

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ

Παπαδόπουλος Περικλής
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΤΕΙ ΠΕΙΡΑΙΑ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1^ο ΜΑΘΗΜΑ

Ορισμός Διαφορικής Εξίσωσης (ΔΕ):

Κάθε εξίσωση, που συσχετίζει μια άγνωστη συνάρτηση με μία ή περισσότερες παραγώγους αυτής, ονομάζεται **διαφορική εξίσωση**. Οι διαφορικές εξισώσεις μπορούν να χωριστούν σε διάφορες κατηγορίες, ανάλογα με τη διάσταση του χώρου στον οποίο ορίζονται, τον αριθμό των εξισώσεων, καθώς και το είδος αυτών.

Συνήθης Δ.Ε. ονομάζεται η Δ.Ε. όπου η άγνωστη συνάρτηση της είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής.

Γενική Μορφή:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad \text{όπου } y = y(x). \quad (1)$$

Εισαγωγή.

Πολλά είναι τα φαινόμενα στα οποία οι μεταβλητές x και y δεν συνδέονται με τη σχέση $y = y(x)$ αλλά υπάρχει σύνδεση και με παραγώγους της μεταβλητής y . **Τέτοια φαινόμενα είναι τα ακόλουθα:**

1. Οι ταλαντώσεις εκκρεμούς.
2. Οι τροχιές δορυφόρων.
3. Κατασκευή πτερυγίων φραγμάτων.
4. Ηλεκτροτεχνική και Ναυπηγική.
5. Σεισμικά κύματα.
6. Ραδιενεργός διάσπαση.
7. Διάδοση κυμάτων.

8. Μετάδοση θερμότητας στους κινητήρες καύσεως.

Ορισμοί:

1. Διαφορική Εξίσωση 1ης τάξεως, είναι η δ.ε. στην οποία η τάξη της παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης είναι 1.

2. Βαθμός Δ.Ε, μιας δ.ε. ονομάζεται η δύναμη στην οποία είναι υψωμένη η παράγωγος ανώτερης τάξης.

3. Λύση ή ολοκλήρωμα Δ.Ε. ονομάζεται κάθε συνάρτηση που επαληθεύει τη δ.ε.

Παράδειγμα:

$$(y')^2 + y^2 = 1. \quad (2)$$

Η $y = \sin(x)$ είναι λύση της (2).

4. Γραμμική Δ.Ε.

Η (1) λέγεται γραμμική όταν η F είναι γραμμική συνάρτηση των $y, y', \dots, y^{(n)}$.

Παράδειγμα:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E.$$

5. Γενική λύση της Δ.Ε.:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

ονομάζεται η συνάρτηση

$$y = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n),$$

όπου c_1, c_2, \dots, c_n αυθαίρετες σταθερές, η οποία περιέχει κάθε λύση της Δ.Ε. εκτός κάποιων που ονομάζονται ιδιάζουσες λύσεις.

Παράδειγμα:

$$(y')^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Γενική Λύση: $y = \sin(x + c)$.

Μερική Λύση: $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

Ιδιάζουσες Λύσεις: $y = 1, y = -1$.

6. Πρόβλημα Αρχικών Τιμών:

Η εξίσωση (1) θεωρούμε ότι ικανοποιεί μια αρχική συνθήκη στο σημείο x_0 αν έχουν δοθεί αριθμοί $c_1, c_2, \dots, c_n \in R$, έτσι ώστε

$$y(x_0) = c_1, y'(x_0) = c_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = c_n.$$

Η εξίσωση (1) και η προηγούμενη συνθήκη συνιστούν ένα **πρόβλημα αρχικών συνθηκών (τιμών)**.

Παράδειγμα: Έστω η ακόλουθη Δ.Ε.

$$y'' + 9y = x \cos x \quad \text{με γενική λύση:}$$

$$y = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) + \frac{1}{8}x \cos x + \frac{1}{32} \sin x$$

Να βρεθεί η **μερική λύση** όταν για $x = 0$ είναι $y = 1$ και $y' = -1$.

I. Δ.Ε. 1ης ΤΑΞΗΣ και 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Γενική Μορφή:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (3)$$

ή ισοδύναμα

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0.$$

1. ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Αν $P(x, y) = \varphi_1(x)f_1(y)$ και $Q(x, y) = \varphi_2(x)f_2(y)$ τότε η (3) γράφεται:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x)f_1(y)dx + \varphi_2(x)f_2(y)dy &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx + \frac{f_2(y)}{f_1(y)}dy &= 0 \Leftrightarrow \\ \int \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx + \int \frac{f_2(y)}{f_1(y)}dy &= 0 \Rightarrow y = \varphi(x, c). \end{aligned}$$

Εφαρμογές:

Εξισώσεις αυτής της μορφής, αποτελούν πρότυπα φαινομένων από διάφορες περιοχές της τεχνολογίας και των επιστημών, όπως Χημεία, Βιολογία, Ιατρική, Ραδιενέργεια, Ηλεκτρισμός, Οικονομία, κ.λ.π

Παράδειγμα (1): Να λυθεί η ακόλουθη Δ.Ε.

$$\begin{aligned}(1 + y^2)dx - (1 + x^2)dy &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{dx}{1 + x^2} &= \frac{dy}{1 + y^2} \Leftrightarrow \\ \int \frac{dx}{1 + x^2} &= \int \frac{dy}{1 + y^2} \Leftrightarrow \\ \text{τοξεφ}x &= \text{τοξεφ}y + c \Rightarrow y = \varepsilon\varphi(\text{τοξεφ}x + c).\end{aligned}$$

Παράδειγμα (2): Να λυθεί η Δ.Ε.:

$$\begin{aligned}L \frac{di}{dt} + Ri &= E \Leftrightarrow L \frac{di}{dt} = E - Ri \Leftrightarrow \\L di &= (E - Ri) dt \Leftrightarrow L \frac{1}{E - Ri} di = dt \Leftrightarrow \\ \frac{L}{R} \frac{di}{\frac{E}{R} - i} &= dt \Leftrightarrow \frac{di}{\frac{E}{R} - i} = \frac{R}{L} dt\end{aligned}$$

Αν ολοκληρώσουμε έχουμε:

$$\begin{aligned}\int \frac{di}{\frac{E}{R} - i} &= \int \frac{R}{L} dt \Leftrightarrow \ln \left| \frac{E}{R} - i \right| = -\frac{R}{L} t + c \Leftrightarrow \\ \left| \frac{E}{R} - i \right| &= e^{-\frac{R}{L} t + c} \Leftrightarrow i = \frac{E}{R} - e^{-\frac{R}{L} t + c},\end{aligned}$$

η οποία είναι και η γενική λύση της Δ.Ε.

Επομένως για $t = 0$, $i = 0$ (αρχικές συνθήκες), έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{E}{R} - e^c \Leftrightarrow e^c = \frac{E}{R}. \text{ Τελικά παίρνουμε ότι:} \\ i &= \frac{E}{R} - e^{-\frac{R}{L} t} e^c = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L} t}).\end{aligned}$$

2^ο ΜΑΘΗΜΑ

2. Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις:

Ορισμός : Η διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$y' = f(x, y);$$

ονομάζεται **ομογενής διαφορική εξίσωση**, αν η f δεν εξαρτάται από τα x, y χωριστά, αλλά από το λόγο x/y . Αυτό ισοδυναμεί με τη σχέση

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y), \quad \text{για κάθε } t > 0.$$

Ορισμός : Ανάλογα, ορίζεται και η ομογενής διαφορική εξίσωση της μορφής

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

όπου οι συντελεστές P, Q , είναι ομογενείς συναρτήσεις του ιδίου βαθμού n .

Παράδειγμα: Η δ.ε. $f(x, y) = x^4 - x^2y^2$ είναι ομογενής 4ου βαθμού. Πράγματι:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^4 x^4 - \lambda^2 x^2 \lambda^2 y^2 = \lambda^4 f(x, y).$$

Επίλυση Ομογενούς Δ.Ε.:

Με τον μετασχηματισμό $y(x) = u(x)x \Leftrightarrow dy = udx + xdu$, η εξίσωση μετατρέπεται σε εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών και λύνεται όπως έχουμε αναφέρει.

Παράδειγμα: Να λυθεί η ακόλουθη δ.ε.

$$(x^2 - 2y^2)dy + 2xydx = 0 \Leftrightarrow x^2 u dx - 2u^3 x^2 dx + x^3 du - 2u^2 x^3 du + 2x^2 u dx = 0$$

Επομένως

$$\begin{aligned} x^2(3u - 2u^3)dx + x^3(1 - 2u^2)du &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{dx}{x} &= -\frac{1 - 2u^2}{3u - 2u^3} du \\ \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} &= -\frac{1}{3} \int \frac{3 - 6u^2}{3u - 2u^3} du \\ \Leftrightarrow 3 \ln x &= -\ln(3u - 2u^3) + \ln C. \end{aligned}$$

Τελικά παίρνουμε

$$x^3(3u - 2u^3) = C \Rightarrow \dots\dots\dots$$