Rightarrow \arctan(y) = e^x - C \Rightarrow y(x) = \tan(e^x - C)$$

Παράδειγμα: Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = xy(y-2) \text{ ή } \frac{dy}{dx} = xy(y-2), \; y(0) = 2$$

Θα βρούμε πρώτα τη γενική λύση, Παρατηρούμε ότι η δ.ε. είναι χωριζόμενων μεταβλητών

$$\frac{dy}{dx} = xy(y-2) \Leftrightarrow \frac{dy}{y(y-2)} = xdx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y(y-2)} = \int xdx$$

Αναλύουμε το κλάσμα:

$$\frac{1}{y(y-2)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-2} \Leftrightarrow \frac{1}{y(y-2)} = \frac{Ay - 2A + By}{y(y-2)} \Leftrightarrow \frac{1}{y(y-2)} = \frac{(A+B)y - 2A}{y(y-2)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = -A = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

και έχουμε τη γενική λύση.

$$\int \frac{dy}{y(y-2)} = \int x dx \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y-2} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\ln|y| + \frac{1}{2}\ln|y-2| = \frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow \ln|y-2| - \ln|y| = x^2 + C'$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{|y-2|}{|y|} = x^2 + C' \Leftrightarrow \left|\frac{y-2}{y}\right| = e^{x^2}c_1 \Leftrightarrow \frac{y-2}{y} = \pm c_1 e^{x^2} \Leftrightarrow y(x) = \frac{2}{1-ce^{x^2}}, \quad c = \pm c_1 \in \mathbb{R}$$

Η μερική λύση που ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών βρίσκεται καθορίζοντας το c. Έχουμε $y(0) = 2 \Leftrightarrow y(0) = \dfrac{2}{1-ce^0} = 2 \Leftrightarrow c = 0$. Οπότε η μερική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι η $y(x) = \dfrac{2}{1-0e^{x^2}} = 2.$

Παρατηρούμε ότι και η $y(x) = 0$ ικανοποιεί την εξίσωση αλλά δεν προκύπτει από κάποια γενική λύση. Αυτή είναι μία ιδιάζουσα λύση.

8.2.2 Ομογενής διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

Μία συνάρτηση $F(x,y)$ ονομάζεται **ομογενής ν-στού** βαθμού εάν για τυχαίο πραγματικό λ ισχύει $F(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{v} F(x,y)$.

Μία δ.ε. πρώτης τάξης $\dfrac{dy}{dx} = F(x,y)$ ή $y' = F(x,y)$ ονομάζεται **ομογενής δ.ε. πρώτης τάξης όταν η συνάρτηση** $F(x,y)$ είναι ομογενής 0-κου βαθμού. Τότε ισχύει

$$F(\lambda x,\lambda y)=F(x,y)$$

και η εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \text{ ή } y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Μία τέτοια διαφορική εξίσωση μπορεί να μετατραπεί σε χωριζόμενων μεταβλητών εάν θέσουμε $u = \dfrac{y}{x}$, οπότε:

$$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u\cdot x' = \frac{du}{dx}x + u$$

Έτσι έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow \frac{du}{dx}x + u = F(u) \Leftrightarrow xdu + udx = F(u)dx \Leftrightarrow xdu = F(u)dx - udx$$

$$\Leftrightarrow xdu = \left(F(u) - u\right)dx \Leftrightarrow \frac{du}{F(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

η οποία είναι χωριζόμενων μεταβλητών.

Παράδειγμα: Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = -\frac{x^2+y^2}{2xy} \text{ ή } \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2+y^2}{2xy}, \quad y(1) = 1$$

Παρατηρούμε ότι εάν $x \neq 0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2+y^2}{2xy}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$ οπότε $F(u)=-\frac{1+u^2}{2u},\quad u=\frac{y}{x}$.

$$\frac{du}{F(u)-u}=\frac{dx}{x}\Leftrightarrow\frac{du}{-\frac{1+u^2}{2u}-u}=\frac{dx}{x}\Leftrightarrow\frac{2udu}{-1-3u^2}=\frac{dx}{x}\Leftrightarrow$$

$$\int\frac{2udu}{1+3u^2}=-\int\frac{dx}{x}\Leftrightarrow\frac{1}{3}\int\frac{d\left(1+3u^2\right)}{1+3u^2}=-\ln|x|+c\Leftrightarrow\ln|x|+\frac{1}{3}\ln\left|1+3u^2\right|=c\Leftrightarrow$$

$$3\ln|x|+\ln\left|1+3u^2\right|=3c\Leftrightarrow\ln|x|^3+\ln\left|1+3u^2\right|=3c\Leftrightarrow\ln\left[\left|x^3\right|\left(1+3u^2\right)\right]=3c\Leftrightarrow$$

$$\left|x^3\right|\left(1+3u^2\right)=e^{3c}\Leftrightarrow x^3\left(1+3u^2\right)=\pm e^{3c}\Leftrightarrow x^3\left(1+3u^2\right)=C$$

Εναλλακτικά θέτοντας $y=ux$ και $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}x+u$ έχουμε

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2+y^2}{2xy}\Leftrightarrow\frac{du}{dx}x+u=-\frac{x^2+u^2x^2}{2xux}\Leftrightarrow\frac{du}{dx}x=-\frac{1+u^2}{2u}-u\Leftrightarrow\frac{du}{dx}x=-\frac{1+3u^2}{2u}\Leftrightarrow$$

$$\frac{2udu}{1+3u^2}=-\frac{dx}{x}\Leftrightarrow\int\frac{2udu}{1+3u^2}=-\int\frac{dx}{x}\Leftrightarrow.....\Leftrightarrow x^3\left(1+3u^2\right)=C$$

Αντικαθιστούμε τώρα το $u=\frac{y}{x}$

$$x^3\left(1+3u^2\right)=C\Leftrightarrow x^3\left(1+3\frac{y^2}{x^2}\right)=C\Leftrightarrow x^3+3xy^2=C$$

Τώρα για την αρχική συνθήκη $y(1)=1$ έχουμε $1+3\cdot1=C\Leftrightarrow C=4$

Οπότε η μερική λύση είναι η $x^3+3xy^2=4$.

8.2.3 Γραμμικές δ.ε. πρώτης τάξης

Η γενική μορφή μίας **γραμμικής δ.ε. πρώτης τάξης με μη σταθερούς συντελεστές** είναι η ακόλουθη:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)\ \text{ή}\ y'+p(x)y=q(x)$$

όπου p,q συναρτήσεις μόνο του x.
Στην περίπτωση όπου $q(x)=0$ τότε η γραμμική δ.ε.:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0\ \text{ή}\ y'+p(x)y=0$$

είναι δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών. Πράγματι

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-p(x)y \Leftrightarrow \frac{dy}{y}=-p(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y}=-\int p(x)dx+c \Leftrightarrow \ln|y|=-\int p(x)dx+c \Leftrightarrow |y|=e^{-\int p(x)dx+c} \Leftrightarrow$$

$$|y|=e^{-\int p(x)dx}e^{c} \Leftrightarrow y=\pm e^{c}e^{-\int p(x)dx} \overset{C=\pm e^{c}}{\Leftrightarrow} y=Ce^{-\int p(x)dx}$$

Παράδειγμα: Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'=3xy$, $y(0)=1$.

$$y'-3xy=0 \Leftrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=3x \Leftrightarrow \frac{dy}{y}=3xdx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y}=\int 3xdx \Leftrightarrow$$

$$\ln|y|=\frac{3}{2}x^2+c \Leftrightarrow |y|=e^{\frac{3}{2}x^2+c} \overset{C=\pm e^{c}}{\Leftrightarrow} y=Ce^{\frac{3}{2}x^2}$$

Από την αρχική συνθήκη $y(0)=1$ συνάγουμε ότι $y(0)=Ce^{\frac{3}{2}0^2}=C$ οπότε $C=1$.

Στην γενική μη ομογενή περίπτωση, η λύση της δ.ε.

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \text{ ή } y'+p(x)y=q(x)$$

είναι

$$y(x)=\frac{1}{h(x)}\int h(x)q(x)dx$$

όπου $h(x)=e^{\int p(x)dx}$.
Πράγματι, για την $h(x)$ ισχύει

$$h'(x)=e^{\int p(x)dx}\left(\int p(x)dx\right)' \Rightarrow h'(x)=h(x)p(x)$$

οπότε εάν στη διαφορική εξίσωση

$$y'+p(x)y=q(x)$$

πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με $h(x)$ έχουμε

$$h(x)y'(x)+h(x)p(x)y(x)=h(x)q(x) \Leftrightarrow h(x)y'(x)+h'(x)y(x)=h(x)q(x) \Leftrightarrow$$

$$\left(h(x)y(x)\right)'=h(x)q(x) \Leftrightarrow h(x)y(x)=\int h(x)q(x)dx \Leftrightarrow y(x)=\frac{1}{h(x)}\int h(x)q(x)dx.$$

Τα παραπάνω, σκιαγραφούν την απόδειξη των τύπων της επίλυσης της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης. Για την περίπτωση της ομογενούς εξίσωσης έχουμε $\int h(x)q(x)dx=\int h(x)\cdot 0dx=\int 0dx=C$. Οπότε η λύση είναι αυτή που αναφέραμε $y(x)=\frac{1}{h(x)}C=Ce^{-\int p(x)dx}$.

Παράδειγμα: Λύστε τη διαφορική $xy'-3y=x^2$ ή $x\frac{dy}{dx}-3y=x^2,\ x>0$

Φέρνουμε την εξίσωση στην συνήθη μορφή: $\frac{dy}{dx}-\frac{3}{x}y=x$ ή $\frac{dy}{dx}-\frac{3}{x}y=x$ από όπου έχουμε $p(x)=\frac{-3}{x}$ και $q(x)=x$. Το

$$h(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int \frac{-3}{x}dx}=e^{-3\int \frac{1}{x}dx}=e^{-3\ln x}=e^{\ln x^{-3}}=x^{-3}$$

Οπότε η λύση είναι

$$y(x)=\frac{1}{h(x)}\int h(x)q(x)dx=x^3\int\frac{1}{x^3}xdx=x^3\int\frac{1}{x^2}dx=x^3\left(-\frac{1}{x}+C\right)=Cx^3-x^2$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η ολοκληρωτική καμπύλη της δ.ε.

$$(1+x^2)(dy-dx)=2xydx$$

που περνά από το σημείο με συντεταγμένες (0,1).

Φέρνουμε την εξίσωση στην συνήθη μορφή:

$$(1+x^2)(dy-dx)=2xydx\Leftrightarrow(1+x^2)dy-(1+x^2)dx=2xydx\Leftrightarrow(1+x^2)\frac{dy}{dx}-(1+x^2)=2xy$$

$$\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}-\frac{2x}{(1+x^2)}y=1 \text{ ή } y'-\frac{2x}{(1+x^2)}y=1$$

από όπου έχουμε $p(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)}$ και $q(x)=1$.

Το $h(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)}dx}=e^{-\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)}d\left(x^2+1\right)}=e^{-\ln\left(x^2+1\right)}=\left(e^{\ln\left(x^2+1\right)}\right)^{-1}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)}$

Οπότε η λύση είναι

$$y(x)=\frac{1}{h(x)}\int h(x)q(x)dx=\left(x^2+1\right)\int\frac{1}{x^2+1}dx=\left(x^2+1\right)\left(\arctan\left(x\right)+C\right)$$

Και από την αρχική συνθήκη $y(0)=1$ έχουμε

$y(0)=1=(1+0)(C+\arctan\left(0\right))\Leftrightarrow 1=C+0\Leftrightarrow C=1$

Τελικά η ζητούμενη ολοκληρωτική καμπύλη της δ.ε. είναι $y(x)=\left(x^2+1\right)\left(\arctan\left(x\right)+1\right)$.

8.3 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

Η γενική μορφή μίας γραμμικής δ.ε. δευτέρας τάξης είναι η ακόλουθη:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=g(x) \text{ ή ισοδύναμα } y''+a(x)y'+b(x)y=g(x)$$

8.3.1 Γραμμικές ομογενείς δ.ε. δευτέρης τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Σε αυτήν την ενότητα θα μας απασχολήσουν οι ομογενής δ.ε. 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή εξισώσεις με τη μορφή:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0 \text{ ή ισοδύναμα } y''+ay'+by=0$$

Για την ευκολία μας ορίζουμε το **διαφορικό τελεστή (πράξη) D**

$$Dy(x)=\frac{dy}{dx},\quad D^2y(x)=DDy(x)=\frac{d^2y}{dx^2},\quad D^3y(x)=DD^2y(x)=\frac{d^3y}{dx^3},....$$

Η παραπάνω δ.ε. μπορεί να γραφεί με τη χρήση του τελεστή ως

$$\left(D^2+aD+b\right)y=0$$

Αυτό μας οδηγεί στο να αντιστοιχίσουμε τη δ.ε. με μία δευτεροβάθμια εξίσωση

$$r^2 + ar + b = 0$$

την οποία θα ονομάζουμε **χαρακτηριστική εξίσωση** της δ.ε.

Επίσης εάν χρησιμοποιήσουμε το διαφορικό τελεστή $F(D) = D^2 + aD + b$ η εξίσωση γράφεται ως $F(D)y = 0$.

Ο διαφορικός τελεστής $F(D)$ είναι γραμμικός δηλαδή ισχύει

$$F(D)(\kappa y_1(x) + \mu y_2(x)) = \kappa F(D) y_1(x) + \mu F(D) y_2(x)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες (δύο πραγματικές διαφορετικές μεταξύ τους ή μία διπλή πραγματική ή μία μιγαδική). Διακρίνουμε τις τρεις αυτές περιπτώσεις:

- Δύο πραγματικές ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους r_1, r_2.

  Η γενική λύση είναι της μορφής $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

- μία διπλή πραγματική ρίζα r_1

  Η γενική λύση είναι της μορφής $y(x) = \left(C_1 x + C_2\right) e^{r_1 x}$

- ένα ζεύγος μιγαδικής και της συζυγής της $r_1 = \alpha + \beta i,\ \ r_2 = \alpha - \beta i$.

  Η γενική λύση είναι της μορφής $y(x) = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right)$

Παράδειγμα: Λύστε τη διαφορική

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0 \text{ ή ισοδύναμα } y'' + 4y' + 4y = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $r^2 + 4r + 4 = 0$ το οποίο έχει διπλή ρίζα $r_1 = -2$

Η γενική λύση είναι της μορφής $y(x) = \left(C_1 x + C_2\right) e^{-2x}$

Παράδειγμα: Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0 \text{ ή ισοδύναμα } y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = -4$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $r^2 + r - 2 = 0$ το οποίο έχει ρίζες $r_1 = 1, r_2 = -2$.

Η γενική λύση είναι της μορφής $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ και η παράγωγός της $y'(x) = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}$

Από τις αρχικές συνθήκες οδηγούμαστε στο σύστημα:

$\begin{array}{l} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - 2C_2 = -4 \end{array}$ το οποίο έχει λύση $C_1 = -\frac{2}{3}, C_2 = \frac{5}{3}$. Οπότε η μερική λύση είναι η

$$y(x) = -\frac{2}{3}e^x + \frac{5}{3}e^{-2x}$$

Παράδειγμα: Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+6y=0 \text{ ή ισοδύναμα } y''+4y'+6y=0, \quad y(0)=-1, y'(0)=0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $r^2+4r+6=0$ το οποίο έχει ρίζες $r_1=-2+i\sqrt{2},\ r_2=-2-i\sqrt{2}$. Οπότε $\alpha=-2,\ \beta=\sqrt{2}$.

Η γενική λύση είναι της μορφής $y(x)=e^{-2x}\left(C_1\cos\left(\sqrt{2}x\right)+C_2\sin\left(\sqrt{2}x\right)\right)$ και η παράγωγός της $y'(x)=e^{-2x}\left(\left(\sqrt{2}C_2-2C_1\right)\cos\left(\sqrt{2}x\right)-\left(\sqrt{2}C_1+2C_2\right)\sin\left(\sqrt{2}x\right)\right)$

Από τις αρχικές συνθήκες οδηγούμαστε στο σύστημα:

$$\begin{aligned} &C_1=-1 \\ &\sqrt{2}C_2-2C_1=0 \end{aligned}$$

το οποίο έχει λύση $C_1=-1, C_2=-\sqrt{2}$.

Οπότε η μερική λύση είναι η

$$y(x)=e^{-2x}\left(-\cos\left(\sqrt{2}x\right)-\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}x\right)\right)$$

Παράδειγμα: Λύστε τη διαφορική εξίσωση $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0$ ή ισοδύναμα $y''+4y=0$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $r^2+4=0$ το οποίο έχει ρίζες $r_1=2i,\ r_2=-2i$. Οπότε $\alpha=0,\ \beta=2$.

Η γενική λύση είναι της μορφής $y(x)=C_1\cos\left(2x\right)+C_2\sin\left(2x\right)$

8.3.2 Γραμμικές μη ομογενείς δ.ε. δευτέρης τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Σε αυτήν την ενότητα θα μας απασχολήσουν οι μη ομογενής δ.ε. 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή εξισώσεις με τη μορφή:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=g(x) \text{ ή ισοδύναμα } y''+ay'+by=g(x)$$

σε αυτήν αντιστοιχεί μία ομογενής εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0 \text{ ή ισοδύναμα } y''+ay'+by=0$$

με χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$r^2+ar+b=0$$

εάν $y_o(x)$ είναι μία γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης και $y_m(x)$ μία μερική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης τότε η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης ισούται με

$$y(x)=y_o(x)+y_m(x)$$

Θα περιοριστούμε σε δ.ε. όπου $g(x)$ έχει την ακόλουθη μορφή :

$g(x)$ **σταθερά επί**	**Και ισχύει**	**Τύπος μερικής λύσης**
e^{rx}	r δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου	$A\,e^{rx}$
	r είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου	$A\,xe^{rx}$
	r είναι διπλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου	$A\,x^2\,e^{rx}$
$\sin(kx)$, $\cos(kx)$	ki δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου	$B\cos(kx)+C\sin(\kappa x)$
	ki είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου	$B\,x\cos(kx)+C\,x\sin(\kappa x)$
ax^2+bx+c	0 δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου	$D\,x^2+E\,x+F$
	0 είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου	$D\,x^3+E\,x^2+F\,x$
	0 είναι διπλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου	$D\,x^4+E\,x^3+F\,x^2$

Εάν το $g(x)$αποτελείται από αθροίσματα των παραπάνω αθροίζουμε και τις μερικές λύσεις.

Παράδειγμα: Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=2\sin\left(x\right) \text{ ή ισοδύναμα } y''-y'=2\sin\left(x\right)$$

Η ομογενής είναι η $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0$ ή ισοδύναμα $y''-y'=0$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $r^2-r=0$ με ρίζες το 1 και το 0.

Οπότε η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι $y_o(x)=C_1e^x+C_2$

Η μερική λύση της μη ομογενούς, σύμφωνα με τον πίνακα, θα έχει τη μορφή $y_m(x)=B\cos(x)+C\sin(x)$ αφού το i δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

Η πρώτη παράγωγος είναι $y_m'(x)=-B\sin(x)+C\cos(x)$ και η δεύτερη παράγωγος είναι $y_m''(x)=-B\cos(x)-C\sin(x)$

Οπότε αντικαθιστώντας έχουμε

$$-B\cos(x)-C\sin(x)+B\sin(x)-C\cos(x)=2\sin(x)\Leftrightarrow$$
$$(-C-B)\cos(x)+(B-C)\sin(x)=2\sin(x)\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}-B-C=0\\ B-C=2\end{cases}\Leftrightarrow C=-1, B=1$$

Οπότε $y_m(x)=\cos(x)-\sin(x)$ και η λύση τελικά

$$y(x)=y_o(x)+y_m(x)=\cos(x)-\sin(x)+C_1e^x+C_2$$

Παράδειγμα: Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=5e^x \text{ ή ισοδύναμα } y''-3y'+2y=5e^x$$

Η ομογενής είναι η $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y^x=0$ ή ισοδύναμα $y''-3y'+2y=0$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $r^2-3r+2=0$ με ρίζες το 1 και το 2.

Οπότε η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι $y_o(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}$

Η μερική λύση της μη ομογενούς, σύμφωνα με τον πίνακα, θα έχει τη μορφή $y_m(x)=Axe^x$ αφού το *r=1* είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

Η πρώτη παράγωγος είναι $y_m'(x)=A(xe^x+e^x)$ και η δεύτερη παράγωγος είναι $y_m''(x)=A(xe^x+2e^x)$

Οπότε αντικαθιστώντας έχουμε

$$A(xe^x+2e^x)-3A(xe^x+e^x)+2Axe^x=5e^x\Leftrightarrow$$
$$Ax+2A-3Ax-3A+2xA=5\Leftrightarrow A=-5$$

Οπότε $y_m(x)=-5xe^x$ και η λύση τελικά

$$y(x)=y_o(x)+y_m(x)=-5xe^x+C_1e^x+C_2e^{2x}$$

Παράδειγμα: Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+9y=e^{3x} \text{ ή ισοδύναμα } y''-6y'+9y=e^{3x}$$

Η ομογενής είναι η $\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+9y=0$ ή ισοδύναμα $y''-6y'+9y=0$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $r^2-6r+9=0$ με διπλή ρίζα το 3 .

Οπότε η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι $y_o(x)=(C_1x+C_2)e^{3x}$

Η μερική λύση της μη ομογενούς, σύμφωνα με τον πίνακα, θα έχει τη μορφή $y_m(x)=Ax^2e^{3x}$ αφού το *r=3* είναι διπλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

Η πρώτη παράγωγος είναι $y_m'(x)=A(3x^2e^{3x}+2xe^{3x})$ και η δεύτερη παράγωγος είναι

$$y_m''(x) = A(9x^2e^{3x} + 6xe^{3x} + 6xe^{3x} + 2e^{3x}) = A(9x^2e^{3x} + 12xe^{3x} + 2e^{3x})$$

Οπότε αντικαθιστώντας έχουμε

$$A(9x^2e^{3x} + 12xe^{3x} + 2e^{3x}) - 6A(3x^2e^{3x} + 2xe^{3x}) + 9Ax^2e^{3x} = e^{3x} \Leftrightarrow$$
$$9Ax^2 + 12Ax + 2A - 18Ax^2 - 12Ax + 9Ax^2 = 1 \Leftrightarrow 2A = 1 \Leftrightarrow A = 1/2$$

Οπότε $y_m(x) = \frac{1}{2}x^2e^{3x}$ και η λύση τελικά

$$y(x) = y_o(x) + y_m(x) = \frac{1}{2}x^2e^{3x} + \left(C_1x + C_2\right)e^{3x}$$

Παράδειγμα: Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 5e^x - \sin\left(2x\right) \text{ ή ισοδύναμα } y'' - y' = 5e^x - \sin\left(2x\right)$$

Η ομογενής είναι η $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$ ή ισοδύναμα $y'' - y' = 0$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $r^2 - r = 0$ με ρίζες το 1 και το 0.

Οπότε η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι $y_o(x) = C_1e^x + C_2$

Η μερική λύση της μη ομογενούς, σύμφωνα με τον πίνακα, θα έχει τη μορφή $y_m(x) = Axe^x + B\cos\left(2x\right) + C\sin\left(2x\right)$ αφού το $r=1$ είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου και το $r=2$ δεν είναι απλή ρίζα του.

Η πρώτη παράγωγος είναι $y_m'(x) = A(xe^x + e^x) - 2B\sin\left(2x\right) + 2C\cos\left(2x\right)$ και η δεύτερη παράγωγος είναι $y_m''(x) = A(xe^x + 2e^x) - 4B\cos\left(2x\right) - 4C\sin\left(2x\right)$

Οπότε αντικαθιστώντας έχουμε

$$A(xe^x + 2e^x) - 4B\cos\left(2x\right) - 4C\sin\left(2x\right) - \left(A(xe^x + e^x) - 2B\sin\left(2x\right) + 2C\cos\left(2x\right)\right) =$$
$$= 5e^x - \sin\left(2x\right)$$

από όπου οδηγούμαστε στο σύστημα

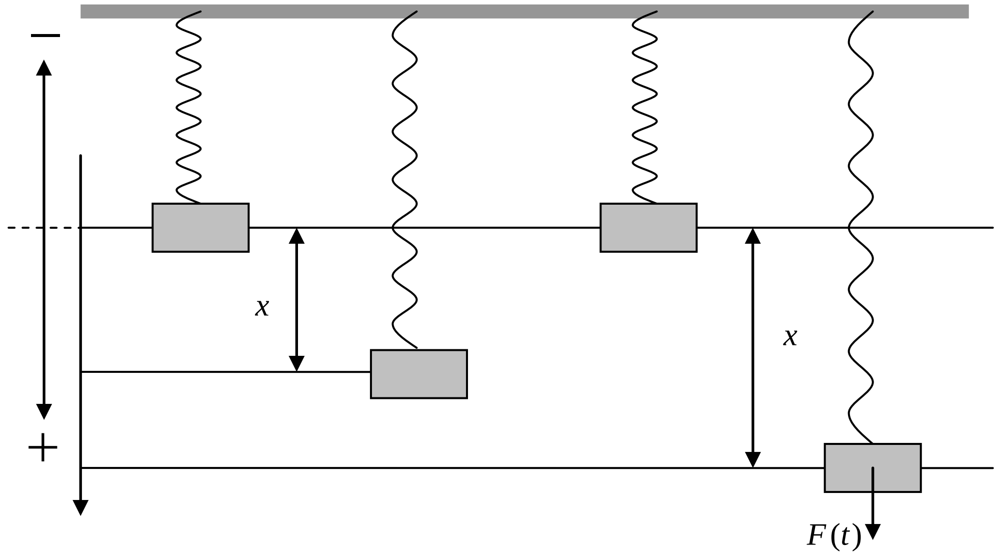
$$\left.\begin{array}{r} A = 5 \\ 4B + 2C = 0 \\ 2B - 4C = -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow A = 5,\ \ B = -\frac{1}{10},\ \mathrm{C} = \frac{1}{5}$$

Οπότε $y_m(x) = 5xe^x - \frac{1}{10}\cos\left(2x\right) + \frac{1}{5}\sin\left(2x\right)$ και η λύση τελικά

$$y(x) = y_o(x) + y_m(x) = 5xe^x - \frac{1}{10}\cos\left(2x\right) + \frac{1}{5}\sin\left(2x\right) + C_1e^xx + C_2.$$

8.4 Εφαρμογές:

α) Το σύστημα σώμα-ελατήριο



Κατά την ταλάντωση σώματος μάζας m συνδεδεμένο με ελατήριο που βρίσκεται σε μέσο του οποίου η αντίσταση είναι ανάλογη της ταχύτητας του σώματος, η απομάκρυνση $x = x(t)$ του σώματος από τη θέση ισορροπίας ικανοποιεί τη δ.ε.:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + ax = 0 \text{ ή ισοδύναμα } mx'' + \beta x' + ax = 0$$

Όπου α είναι η σταθερά του ελατηρίου και β ο συντελεστής αντίστασης του μέσου. Αυτή είναι μία ομογενής δ.ε. δευτέρας τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Εάν στο σώμα ασκείται μία δύναμη $F(t)$ τότε την κίνηση κυβερνά μία μη ομογενής δ.ε. δευτέρας τάξης με σταθερούς συντελεστές η

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + ax = F(t) \text{ ή ισοδύναμα } mx'' + \beta x' + ax = F(t)$$

Ας περιοριστούμε στην πρώτη περίπτωση.

Παράδειγμα

Σώμα με μάζα $m = 1/20\, gr$ είναι συνδεδεμένο με κατακόρυφο ελατήριο με σταθερά $a = 5/2 \text{ gr/sec}^2$. Ο συντελεστής αντίστασης του μέσου είναι $\beta = 1/10 \text{ gr/sec}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται σε απόσταση 6 cm από το σημείο ισορροπίας και κινείται ανοδικά με ταχύτητα 20 cm/sec. Να εκφραστεί η απομάκρυνση του σώματος σε σχέση με το χρόνο.

Στην περίπτωσή μας έχουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών.

$$\frac{1}{20}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{10}\frac{dx}{dt} + \frac{5}{2}x = 0, \quad x(0) = 6, \quad v(0) = x'(0) = -20$$

Όπου θεωρούμε την ταχύτητα θετική όταν το σώμα κινείται προς τα κάτω.
Οπότε η δ.ε. είναι ισοδύναμα η

$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+50x=0$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $r^2+2r+50=0$ το οποίο έχει ρίζες $r_1=-1+7i,\ \ r_2=-1-7i$. Οπότε $a=-1,\ \ b=7$.

Η γενική λύση είναι της μορφής $x(t)=e^{-t}\left(C_1\cos\left(7t\right)+C_2\sin\left(7t\right)\right)$ και η παράγωγός της $x'(t)=e^{-t}\left(\left(7C_2-C_1\right)\cos\left(7t\right)-\left(7C_1+C_2\right)\sin\left(7t\right)\right)$

Από τις αρχικές συνθήκες οδηγούμαστε στο σύστημα:

$\begin{matrix} C_1=6 \\ 7C_2-C_1=-20 \end{matrix}$ το οποίο έχει λύση $C_1=6, C_2=-2$.

Οπότε η μερική λύση είναι η

$$x(t)=e^{-t}\left(6\cos\left(7t\right)-2\sin\left(7t\right)\right)$$

Στην περίπτωση που η κίνηση γίνεται στο κενό, δηλαδή ο συντελεστής αντίστασης του μέσου β=0, η κίνηση του συστήματος είναι μία αρμονική ταλάντωση και η δ.ε. γράφεται ως

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0,\quad \omega=\sqrt{\frac{a}{m}}\ .$$

Εάν ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες $x(0)=x_0,\ \ v(0)=x'(0)=0$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $r^2+\omega^2=0$ το οποίο έχει ρίζες $r_1=\omega i,\ \ r_2=-\omega i$. Οπότε $a=0,\ \ b=\omega$.

Η γενική λύση είναι της μορφής $x(t)=C_1\cos\left(\omega t\right)+C_2\sin\left(\omega t\right)$ και η παράγωγός της $x'(t)=\left(\omega C_2\cos\left(\omega t\right)-\omega C_1\sin\left(\omega t\right)\right)$

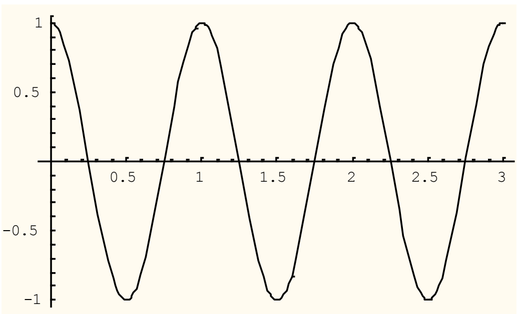
Από τις αρχικές συνθήκες οδηγούμαστε στο σύστημα:

$\begin{matrix} C_1=x_0 \\ \omega C_2=0 \end{matrix}$ το οποίο έχει λύση $C_1=x_0, C_2=0$.

Οπότε η μερική λύση είναι η

$$x(t)=x_0\cos\left(\omega t\right)$$

Που είναι μία απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος x_0 και περίοδο $T=2\pi/\omega$.



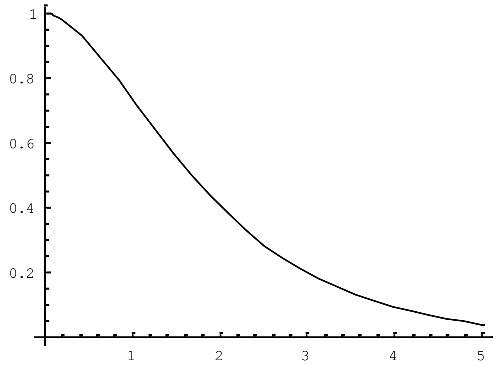
Τώρα στην περίπτωση πού ο συντελεστής αντίστασης του μέσου είναι ανάλογος της ταχύτητας η εξίσωση γράφεται

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0,\quad 2b=\frac{\beta}{m},\quad \omega=\sqrt{\frac{a}{m}}$$

Έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $r^2+2br+\omega^2=0$ το οποίο έχει ρίζες $r_1=-b+\sqrt{b^2-\omega^2}$, $r_2=-b-\sqrt{b^2-\omega^2}$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. $b=\omega$ ή ισοδύναμα $\beta=2\sqrt{a\cdot m}$ οπότε έχουμε μία διπλή ρίζα και η λύση της δ.ε. είναι

$$x(t)=\left(C_1t+C_2\right)e^{-\omega t}$$

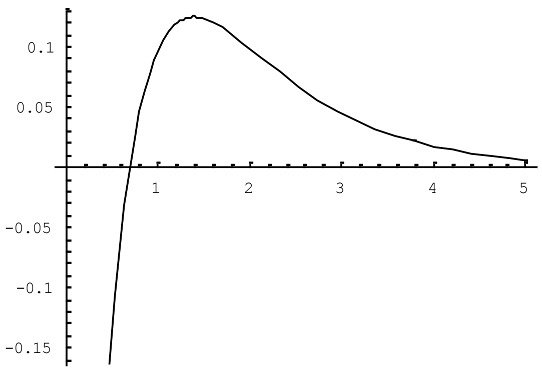


Και το σώμα δεν ταλαντώνεται αφού η ταλάντωση φθίνει όσο ο χρόνος περνά.

2. $b>\omega$ ή ισοδύναμα $\beta>2\sqrt{a\cdot m}$ οπότε έχουμε δύο διαφορετικές ρίζες αρνητικές και η λύση είναι

$$x(t)=\left(C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}\right)$$

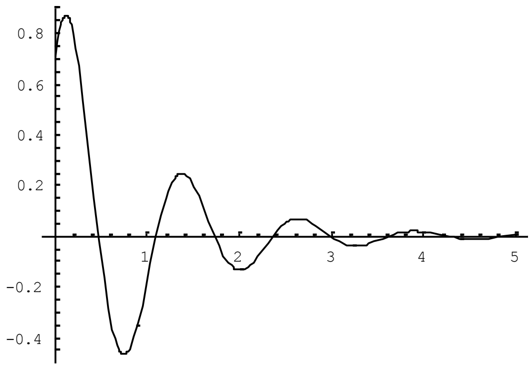
οπότε το σώμα δεν ταλαντώνεται αφού η ταλάντωση φθίνει όσο ο χρόνος περνά.



3. $b<\omega$ ή ισοδύναμα $\beta<2\sqrt{a\cdot m}$ οπότε έχουμε δύο μιγαδικές ρίζες $r_1=-b+ki$ και $r_2=-b-ki$, όπου έχουμε θέσει $k^2=\omega^2-b^2$, και η λύση είναι $x(t)=e^{-bt}\left(C_1\cos\left(kt\right)+C_2\sin\left(kt\right)\right)$.

Άμα θεωρήσουμε $C_1=C\cos\left(\varphi\right)$, $C_2=C\sin\left(\varphi\right)$ όπου $\tan\left(\varphi\right)=\dfrac{C_2}{C_1}$ και $C=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$ και την ταυτότητα $\cos(kt-\varphi)=\cos\left(\varphi\right)\cos\left(kt\right)+\sin\left(\varphi\right)\sin\left(kt\right)$ η λύση μπορεί ισοδύναμα να γραφεί ως $x(t)=Ce^{-bt}\cos\left(kt-\varphi\right)$.

Από εδώ βλέπουμε ότι έχουμε μία φθίνουσα ταλάντωση όσο ο χρόνος περνά. Η ταλάντωση αυτή έχει περίοδο $T=2\pi/k$ σταθερή αλλά το πλάτος της είναι μεταβλητό Ce^{-bt} και όσο μεγαλύτερο είναι το b τόσο γρηγορότερα αποβαίνει η ταλάντωση.



β) Το λογιστικό πληθυσμιακό μοντέλο.

Έστω σε ένα πληθυσμιακό μοντέλο όπου $P=P(t)$ είναι ο αριθμός ενός είδους (π.χ. ο πληθυσμός από κουνέλια ή ο αριθμός των κυττάρων μαγιάς σε ένα θρεπτικό υγρό), κατά τη διάρκεια μίας μικρής χρονικής περιόδου Δt, ένα ποσοστό του πληθυσμού γεννιέται και ένα άλλο πεθαίνει. Εάν ονομάσουμε k το ποσοστό γεννήσεων μείον το ποσοστό θανάτων τότε ο μέσος ρυθμός μεταβολής θα είναι

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = kP(t) .$$

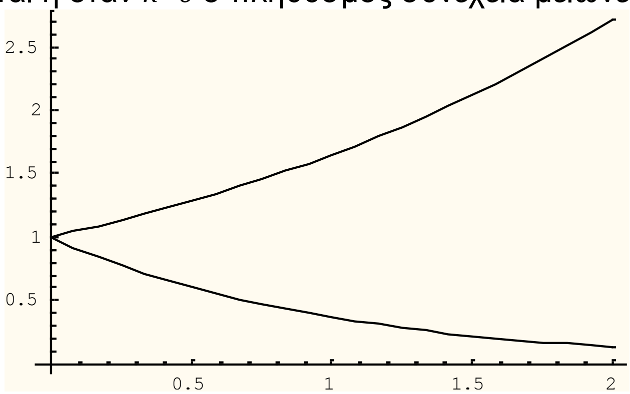
Παίρνοντας το Δt να μικραίνει τότε ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού ικανοποιεί το **εκθετικό** πληθυσμιακό μοντέλο.

$$\frac{dP}{dt} = kP(t) \text{ ή ισοδύναμα } P'(t) = kP(t) \quad .$$

Αυτή είναι μία δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών από όπου έχουμε

$$\frac{dP}{dt} = kP(t) \Leftrightarrow \frac{dP}{P(t)} = kdt \Leftrightarrow \int \frac{dP}{P(t)} = \int kdt \Leftrightarrow \ln|P(t)| = kt + c \Leftrightarrow P(t) = \pm e^{kt+c} \Leftrightarrow P(t) = Ce^{kt}$$

όπου $C = e^c$ και $|P(t)| = P(t) > 0$. Είναι φανερό ότι όταν $k>0$ ο πληθυσμός συνέχεια αυξάνεται ή όταν $k<0$ ο πληθυσμός συνέχεια μειώνεται.



Ένα περιβάλλον έχει πεπερασμένα αποθέματα τροφής ή ο πληθυσμός επηρεάζεται από άλλους παράγοντες, αυτό σημαίνει ότι δεν είναι δυνατό να αυξάνεται συνέχεια όταν ο πληθυσμός προσεγγίσει τον οριακό ανώτατο πληθυσμό που μπορεί να θραφεί στο σύστημα αυτό (ας το συμβολίσουμε με Μ) ή φέρουσα ικανότητα όπως ονομάζεται τα αποθέματα τροφής σπανίζουν και ο ρυθμός μεταβολής (αύξησης όταν είναι θετικός) μειώνεται. Είναι πιο λογικό να θεωρήσουμε το ρυθμό μεταβολής $k = r(M - P)$ όπου $r > 0$ σταθερά.

Έτσι οδηγούμαστε στο λογιστικό πληθυσμιακό μοντέλο

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P(t))P(t) \text{ ή ισοδύναμα } P'(t) = r(M - P(t))P(t)$$

Παράδειγμα

Εάν γνωρίσουμε ότι μία μικρή λίμνη μπορεί να θρέψει ένα πληθυσμό το πολύ 100 ψαριών. Προς το παρόν ζουν μόνο 10 ψάρια σε αυτήν. Εάν η σταθερά της λογιστικής διαφορικής εξίσωσης $r = 0.001$υπολογίστε σε ποια χρονική στιγμή ο πληθυσμός θα αποτελείται από 50 άτομα.

Η δ.ε. είναι η $\frac{dP}{dt} = 0.001(100 - P(t))P(t)$και είναι χωριζόμενων μεταβλητών.

$$\frac{dP}{dt} = 0.001(100 - P(t))P(t) \Leftrightarrow \frac{dP}{(100 - P(t))P(t)} = 0.001dt$$

Όμως

$$\frac{1}{(100 - P(t))P(t)} = \frac{A}{(100 - P(t))} + \frac{B}{P(t)} = \frac{AP(t) + B(100 - P(t))}{(100 - P(t))P(t)} = \frac{(A - B)P(t) + 100B}{(100 - P(t))P(t)}$$

Από όπου έχουμε $A - B = 0,\ \ 100B = 1$οπότε $A = B = 1/100$ και τελικά

$$\frac{dP}{(100 - P(t))P(t)} = 0.001dt \Leftrightarrow \frac{1}{100}\frac{dP}{P(t)} + \frac{1}{100}\frac{dP}{(100 - P(t))} = 0.001dt \Leftrightarrow$$

$$\frac{dP}{P(t)} + \frac{dP}{(100 - P(t))} = 0.1dt \Leftrightarrow \int \frac{dP}{P(t)} + \int \frac{dP}{(100 - P(t))} = \int 0.1dt \Leftrightarrow$$

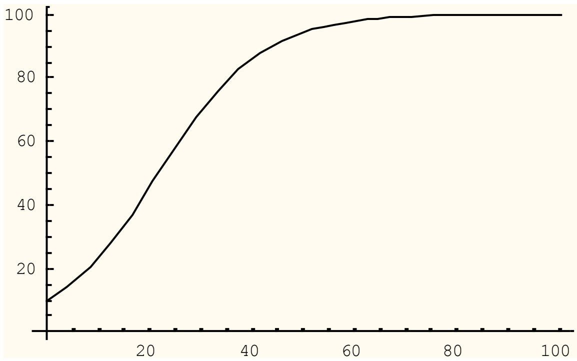
$$\ln|P(t)| - \ln|100 - P(t)| = 0.1t + c \Leftrightarrow \ln\frac{|P(t)|}{|100 - P(t)|} = 0.1t + c \Leftrightarrow$$

$$\frac{|P(t)|}{|100 - P(t)|} = e^{0.1t + c} \overset{0 \le P(t) < 100}{\Leftrightarrow} \frac{P(t)}{100 - P(t)} = e^{0.1t + c} \Leftrightarrow \frac{100 - P(t)}{P(t)} = e^{-0.1t - c} \Leftrightarrow$$

$$\frac{100}{P(t)} - 1 = e^{-0.1t - c} \Leftrightarrow \frac{100}{P(t)} = 1 + e^{-0.1t - c} \Leftrightarrow P(t) = \frac{100}{1 + e^{-0.1t - c}} = \frac{100}{1 + Ce^{-0.1t}}$$

Εφόσον $P(0) = 10$ έχουμε $10 = \frac{100}{1 + C} \Leftrightarrow C = 9$, οπότε η μερική λύση είναι η

$$P(t) = \frac{100}{1 + 9e^{-0.1t}}\ .$$



Τώρα ζητάμε να βρούμε το t ώστε

$$P(t) = 50 = \frac{100}{1 + 9e^{-0.1t}} \Leftrightarrow 1 + 9e^{-0.1t} = 2 \Leftrightarrow 9e^{-0.1t} = 1 \Leftrightarrow e^{0.1t} = 9 \Leftrightarrow 0.1t = \ln 9 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 9}{0.1} \approx 22$$

άρα μετά από 22 χρόνια θα συμβεί να έχουμε ένα πληθυσμό 50 ατόμων.

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η ολοκληρωτική καμπύλη της δ.ε. $2xy' - y = 0,\ x > 0$ η οποία περνά από το σημείο (4,1) του επιπέδου Oxy.

Παρατήρηση: Η εκφώνηση αυτή είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη:

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $2x\dfrac{dy}{dx} - y = 0,\ y(4) = 1$.

Λύση

Παρατηρώ ότι

$2x\dfrac{dy}{dx} - y = 0 \Leftrightarrow 2x\dfrac{dy}{dx} = y \Leftrightarrow \dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2x} \Leftrightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{2x}$ οπότε η δ.ε. είναι χωριζόμενων μεταβλητών και έχουμε ισοδύναμα:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2x} \Leftrightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x| + c \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln|y| = \ln\sqrt{x} + \ln c_1 \Leftrightarrow$$

$$\ln|y| = \ln\left(c_1\sqrt{x}\right) \Leftrightarrow |y| = c_1\sqrt{x} \Leftrightarrow y = \pm c_1\sqrt{x} \Leftrightarrow y = C\sqrt{x}$$

Όπου $C = \pm c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \ 0\ $.

Όπου έχουμε λάβει υπόψη μας ότι $x > 0 \Rightarrow |x| = x$, τις ιδιότητες των λογαρίθμων $a\ln(b) = \ln\left(b^a\right)$ και $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$ και ότι $x^{1/2} = \sqrt{x}$.

Αφού ζητάμε $y(4) = 1$ αντικαθιστώντας έχουμε $y = C\sqrt{x} \Leftrightarrow 1 = C\sqrt{4} \Leftrightarrow C = \dfrac{1}{2}$

Οπότε η ολοκληρωτική καμπύλη είναι η $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$.

2. Να λυθεί η δ.ε. $y' = \dfrac{2x - y}{x - 2y}$ ή ισοδύναμα $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y}{x - 2y}$

Λύση

Διαιρώντας και αριθμητή και παρονομαστή με x έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - 2y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2 - \frac{y}{x}}{1 - 2\frac{y}{x}} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Σύμφωνα με όσα είπαμε στη θεωρία αν θέσουμε $u = \dfrac{y}{x}$, οπότε:

$$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$$

Έτσι έχουμε

$\dfrac{dy}{dx} = F\left(\dfrac{y}{x}\right) \Leftrightarrow \dfrac{du}{dx}x + u = F(u) \Leftrightarrow \dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{F(u) - u}$ που είναι χωριζόμενων μεταβλητών, στην περίπτωσή μας

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{F(u) - u} = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{du}{\frac{2 - u}{1 - 2u} - u} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{(1 - 2u)du}{(2 - u) - (1 - 2u)u} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{(1 - 2u)du}{(2 - u) - (1 - 2u)u} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{(2u - 1)du}{2\left(u^2 - u + 1\right)} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{\left(u^2 - u + 1\right)' du}{2\left(u^2 - u + 1\right)} \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(u^2-u+1\right)}{\left(u^2-u+1\right)} \Leftrightarrow \ln|x| = -\frac{1}{2}\ln\left(u^2-u+1\right)+c \Leftrightarrow$$

$$\ln|x| = c+\ln\left(u^2-u+1\right)^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow |x| = e^c e^{\ln\left(u^2-u+1\right)^{-\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow |x| = C\left(u^2-u+1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{u^2-u+1} = C\frac{1}{|x|} \Leftrightarrow u^2-u+1 = \frac{C^2}{x^2} \Leftrightarrow \frac{y}{x^2}^{2} - \frac{y}{x}+1 = \frac{C^2}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$y^2 - yx + x^2 = C^2$$

Όπου έχουμε χρησιμοποιήσει ότι $e^{\ln(a)} = a$, $x^{1/2} = \sqrt{x}$ και ότι το τριώνυμο u^2-u+1 είναι πάντα θετικό αφού έχει διακρίνουσα -3 αρνητική οπότε το πρόσημό του θα είναι πάντα ομόσημο του συντελεστή του μεγιστοβαθμίου. Οπότε $\left|u^2-u+1\right| = u^2-u+1$.

Εναλλακτικά θέτοντας $y=ux$ και $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x+u$ έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-2y} \Leftrightarrow \frac{du}{dx}x+u = \frac{2x-ux}{x-2ux} \Leftrightarrow \frac{du}{dx}x = \frac{2-u}{1-2u}-u \Leftrightarrow \frac{du}{dx}x = -\frac{2\left(u^2-u+1\right)}{\left(2u-1\right)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{(2u-1)du}{2\left(u^2-u+1\right)} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{\left(u^2-u+1\right)' du}{2\left(u^2-u+1\right)} \Leftrightarrow ..... \Leftrightarrow x^3\left(1+3u^2\right) = C$$

Τελικά η γενική λύση είναι η $y = y(x)$ που ικανοποιεί την

$$y^2 - yx^2 + x^2 = C^2 .$$

3. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'+2xy+x = e^{-x^2}$ ή ισοδύναμα $\frac{dy}{dx}+2xy+x = e^{-x^2}$.

Λύση

$\frac{dy}{dx}+2xy+x = e^{-x^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}+2xy = e^{-x^2}-x$ Οπότε είναι μία δ.ε. γραμμική πρώτης τάξης μιας και μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y = q(x)$$

Όπου $p(x) = 2x, q(x) = e^{-x^2}-x$.

Το $h(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 2xdx} = e^{x^2}$

Οπότε η λύση είναι

$$y(x) = \frac{1}{h(x)}\int h(x)q(x)dx = \frac{1}{e^{x^2}}\int\left(e^{-x^2}-x\right)e^{x^2}dx = \frac{1}{e^{x^2}}\int\left(1-xe^{x^2}\right)dx = \frac{1}{e^{x^2}}\left(\int dx - \frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2\right) =$$

$$= \frac{1}{e^{x^2}}\left(c+x-\frac{1}{2}e^{x^2}\right) = (x+c)e^{-x^2}-\frac{1}{2}$$

4. Βρείτε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+9y = 0$

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $r^2+6r+9=0$ το οποίο έχει διπλή ρίζα *r_1=-3*
Η γενική λύση είναι της μορφής $y(x)=\left(C_1x+C_2\right)e^{-3x}$

5. Βρείτε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$.

Λύση
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $r^2=0$ το οποίο έχει διπλή ρίζα *r_1=0*
Η γενική λύση είναι της μορφής $y(x)=\left(C_1x+C_2\right)e^{0x}=\left(C_1x+C_2\right)$

6. Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+6y=0,\quad y(0)=1,y'(0)=0$$

Λύση
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $r^2+5r+6=0$ το οποίο έχει ρίζες *r_1=-3,r_2=-2.*
Η γενική λύση είναι της μορφής $y(x)=C_1e^{-3x}+C_2e^{-2x}$ και η παράγωγός της $y'(x)=-3C_1e^{-3x}-2C_2e^{-2x}$

Από τις αρχικές συνθήκες οδηγούμαστε στο σύστημα:

$\begin{matrix} C_1+C_2=1 \\ -3C_1-2C_2=0 \end{matrix}$ το οποίο έχει λύση $C_1=-2,C_2=3$. Οπότε η μερική λύση είναι η

$$y(x)=-2e^{-3x}+3e^{-2x}$$

7. Βρείτε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=0$

Λύση
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $r^2+r=0$ το οποίο έχει ρίζες *r_1=0,r_2=-1.*
Η γενική λύση είναι της μορφής $y(x)=C_1e^{0x}+C_2e^{-1x}=C_1+C_2e^{-x}$

8. Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+5y=0,\quad y(0)=1,y'(0)=1$$

Λύση
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $r^2+2r+5=0$ το οποίο έχει ρίζες $r_1=-1+2i,\ r_2=-1-2i$. Οπότε $\alpha=-1,\ \beta=2$.
Η γενική λύση είναι της μορφής $y(x)=e^{-x}\left(C_1\cos\left(2x\right)+C_2\sin\left(2x\right)\right)$ και η παράγωγός της $y'(x)=e^{-x}\left(\left(2C_2-C_1\right)\cos\left(2x\right)-\left(2C_1+C_2\right)\sin\left(2x\right)\right)$

Από τις αρχικές συνθήκες οδηγούμαστε στο σύστημα:

$\begin{matrix} C_1=1 \\ 2C_2-C_1=1 \end{matrix}$ το οποίο έχει λύση $C_1=1,C_2=1$.

Οπότε η μερική λύση είναι η

$$y(x) = e^{-x}\left(\cos\left(2x\right) + \sin\left(2x\right)\right)$$

9. Λύστε τη διαφορική εξίσωση $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^2$, όταν γνωρίζουμε ότι η μερική λύση έχει τη μορφή $y_m = Dx^2 + Ex + F$.

Λύση

Η ομογενής είναι η $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $r^2 + 1 = 0$ το οποίο έχει ρίζες $r_1 = i,\ r_2 = -i$. Οπότε $\alpha = 0,\ \beta = 1$.

Η γενική λύση είναι της μορφής $y_0(x) = e^{-0x}\left(C_1\cos\left(x\right) + C_2\sin\left(x\right)\right) = \left(C_1\cos\left(x\right) + C_2\sin\left(x\right)\right)$.

Η πρώτη παράγωγος της μερικής λύσης είναι $y_m{}'(x) = 2Dx + E$ και η δεύτερη παράγωγος είναι $y_m{}''(x) = 2D$

Οπότε αντικαθιστώντας έχουμε

$2D + Dx^2 + Ex + F = x^2$ από όπου οδηγούμαστε στο σύστημα

$$\left.\begin{aligned} D &= 1 \\ E &= 0 \\ 2D + F &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow F = -2D = -2$$

Οπότε $y_m = x^2 - 2$ και η λύση τελικά

$$y(x) = y_o(x) + y_m(x) = x^2 - 2 + C_1\cos\left(x\right) + C_2\sin\left(x\right)$$

10 Λύστε τη διαφορική εξίσωση $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 4e^x$, όταν γνωρίζουμε ότι η μερική λύση έχει τη μορφή $y_m = Axe^x$.

Λύση

Η ομογενής είναι η $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $r^2 - 1 = 0$ το οποίο έχει ρίζες $r_1 = 1,\ r_2 = -1$.

Η γενική λύση είναι της μορφής $y_0(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}$.

Η πρώτη παράγωγος της μερικής λύσης είναι $y_m{}'(x) = Ae^x + Axe^x$ και η δεύτερη παράγωγος είναι $y_m{}''(x) = 2Ae^x + Axe^x$

Οπότε αντικαθιστώντας έχουμε

$2Ae^x = 4e^x$ από όπου οδηγούμαστε στο *A*=*2* .

Οπότε $y_m = 2xe^x$ και η λύση τελικά

$$y(x) = y_o(x) + y_m(x) = 2xe^x + C_1e^x + C_2e^{-x}$$

11. Λύστε την ακόλουθη ομογενή διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης:

Λύση

Μετατρέπουμε την διαφορική εξίσωση στη μορφή $\frac{dy}{dx} = F\left(x, y\right)$.

$$(x+(x-y)e^{y/x})dx + xe^{y/x}dy = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x+(x-y)e^{y/x}}{xe^{y/x}}$$

Για την $F(x,y) = -\frac{x+(x-y)e^{y/x}}{xe^{y/x}}$ ισχύει

$$F(\lambda x, \lambda y) = -\frac{\lambda x+(\lambda x-\lambda y)e^{(\lambda y)/(\lambda x)}}{\lambda xe^{(\lambda y)/(\lambda x)}} = -\frac{x+(x-y)e^{y/x}}{xe^{y/x}} = F(x,y)$$

Οπότε η διαφορική εξίσωση μπορεί να μετατραπεί σε χωριζόμενων μεταβλητών εάν θέσουμε $u = \frac{y}{x}$, και ισοδύναμα

$$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u\cdot x' = \frac{du}{dx}x + u$$

Αντικαθιστούμε και έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+(x-y)e^{y/x}}{xe^{y/x}} \Leftrightarrow \frac{du}{dx}x + u = -\frac{x+(x-ux)e^{u}}{xe^{u}} \Leftrightarrow \frac{du}{dx}x = -\frac{x+(x-u)e^{u}}{xe^{u}} - u \Leftrightarrow$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{-x-(x-xu)e^{u}-xue^{u}}{xe^{u}} \Leftrightarrow \frac{du}{dx}x = \frac{-x-xe^{u}}{xe^{u}} \Leftrightarrow \frac{e^{u}du}{1+e^{u}} = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{e^{u}}{1+e^{u}}du = -\int \frac{dx}{x} + C \overset{t=e^{u}+1}{\Leftrightarrow}$$

$$\int \frac{1}{t}dt = -\int \frac{dx}{x} + C \Leftrightarrow \ln|t| = -\ln|x| + C \Leftrightarrow \ln\left|e^{u}+1\right| + \ln|x| = C \Leftrightarrow \ln\left(\left(e^{u}+1\right)|x|\right) = C \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{u}+1\right)|x| = e^{C} \overset{C_1=e^{C}}{\Leftrightarrow} e^{u}+1 = \frac{C_1}{|x|} \Leftrightarrow e^{y/x} = \frac{C_1}{|x|} - 1 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \ln\left(\frac{C_1}{|x|} - 1\right) \Leftrightarrow y = x\ln\left(\frac{C_1}{|x|} - 1\right),$$

με $\frac{C_1}{|x|} - 1 > 0.$

12. Αρχικά υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{dy}{y(y-4)}$ και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την μέθοδο χωριζόμενων μεταβλητών λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' = xy(y-4)$ ή $\frac{dy}{dx} = xy(y-4),\ y(0) = 6$.

Λύση

Αναλύουμε το κλάσμα:

$$\frac{1}{y(y-4)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-4} \Leftrightarrow \frac{1}{y(y-4)} = \frac{Ay-4A+By}{y(y-4)} \Leftrightarrow \frac{1}{y(y-4)} = \frac{\left(A+B\right)y-4A}{y(y-4)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = -A = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\int \frac{dy}{y(y-4)} = -\frac{1}{4}\int \frac{dy}{y} + \frac{1}{4}\int \frac{dy}{y-4} = \frac{1}{4}\ln|y-4| - \frac{1}{4}\ln|y| + C = \frac{1}{4}\ln\frac{|y-4|}{|y|} + C$$

Θα βρούμε πρώτα τη γενική λύση, Παρατηρούμε ότι η δ.ε. είναι χωριζόμενων μεταβλητών

$$\frac{dy}{dx} = xy(y-4) \Leftrightarrow \frac{dy}{y(y-4)} = xdx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y(y-4)} = \int xdx$$

$$\int \frac{dy}{y(y-4)} = \int xdx \Leftrightarrow \frac{1}{4}\ln\frac{|y-4|}{|y|} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{|y-4|}{|y|} = 2x^2 + C' \Leftrightarrow \left|\frac{y-4}{y}\right| = e^{2x^2}c_1 \Leftrightarrow \frac{y-4}{y} = \pm c_1 e^{2x^2}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{4}{1-ce^{2x^2}}, \quad c = \pm c_1 \in \mathbb{R}$$

Έτσι έχουμε τη γενική λύση $y(x) = \dfrac{4}{1-ce^{2x^2}}, \quad c \in \mathbb{R}$

Από την αρχική συνθήκη έχουμε

$$y(0) = 6 \Leftrightarrow y(0) = \frac{4}{1-ce^0} = 6 \Leftrightarrow c = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Η μερική λύση που ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών είναι

$$y(x) = \frac{4}{1-\frac{1}{3}e^{2x^2}} = \frac{12}{3-e^{2x^2}}.$$

13. Έστω ότι τώρα το κύκλωμα οποίο αποτελείται από μία πηγή ηλεκτρεργετικής δύναμης *E (Volt)*, η οποία είναι σταθερή *E=300 Volt,* πηνίο αυτεπαγωγής *l=2 (Herny)*, ωμική αντίσταση *R=10 (Ohm)* και διακόπτη *Δ*, συνδεδεμένα σε σειρά. Τη χρονική στιγμή *t=0* , δεν διαπερνά ρεύμα το κύκλωμα (δηλαδή *i(0)=0),* ο διακόπτης κλείνει και ζητείται να προσδιοριστεί η τιμή του ρεύματος *i=i(t)* που αρχίζει να διαρρέει στο κύκλωμα. Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο (των τάσεων) του Kirchoff, ο οποίος μας λέει ότι η ηλεκτρεργετική δύναμη ισοφαρίζει κάθε χρονική στιγμή την πτώση τάσης στο πηνίο $l\dfrac{di}{dt}$ και την πτώση τάσης στην αντίσταση iR, ισχύει $l\dfrac{di}{dt} + iR = E.$
Λύνοντας τη συγκεκριμένη διαφορική εξίσωση με τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών υπολογίστε το $i(t)$ για το συγκεκριμένο κύκλωμα. Χρησιμοποιήστε την αρχική συνθήκη της έντασης του ρεύματος για να καθορίσετε την τιμή της σταθεράς ολοκλήρωσης.
Λύση:

$$l\frac{di}{dt} + iR = E \Leftrightarrow 2\frac{di}{dt} + 10i = 300 \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + 5i = 150 \Leftrightarrow \frac{di}{dt} = 150 - 5i$$

$$\Leftrightarrow \frac{di}{dt} = -5\left(i-30\right) \Leftrightarrow \frac{1}{i-30}\frac{di}{dt} = -5 \Leftrightarrow \int \frac{1}{i-30}\frac{di}{dt}dt = \int -5dt \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{1}{i-30}di = \int -5dt \Leftrightarrow \ln|i-30| = -5t + C \Leftrightarrow |i-30| = e^{-5t+C} \Leftrightarrow$$

$$i - 30 = \pm e^{-5t+C} \Leftrightarrow i = \pm e^{-5t+C} + 30 \Leftrightarrow i(t) = \pm e^{-5t+C} + 30$$

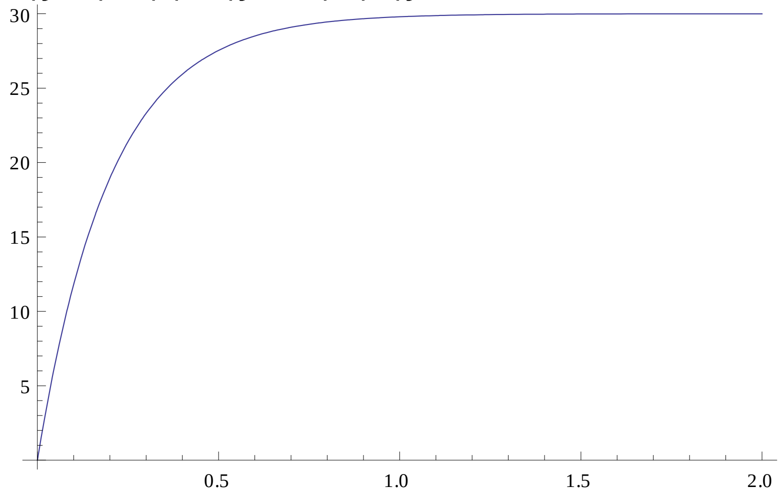
Από την αρχική συνθήκη $i(0)=0$ έχω $i(0)=\pm e^{-5\cdot 0+C}+30 \Leftrightarrow 0=\pm e^{C}+30$

Για να ισχύει αυτό θα πρέπει να δεχθούμε μόνο το αρνητικό πρόσημο οπότε $\Leftrightarrow -e^{C}+30=0 \Leftrightarrow e^{C}=30 \Leftrightarrow C=\ln(30)$

Άρα η σχέση που μας δίνει το ρεύμα στο συγκεκριμένο κύκλωμα είναι

$i(t)=30-30e^{-5t}$

Το γράφημα της συγκεκριμένης συνάρτησης είναι



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στο σύγγραμμα που διανέμεται και στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος. Το περιεχόμενο του αρχείου απλά αποτελεί περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Αποτελούν τις διαφάνειες της διδασκαλίας μαθήματος από το διδάσκοντα για δική του χρήση και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί και να μην αναπαραχθεί και διανεμηθεί για άλλο σκοπό.

Ιδιαίτερα παραδείγματα και σχήματα έχουν αντληθεί από τα συγγράμματα :

1. Thomas Calculus 11th edition, Wier, Hass, Jiordano, Pearson AW
2. Thomas Απειροστικός Λογισμός, Finney, Hass, Jiordano, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης
3. Ανώτερα Μαθηματικά ΙΙ για Μηχανικούς Α. Αθανασιάδη Εκδόσεις Τζιόλα.