

3. Γραμμική Διαφορική Εξίσωση:

Ορισμός: Μια γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης ως προς x, y έχει τη μορφή

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

όπου $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις ως προς x, y , γραμμικές αλλά όχι ομογενείς.

1η Περίπτωση:

Έστω

$$(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)dx + (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)dy = 0,$$

με $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 0$.

Θέτουμε $\alpha_1 x + \beta_1 y = t$ και έχουμε

$$dy = \frac{dt - \alpha_1 dx}{\beta_1}.$$

Έτσι καταλήγουμε σε εξίσωση χωρισμένων μεταβλητών.

Παράδειγμα:

$$(x + y)dx + (3x + 3y - 4)dy = 0.$$

2η Περίπτωση:

Έστω

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0.$$

Αν (x_0, y_0) είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{aligned}\alpha_1x + \beta_1y &= -\gamma_1 \\ \alpha_2x + \beta_2y &= -\gamma_2,\end{aligned}$$

κάνουμε την αντικατάσταση

$$x = z + x_0, \quad y = w + y_0$$

και καταλήγουμε σε ομογενή δ.ε..

Παράδειγμα:

$$(2x - 5y + 3)dx - (2x + 4y - 6)dy = 0.$$

Λύση του συστήματος: $(x_0 = 1, y_0 = 1)$.

Θέτουμε $x = z + 1, y = w + 1$, όπου έχουμε $dx = dz, dy = dw$. Με αντικατάσταση προκύπτει

$$(2z - 5w)dz - (2z + 4w)dw = 0. \quad (\text{ομογενής})$$

4. Ακριβής (Πήρης) Δ.Ε.:

Ορισμός: Μια διαφορική εξίσωση

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

λέγεται **πλήρης** όταν η ακόλουθη παράσταση $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ είναι το **πλήρες διαφορικό** της συνάρτησης $w(x, y)$. Ισχύει δηλαδή η σχέση

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dw(x, y) = 0.$$

Τότε $w(x, y) = C$.

Πρόταση: Αν ισχύει η σχέση

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (\text{συνθήκη πληρότητας})$$

τότε η παράσταση $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ είναι το **πλήρες διαφορικό** της συνάρτησης $w(x, y)$, που προσδιορίζεται από την ισότητα

$$w(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy,$$

όπου x_0, y_0 αυθαίρετες σταθερές.

Παράδειγμα:

$$(\cos y + y \cos x)dx + (\sin x - x \sin y)dy = 0.$$

Η γενική λύση είναι $x \cos y + y \sin x = C$.

5. Αναγωγή Δ.Ε. σε πλήρη:

Η αναγωγή αυτή γίνεται με τη βοήθεια του **ολοκληρωτικού παράγοντα** ή αλλιώς με τον **πολλαπλασιαστή Euler**.

1η Περίπτωση:

Έστω ότι

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = f(x),$$

τότε αν πολλαπλασιάσουμε την παραπάνω σχέση με τον παράγοντα

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx},$$

γίνεται πλήρης.

Παράδειγμα:

$$(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$$

2η Περίπτωση:

Ανάλογα αν

$$\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = -f(y),$$

τότε ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι ο

$$\mu(y) = e^{\int f(y) dy}.$$

Παράδειγμα:

Να λυθεί η ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$y(x + y + 1)dx + x(x + 3y + 2)dy = 0$$

Εδώ ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι

$$\mu(y) = e^{\ln |y|} = |y|.$$

Προκύπτει ότι η γενική λύση είναι

$$xy^2(x + 2y + 2) = C.$$

3^ο ΜΑΘΗΜΑ

6. Εύρεση δ.ε. όταν είναι γνωστή η λύση της

1ο Βήμα:

Παραγωγίζουμε τη δοσμένη λύση της δ.ε. τόσες φορές όσες παραμέτρους έχει.

2ο Βήμα:

Απαλείφουμε τις παραμέτρους μεταξύ των σχέσεων που προκύπτουν από τις παραγωγίσεις και της δοσμένης.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η δ.ε. όταν η γενική της λύση είναι η

$$y(x) = c_1x + c_2 - 2x^{-1}.$$

Έχουμε ότι

$$y' = c_1 - 2c_2x^{-3}, \quad y'' = 6c_2x^{-4}.$$

Με απαλειφή των παραμέτρων βρίσκουμε
ότι,

$$c_2 = \frac{xy' - y}{-3x^{-2}}.$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην y'' βρίσκουμε

$$y'' = \frac{6(xy' - y)x^{-4}}{-3x^{-2}}.$$

Τελικά έχουμε ότι η ζητούμενη δ.ε. είναι
η ακόλουθη

$$y'' + 2y'x^{-1} - 2yx^{-2} = 0.$$

Ορισμοί:

Οικογένεια Καμπυλών:

Έστω η εξίσωση της μορφής

$$F(x, y, c) = 0.$$

Για τις διάφορες τιμές των c η εξίσωση $F(x, y, c) = 0$ γίνεται η εξίσωση μιας ορισμένης καμπύλης. Επομένως ορίζεται μια οικογένεια καμπυλών που εξαρτάται από μία παράμετρο.

Παράδειγμα: $y^2 = cx, \quad F(x, y, c) = 0.$

Περιβάλλουσα οικογένειας καμπυλών:

Ονομάζουμε περιβάλλουσα μιας οικογένειας καμπυλών που εξαρτάται από μια παράμετρο, μια καμπύλη της οποίας κάθε σημείο της είναι σημείο επαφής αυτής με μια καμπύλη από την οικογένεια.

Εξίσωση της Περιβάλλουσας:

Έστω η οικογένεια καμπυλών με εξίσωση

$$F(x, y, c) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

Η εξίσωση της περιβάλλουσας προκύπτει από την απαλοιφή του c μεταξύ των εξισώσεων

$$\begin{aligned} F(x, y, c) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial c}(x, y, c) &= 0. \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Αν δεν απαλοίφεται η c τότε αυτές οι εξισώσεις αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις της περιβάλλουσας καμπύλης.

Εφαρμογή: Να βρεθεί η περιβάλλουσα της οικογένειας των ευθειών

$$x \cos a + y \sin a - R = 0. \quad (1)$$

Με παραγωγή ως προς a έχουμε

$$-x \cos a + y \sin a = 0. \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (4) και (5) ως προς $\cos a$, $\sin a$ και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\cos a &= \frac{-Rx}{-x^2 - y^2} = \frac{Rx}{x^2 + y^2}, \\ \sin a &= \frac{Ry}{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Οπότε έχουμε

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \Rightarrow \frac{R^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

Τελικά βρίσκουμε

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

δηλαδή η περιβάλλουσα καμπύλη είναι ο κύκλος με εξίσωση

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Ανώμαλο σημείο: Το σημείο $M_0(x_0, y_0)$ ονομάζεται ανώμαλο σημείο της καμπύλης με εξίσωση $F(x, y) = 0$ όταν για το σημείο αυτό ισχύουν

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

Παρατήρηση : Τα ανώμαλα σημεία του γεωμετρικού τόπου δεν επαληθεύουν την εξίσωση της περιβάλλουσας της οικογένειας $F(x, y, c) = 0$. Επομένως πρέπει να γίνει έλεγχος κατά πόσο η καμπύλη που προκύπτει από την απαλοιφή του c μεταξύ των εξισώσεων

$$\begin{aligned} F(x, y, c) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial c}(x, y, c) &= 0, \end{aligned}$$

είναι η περιβάλλουσα ή ο γεωμετρικός τόπος των ανώμαλων σημείων.

Εφαρμογή: Να προσδιοριστούν η περιβάλλουσα και τα ανώμαλα σημεία της οικογένειας

$$(y - c)^2 - \frac{2}{3}(x - c)^3 = 0.$$

Ιδιάζουσα Λύση Δ.Ε:

Η καμπύλη της οποίας η εξίσωση ικανοποιεί τη δ.ε. αλλά δεν ανήκει στην οικογένεια του γενικού ολοκληρώματος της δ.ε. ονομάζεται **ιδιάζουσα λύση**.

Εξίσωση ιδιάζουσας λύσης:

Έστω $f(x, y, y') = 0$ με γενικό ολοκλήρωμα $F(x, y, c) = 0$. Αν θέσουμε $y' = p$ η ιδιάζουσα λύση βρίσκεται με απαλοιφή του p μεταξύ των εξισώσεων

$$\begin{aligned} f(x, y, p) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial p}(x, y, p) &= 0. \end{aligned}$$

Εφαρμογή: Η μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων $3cy = c^2x^3 + 9$, αποτελεί τη γενική λύση της εξίσωσης *D' Alembert-Lagrange*

$$x(y')^2 - 3yy' = -9x^2, \quad x > 0.$$

Όμως οι συναρτήσεις $y(x) = \pm 2x^3/2$ αποτελούν ιδιάζουσες λύσεις αφού την επαληθεύουν και δεν προέρχονται από τη γενική λύση.

4^ο ΜΑΘΗΜΑ

II. Γραμμική Εξίσωση 1ης Τάξης

Ορισμός: Καλούμε γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\frac{dy}{dx} + yg(x) = h(x). \quad (3)$$

Επίλυση Γραμμικής Δ.Ε.:

Η σχέση (6) γράφεται

$$\underbrace{[g(x)y - h(x)]}_{dx} + 1dy = 0. \quad (4)$$

Αναζητούμε ολοκληρωτικό παράγοντα ώστε να είναι πλήρης, δηλαδή

$$\frac{\partial P}{\partial y} = g(x), \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Επομένως $\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = g(x)$. Άρα

$$\mu(x) = e^{\int g(x) dx}.$$

Έτσι η σχέση (6) γράφεται

$$\mu(x)y'(x) + \mu(x)y(x)g(x) = \mu(x)h(x). \quad (5)$$

Επίσης έχουμε ότι

$$\mu'(x) = g(x)e^{\int g(x)dx} = g(x)\mu(x).$$

Τελικά η σχέση (6) γράφεται

$$\mu y'(x) + y(x)\mu' = \mu h(x) \Leftrightarrow$$

$$\mu y(x) = \int \mu h(x)dx + C \Leftrightarrow$$

$$y(x) = \mu^{-1} \int \mu h(x)dx + C\mu^{-1} \Leftrightarrow$$

$$y(x) = e^{-\int g(x)dx} [C + \int h(x)e^{\int g(x)dx}].$$

Παρατήρηση:

Πολλές φορές η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική ως προς y .

Παράδειγμα:

$$\frac{dx}{dy} + g(y)x = h(y).$$

Εφαρμογή 1η Να λυθεί η ακόλουθη δ.ε.

$$(x - 2)y' = y + 2(x - 2)^3.$$

Η παραπάνω δ.ε. γράφεται

$$y' - \frac{1}{x - 2}y = 2(x - 2)^2.$$

Επομένως

$$g(x) = -\frac{1}{x - 2}, \quad h(x) = 2(x - 2)^2.$$

Άρα

$$e^{\int g(x)dx} = e^{-\int \frac{dx}{x-2}} = e^{-\ln(x-2)} = \frac{1}{x-2}.$$

Επίσης

$$e^{-\int g(x)dx} = x - 2.$$

Τελικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned} y(x) &= (x - 2)\left[C + \int 2(x - 2)^2 \frac{1}{x - 2} dx\right] \\ &= (x - 2)[C + (x - 2)^2] \\ &= (x - 2)^3 + C(x - 2). \end{aligned}$$

Εφαρμογή 2η Να λυθεί η ακόλουθη δ.ε.

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E_0 \sin \omega t.$$

Έχουμε

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E_0}{L} \sin \omega t.$$

Άρα

$$g(t) = \frac{R}{L}, \quad h(t) = \frac{E_0}{L} \sin \omega t, \quad \mu = e^{\int \frac{R}{L} dt} = e^{\frac{Rt}{L}}$$

Επομένως

$$i(t) = e^{-\frac{Rt}{L}} \left[C + \frac{E_0}{L} \int \sin \omega t e^{\frac{Rt}{L}} dt \right].$$

Αλλά

$$\begin{aligned} \int \sin \omega t e^{\frac{Rt}{L}} dt &= \frac{e^{\frac{Rt}{L}}}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2} \left(\frac{R}{L} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right) \\ &= \frac{L^2 e^{\frac{Rt}{L}}}{R^2 + (L\omega)^2} \left(\frac{R}{L} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right). \end{aligned}$$

III. Εξίσωση Bernoulli

Ορισμός: Η ακόλουθη ημι-γραμμική δ.ε.

$$y' + \alpha(x)y = b(x)y^n, \quad n \in R,$$

αποτελεί την εξίσωση **Bernoulli** τάξης n .

Επίλυση:

Παρατηρούμε ότι όταν $n = 0$ η εξίσωση είναι μη ομογενής γραμμική, ενώ όταν $n = 1$ είναι γραμμικά ομογενής. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $n \neq 0, 1$ και θέτουμε $u = y^{1-n}$. Έτσι $u' = (1 - n)y^{-n}y'$ και η εξίσωση γίνεται

$$u' + (1 - n)\alpha(x)u = (1 - n)b(x),$$

η οποία είναι μη-ομογενής γραμμική. Λύνοντας την τελευταία βρίσκουμε

$$y^{1-n}(x) = e^{-Q(x)} \left[\int^x (1 - n)b(t)e^{Q(t)} dt + C \right],$$

όπου $Q(x) = (1 - n) \int^x \alpha(t) dt$. Λύνοντας ως προς y βρίσκουμε τη γενική λύση της **Bernoulli**.

Παράδειγμα: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + xy = \frac{x}{y^3}, \quad y \neq 0.$$

Βλέπουμε ότι είναι εξίσωση Bernoulli με $n = -3$. Πολλαπλασιάζοντας με τον όρο $4y^3$ έχουμε

$$\begin{aligned} 4y^3 y' + 4xy^4 &= 4x, \\ \frac{d(y^4)}{dx} + 4xy^4 &= 4x. \end{aligned}$$

Θέτουμε $y^4 = u$ οπότε η προηγούμενη γίνεται γραμμική ως προς u ,

$$\frac{du}{dx} + 4xu = 4x,$$

με ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(x) = e^{\int 4x dx} = e^{2x^2}.$$

Έτσι προκύπτει

$$e^{2x^2} u = 4 \int x e^{2x^2} dx + C = e^{2x^2} + C.$$

Αρα η γενική λύση της αρχικής είναι

$$y^4 = 1 + C e^{-2x^2}.$$

IV. Εξίσωση Riccati

Ορισμός: Η συνήθης δ.ε.

$$y'(x) = f_2(x)y^2(x) + f_1(x)y(x) + f_0(x),$$

ονομάζεται εξίσωση **Riccati**. Είναι φανερό ότι, αν $f_2(x) \equiv 0$, τότε γίνεται γραμμική, ενώ αν $f_0(x) \equiv 0$, γίνεται Bernoulli. Για την επίλυση της εξίσωσης διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

I. Αν γνωρίζουμε δύο ειδικές λύσεις φ_1, φ_2 της εξίσωσης, τότε η λύση αυτής δίνεται από τη σχέση

$$y(x) = \frac{\varphi_1(x) \exp f_2(\varphi_2 - \varphi_1)dx - c\varphi_2(x)}{\exp f_2(\varphi_2 - \varphi_1)dx - c}.$$

II. Αν γνωρίζουμε μία ειδική λύση φ_1 , ο μετασχηματισμός

$$y = \varphi_1 + \frac{1}{w},$$

οδηγεί στη γραμμική εξίσωση

$$w' + (2f_2\varphi_1 + f_1)w = -f_2.$$

Παράδειγμα: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση Riccati

$$y' = x^{-1}y^2 + xy + 2x(1 - x^2),$$

όταν γνωρίζουμε ότι η $\varphi_1(x) = x^2$ αποτελεί ειδική λύση αυτής.

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$y = x^2 + \frac{1}{w},$$

οπότε η εξίσωση γίνεται

$$w' + 3xw = -\frac{1}{x},$$

η οποία είναι γραμμική και έχει λύση

$$w(x) = e^{-3x^2/2} \int (-x^{-1})e^{3x^2/2} dx + ce^{-3x^2/2}.$$

Έτσι η γενική λύση της εξίσωσης Riccati είναι

$$y = x^2 + [e^{-3x^2/2} \int (-\frac{1}{x})e^{3x^2/2} dx + ce^{-3x^2/2}]^{-1}$$

5 ^ο ΜΑΘΗΜΑ

V. Δ.Ε. 1ης Τάξης Ανώτερου Βαθμού

Ορισμός: Η γενική μορφή δ.ε. πρώτης τάξης ανώτερου βαθμού είναι η ακόλουθη

$$f(x, y, y') = 0, \text{ ή } f(x, y, \rho) = 0, \text{ με } \rho = \frac{dy}{dx}.$$

1η Περίπτωση:

Η εξίσωση λύνεται ως προς ρ .

Παράδειγμα: Να λυθεί η δ.ε.

$$\rho^2 - 3\rho + 2 = 0. \quad (6)$$

Η εξίσωση (9) γίνεται

$$(\rho - 1)(\rho - 2) = 0 \Rightarrow \rho = 1 \text{ ή } \rho = 2.$$

Επομένως έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = 1 \text{ ή } \frac{dy}{dx} = 2 \Leftrightarrow y = x + c \text{ ή } y = 2x + c.$$

2η Περίπτωση:

Η εξίσωση λύνεται ως προς y .

Παράδειγμα: Να λυθεί η δ.ε.

$$16x^2 + 2y\rho^2 - x\rho^3 = 0. \quad (7)$$

Η εξίσωση (10) γράφεται

$$2y = \rho x - 16\frac{x^2}{\rho^2}.$$

Οπότε αν παραγωγίσουμε ως προς x έχουμε

$$\begin{aligned} 2\rho &= \rho + x\frac{d\rho}{dx} - 32\frac{x}{\rho^2} + 32\frac{x^2}{\rho^3}\frac{d\rho}{dx} \\ \rho^4 + 32x\rho &- x\rho^3\frac{d\rho}{dx} - 32x^2\frac{d\rho}{dx} = 0 \\ \rho(\rho^3 + 32x) &- x\frac{d\rho}{dx}(\rho^3 + 32x) = 0 \\ (\rho^3 + 32x) \times &(\rho - x\frac{d\rho}{dx}) = 0. \end{aligned}$$

Οπότε $\rho^3 + 32x = 0$ (ιδιάζουσα λύση) ή $\rho - x\frac{d\rho}{dx} = 0$ (γενική λύση).

Η **γενική λύση** προκύπτει από την απαλοιφή του ρ από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned}16x^2 + 2y\rho^2 - x\rho^3 &= 0, \\ \rho - x\frac{d\rho}{dx} &= 0.\end{aligned}$$

Επίσης η **ιδιόζουσα λύση** προκύπτει από την απαλοιφή του ρ από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned}16x^2 + 2y\rho^2 - x\rho^3 &= 0, \\ \rho^3 + 32x &= 0.\end{aligned}$$

3η Περίπτωση:

Η εξίσωση λύνεται ως προς x . Τότε παραγωγίζουμε αυτή ως προς y

Παράδειγμα:

$$16y^3y'^2 - 4xy' + y = 0.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}16y^3\rho^2 - 4x\rho + y &= 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{y}{\rho} + 16y^3\rho \Leftrightarrow \\ 4\frac{dx}{dy} &= \frac{\rho - y\frac{d\rho}{dy}}{\rho^2} + 16(3y^2\rho + y^3\frac{d\rho}{dy})\end{aligned}$$

Οπότε παίρνουμε

$$\frac{4}{\rho} = \frac{\rho - y \frac{d\rho}{dy}}{\rho^2} + 48y^2\rho + 16y^3 \frac{d\rho}{dy} \Leftrightarrow$$

$$4\rho = \rho - y \frac{d\rho}{dy} + 48y^2\rho^3 + 16y^3\rho^2 \frac{d\rho}{dy} \Leftrightarrow$$

$$y(16y^2\rho^2 - 1) \frac{d\rho}{dy} + 3\rho(16y^2\rho^2 - 1) = 0$$

Άρα

$$(16y^2\rho^2 - 1)(y \frac{d\rho}{dy} + 3\rho) = 0.$$

Η γενική λύση προκύπτει με απαλοιφή του ρ από τις εξισώσεις

$$16y^3\rho^2 - 4x\rho + y = 0$$
$$y \frac{d\rho}{dy} + 3\rho = 0.$$

Τέλος η ιδιαίζουσα λύση προκύπτει με απαλοιφή του ρ από τις εξισώσεις

$$16y^3\rho^2 - 4x\rho + y = 0$$
$$16y^2\rho^2 - 1 = 0.$$

VI. Δ.Ε. του Clairaut

Γενική Μορφή:

$$y = xy' + g(y').$$

Ισοδύναμα η παραμετρική της μορφή είναι

$$y = xp + g(p), \quad p = y'.$$

Επίλυση: Παραγωγίζουμε ως προς x και έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = p + x \frac{dp}{dx} + g'(p) \frac{dp}{dx} = 0$$

Άρα έχουμε

$$[x + g'(p)] \frac{dp}{dx} = 0.$$

Οπότε $x + g'(p) = 0$ ή $\frac{dp}{dx} = 0$.

Από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε $p = c$. Επομένως η **γενική λύση** είναι

$$y = cx + g(c).$$

Η **ιδιάζουσα λύση** προκύπτει με την απαλοιφή του p από τις εξισώσεις

$$y = xp + g(p),$$

$$x = -g'(p).$$

Γεωμετρικά η γενική λύση ορίζει μια μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών. Αν η g δεν είναι γραμμική, τότε αποδεικνύεται ότι η ιδιάζουσα λύση ορίζει την περιβάλλουσα της οικογένειας των ευθειών που ορίζονται από τη γενική λύση.

Παράδειγμα: Να λυθεί η δ.ε.

$$y = xy' + \log y'.$$

Είναι εξίσωση Clairaut, οπότε έχει γενική λύση

$$y = cx + \log c.$$

Για την ιδιάζουσα θα λυθεί το σύστημα

$$x = -g'(p),$$

$$y = g(p) - pg'(p), \quad g(p) = \log p.$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}x &= -p^{-1} \\ y &= \log p - pp^{-1}.\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}x &= -p^{-1} \\ y &= \log p - 1.\end{aligned}$$

Επομένως, ισχύει $y = \log(-x^{-1}) - 1$, η οποία αποτελεί την ιδιάζουσα λύση της εξίσωσης, δηλαδή γεωμετρικά, την περιβάλλουσα της μονοπαραμετρικής οικογένειας ευθειών που προκύπτει από τη γενική λύση.

VI. Δ.Ε. του Lagrange

Γενική Μορφή:

$$y = f(y')x + g(y'), \quad \text{ή}$$
$$y = f(p)x + g(p), \quad \text{όπου } p = y'.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι γραμμική ως προς το x και το y , όμως γενικά είναι μη-γραμμική ως προς y' . Επομένως ανήκει στην κατηγορία των πλήρως μη-γραμμικών εξισώσεων (μη γραμμικότητα ως προς την παράγωγο ανώτερης τάξης). Παραγωγίζοντας την, παίρνουμε

$$dy = p dx = x f'(p) dp + f(p) dx + g'(p) dp \quad \text{ή}$$
$$(p - f'(p)) \frac{dx}{dp} = f'(p)x + g'(p).$$

Αν $f'(p) \neq p$, έχουμε την εξίσωση

$$\frac{dx}{dp} = \frac{f'(p)}{p - f'(p)} x + \frac{g'(p)}{p - f'(p)},$$

η οποία είναι γραμμική ως προς x .

Παράδειγμα: Να λυθεί η δ.ε.

$$xp^2 - 3yp = -9x^2, \quad x > 0.$$

Η εξίσωση γράφεται

$$y = \frac{1}{3}xp + \frac{3x^2}{p},$$

όπου $p = y'$ (Lagrange). Παραγωγίζοντας ως προς x έχουμε

$$3p = p + \frac{18x}{p} + \left(x - \frac{9x^2}{p^2}\right), \quad \text{ή}$$
$$\left(1 - \frac{9x}{p^2}\right) \times \left(2p - x\frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

Οπότε έχουμε

$$2p = x\frac{dp}{dx}, \quad (8)$$

$$1 - \frac{9x}{p^2} = 0. \quad (9)$$

Από την (11) έχουμε

$$p = cx^2. \quad (10)$$

Απαλοίφοντας το p από την αρχική και από την (13), βρίσκουμε τη γενική λύση

$$3cy = c^2x^3 + 9.$$

Από την (12) έχουμε ότι

$$p = \pm 3x^1/2,$$

το οποίο αν το θέσω στην αρχική βρίσκω την ιδιαίζουσα λύση

$$y^2 = 4x^3.$$

6^ο ΜΑΘΗΜΑ

VII. Γραμμική Δ.Ε. Ανώτερης Τάξης

Ορισμός: Μια γραμμική διαφορική εξίσωση τάξης n έχει τη γενική μορφή

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x),$$

με $a_n(x) \neq 0$. Αν η συνάρτηση $g(x) = 0$, τότε η εξίσωση λέγεται **ομογενής**.

Ορισμός: Έστω οι συναρτήσεις

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x).$$

Θα λέμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες, όταν η ορίζουσα (Wronski)

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \dots & y_n \\ y_1' & y_2' \dots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Εφαρμογή: Να εξεταστεί αν οι συναρτήσεις
σεις

$$e^x, 4e^x, e^{-x},$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Πρόταση 1: Έστω η ομογενής γραμμική
δ.ε.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0. \quad (11)$$

Αν οι συναρτήσεις

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x),$$

είναι μερικές λύσεις της ομογενούς και εί-
ναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε η γενική
λύση της εξίσωσης είναι

$$y_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x),$$

όπου $c_i \in R, i = 1, 2, \dots$

Πρόταση 2: Αν $y_0(x)$ είναι η γενική λύση της (14) και $f(x)$ είναι μια μερική λύση της γραμμικής δ.ε. τότε η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y(x) = f(x) + y_0(x) \text{ ή}$$

$$y(x) = f(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n.$$

VII. Ομογενής Γραμμική Δ.Ε.

Γενική μορφή:

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0,$$

όπου οι αντίστοιχοι συντελεστές της είναι σταθεροί.

Πρόταση: Η συνάρτηση $y = e^{px}$ για να είναι μερική λύση της γραμμικής δ.ε. ανώτερης τάξης πρέπει και αρκεί το p να είναι ρίζα της εξίσωσης

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0 = 0. \quad (12)$$

Η εξίσωση (12) λέγεται **χαρακτηριστική εξίσωση** της γραμμικής δ.ε.

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις, ανάλογα με τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

1η Περίπτωση: Αν οι ρίζες της (15) είναι πραγματικές και διάφορες μεταξύ τους, έστω p_1, p_2, \dots, p_n τότε η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y_0(x) = c_1 e^{p_1 x} + c_2 e^{p_2 x} + \dots + c_n e^{p_n x}.$$

Παράδειγμα:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - 10 \frac{d^2 y}{dx^2} + 9y = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$p^4 - 10p^2 + 9 = 0.$$

Λύσεις: $p_1 = 1$, $p_2 = -1$, $p_3 = 3$, $p_4 = -3$. Επομένως η γενική λύση δίνεται από τη σχέση

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-3x}.$$

2η Περίπτωση: Αν η (15) έχει πραγματική ρίζα p πολλαπλότητας k τότε η δ.ε δέχεται τις εξής λύσεις

$$e^{p_1x}, xe^{p_1x}, \dots, x^{k-1}e^{p_1x}.$$

Παράδειγμα:

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^3y}{dx^3} - 9\frac{d^2y}{dx^2} - 11\frac{dy}{dx} - 4y = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$p^4 - p^3 - 9p^2 - 11p - 4 = 0,$$

ή

$$(p + 1)^3(p - 4) = 0.$$

Άρα $p_1 = -1$ με $k = 3$ και $p_2 = 4$.

Η γενική λύση είναι

$$y_0 = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x} + c_4x^3e^{-x} + c_5e^{4x}$$

3η Περίπτωση: Αν η (15) έχει μιγαδικές ρίζες $a + bi$, τότε η γενική λύση είναι της μορφής

$$y(x) = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx).$$

Παράδειγμα: Να λυθεί η δ.ε.

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 8y = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$p^3 - 8 = 0 \Rightarrow (p - 2)(p^2 + 2p + 4) = 0.$$

Ρίζες είναι οι ακόλουθες

$$p_1 = 2, \quad p_2 = -1 + j\sqrt{3}, \quad p_3 = -1 - j\sqrt{3}.$$

Η γενική λύση είναι η ακόλουθη

$$y_0(x) = c_1 e^{2x} + e^{-x}(c_2 \cos \sqrt{3}x + c_3 \sin \sqrt{3}x).$$

4η Περίπτωση: Αν η (15) έχει μιγαδική ρίζα με πολλαπλότητα k , τότε η γενική λύση είναι της μορφής

$$\begin{aligned} y &= e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) \\ &+ xe^{ax}(c_3 \cos bx + c_4 \sin bx) + \dots \\ &+ x^{k-1}e^{ax}(c_{2k-1} \cos bx + c_{2k} \sin bx), \end{aligned}$$

(τύπος του Euler.)

Παράδειγμα: Να λυθεί η δ.ε.

$$y^{(5)} - y^{(4)} + 2y^{(3)} - 2y'' + y' - y = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$p^5 - p^4 + 2p^3 - 2p^2 + p - 1 = 0.$$

Άρα $(p - 1)(p^4 + 2p^2 + 1) = 0$. Ρίζες είναι

$$p_1 = 1, p_2 = i, \text{ με } k = 2, p_3 = -i, \text{ με } k = 2$$

Επομένως γενική λύση:

$$\begin{aligned} y_0 &= c_1 e^x + c_2 \cos x + \\ & c_3 \sin x + x(c_4 \cos x + c_5 \sin x) \end{aligned}$$

VIII. Μη Ομογενής Γραμμική Δ.Ε.

Η γενική της μορφή είναι η ακόλουθη:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x),$$

όπου οι αντίστοιχοι συντελεστές της είναι σταθεροί.

Εύρεση Μερικής Λύσης:

1ος Τρόπος: Μέθοδος μεταβολής των σταθερών ή μέθοδος Lagrange

Πρόταση: Έστω

$$y_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x),$$

η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς.
Η

$$y_\mu(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x),$$

είναι μερική λύση της δ.ε. όταν ισχύει

$$c'_1 y_1(x) + c'_2 y_2(x) + \dots + c'_n y_n(x) = 0$$

$$c'_1 y'_1(x) + c'_2 y'_2(x) + \dots + c'_n y'_n(x) = 0$$

.....

.....

.....

$$c'_1 y_1^{(n-1)} + c'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + c'_n y_n^{(n-1)} = 0,$$

(ομογενές $n \times n$ σύστημα). Λύνοντας το σύστημα έχουμε

$$c'_1(x) = \frac{w_1(x)}{w(x)}, \dots, c'_n(x) = \frac{w_n(x)}{w(x)}.$$

όπου

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Γενική Λύση

$$y = y_0 + \int \frac{w_1}{w} dx y_1 + \dots + \int \frac{w_n}{w} dx y_n.$$

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = e^x \sin x.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$p^2 - 2p = 0 \Rightarrow p(p - 2) = 0.$$

Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$y_0(x) = c_1 + c_2 e^{2x}.$$

Επίσης έχουμε

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = e^{2x},$$

όπου

$$y'_1 = 0, \quad y'_2 = 2e^{2x}.$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι

$$\begin{aligned} y_1 c'_1 + y_2 c'_2 &= 0, \\ y'_1 c'_1 + y'_2 c'_2 &= e^x \sin x \end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} c'_1 + e^{2x} c'_2 &= 0, \\ 0c'_1 + 2e^{2x} c'_2 &= e^x \sin x, \end{aligned}$$

Όπου

$$w(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2x} \\ 0 & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{2x},$$

$$w_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ e^x \sin x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = -e^x \sin x,$$

$$w_2(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^x \sin x \end{vmatrix} = e^x \sin x.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= -\frac{1}{2}e^x \sin x \Rightarrow \\ c_1(x) &= -\frac{1}{4}e^x (\sin x - \cos x). \\ c_2'(x) &= \frac{1}{2}e^{-x} \sin x \Rightarrow \\ c_2(x) &= -\frac{1}{4}e^{-x} (\sin x + \cos x). \end{aligned}$$

Παίρνουμε

$$y_\mu = -\frac{1}{2}e^x \sin x.$$

Τελικά η γενική λύση είναι

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} - \frac{1}{2}e^x \sin x.$$

2ος Τρόπος: Μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών ανάλογα με τη μορφή της συνάρτησης $g(x)$ (μη ομογενής όρος).

1η Περίπτωση: Όταν $g(x) = P_k(x)$ όπου $P_k(x)$ πολυώνυμο του x , k βαθμού. Τότε η μερική λύση $y_\mu(x)$ είναι

$$y_\mu(x) = x^m (a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0),$$

όπου m ακέραιος θετικός αριθμός ίσος με το πλήθος των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης που είναι ίσες με μηδέν.

Παράδειγμα: Να λυθεί η δ.ε.

$$y^{(4)} + y^{(3)} + y'' = 2x + 3.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$p^4 + p^3 + p^2 = 0 \Leftrightarrow p^2(p^2 + p + 1) = 0.$$

Ρίζες

$$p_1 = p_2 = 0, p_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, p_4 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Έχουμε

$$y_0(x) = c_1 + c_2x + e^{-\frac{x}{2}}(c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

Επειδή το μηδέν είναι διπλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε

$$y_\mu = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2,$$

$$y'_\mu = 3Ax^2 + 2Bx,$$

$$y''_\mu = 6Ax + 2B,$$

$$y_\mu^{(3)} = 6A,$$

$$y_\mu^{(4)} = 0.$$

Αντικαθιστούμε και έχουμε

$$6A + 6Ax + 2B = 2x + 3.$$

Από την ισότητα των αντίστοιχων συντελεστών βρίσκουμε

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{2}.$$

Άρα

$$y_\mu(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2.$$

Τελικά

$$y(x) = y_0(x) + y_\mu(x).$$

2η Περίπτωση: Όταν $g(x) = e^{px} P_k(x)$
τότε έχουμε

$$y_\mu(x) = x^m e^{px} (a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0),$$

όπου m φυσικός αριθμός ίσος με το πλήθος των φορών που ο p είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Παράδειγμα Να λυθεί η δ.ε.

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2xe^{-x}.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$p^3 - 6p^2 + 11p - 6 = 0 \Rightarrow p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 3$$

Το -1 δεν είναι λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης άρα $m = 0$. Οπότε

$$y_\mu(x) = e^{-x} (Ax + B).$$

3η Περίπτωση: Όταν έχουμε $g(x) = P_k(x) \cos ax + P_l(x) \sin ax$. Τότε

$$y_\mu = x^m [(a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0) \cos ax + (b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \dots + b_0) \sin ax],$$

με $k \geq l$, όπου m ο φυσικός αριθμός ίσος με το πλήθος των φορών που ο a_i είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Παράδειγμα: Να λυθεί η δ.ε.

$$y^{(4)} + 10y'' + 9y = \cos(2x + 3).$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$p^4 + 10p^2 + 9 = 0.$$

Ρίζες

$$p_1 = i, \quad p_2 = -i, \quad p_3 = 3i, \quad p_4 = -3i.$$

Ο $2i$ δεν είναι ρίζα άρα $m = 0$. Οπότε

$$y_\mu = A \cos(2x + 3) + B \sin(2x + 3).$$

4η Περίπτωση: Όταν έχουμε $g(x) = e^{px}[P_k(x) \cos ax + P_l(x) \sin ax]$, τότε

$$y_\mu(x) = x^m e^{\delta px} [(a_k x^k + \dots + a_0) \cos ax + (b_l x^l + \dots + b_0) \sin ax],$$

με $k \geq l$, όπου m ο φυσικός αριθμός ίσος με το πλήθος των φορών που ο $p + ai$ είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Παράδειγμα: Να λυθεί η δ.ε.

$$y'' - 4y' + 13y = e^{2x}[x \sin 3x + (2x - 1) \cos 3x].$$

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$p^2 - 4p + 13 = 0,$$

με ρίζες

$$p_1 = 2 + 3i, \quad p_2 = 2 - 3i.$$

Ο $2 + 3i$ είναι απλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, άρα

$$y_\mu = x e^{2x} [(Ax + B) \sin 3x + (Cx + D) \cos 3x].$$

5η Περίπτωση: Όταν έχουμε ότι η $g(x)$ είναι άθροισμα των περιπτώσεων 1,2,3,4.

A. Ή χωρίζουμε τη δ.ε. σε τόσες όσες είναι οι περιπτώσεις, βρίσκουμε την μερική λύση για κάθε μία και προσθέτουμε τις μερικές λύσεις.

B. Ή σχηματίζουμε τη μορφή της μερικής λύσης σαν άθροισμα των μερικών λύσεων.

Παράδειγμα: Να λυθεί η δ.ε.

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} - 3y'' = x^2 + 3e^{2x} + 4 \sin x.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$p^4 + 2p^3 - 3p^2 = 0,$$

με ρίζες

$$p_1 = p_2 = 0, \quad p_3 = 1, \quad p_4 = -3.$$

A. Είναι

$$y_0 = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4e^{-3x}.$$

Οπότε

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} - 3y'' = x^2,$$

με το 0 διπλή ρίζα, άρα

$$y_{\mu_1}(x) = x^2(Ax^2 + Bx + C).$$

Επίσης

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} - 3y'' = 3e^{2x},$$

με το 2 όχι ρίζα, άρα

$$y_{\mu_2}(x) = De^{2x}.$$

Και

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} - 3y'' = 4 \sin x,$$

με το $0 + i$ όχι ρίζα, άρα

$$y_{\mu_3}(x) = E \sin x + F \cos x.$$

B. Είναι

$$y_{\mu} = x^4 + Bx^3 + Cx^2 + De^{2x} + E \sin x + F \cos x$$

Υπολογίζουμε τις παραγώγους

$$y'_{\mu}(x), y''_{\mu}(x), y_{\mu}^{(3)}(x), y_{\mu}^{(4)}(x),$$

ΟΠΟΤΕ ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΩΝΤΑΣ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ

$$A = \frac{-1}{36}, \quad B = \frac{-2}{27}, \quad C = \frac{-7}{27},$$

$$D = \frac{-3}{20}, \quad E = \frac{2}{5}, \quad F = \frac{4}{5}.$$

Τελικά

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0(x) + y_\mu(x) \\ &= c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-3x} \\ &\quad - \frac{1}{36} x^4 - \frac{2}{27} x - \frac{7}{27} \\ &\quad - \frac{3}{20} e^{2x} + \frac{2}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x. \end{aligned}$$