

## 5. Αόριστο ολοκλήρωμα (αντιπαράγωγος)

### 5.1 Γενικά

**Αντιπαράγωγος** (ή παράγουσα συνάρτηση) μίας συνάρτησης  $f(x)$  ορισμένης σε ένα διάστημα  $[a, b]$  λέγεται κάθε συνάρτηση  $F(x)$  που επαληθεύει την ισότητα

$$(F(x))' = f(x)$$

στο διάστημα αυτό.

Εφόσον υπάρχει μία αντιπαράγωγος  $F(x)$  κάθε συνάρτηση  $F(x) + c$  επαληθεύει την παραπάνω ισότητα.

**Αόριστο ολοκλήρωμα** της συνάρτησης  $f(x)$  ονομάζεται το σύνολο των αντιπαραγώγων της και συμβολίζουμε:

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Όπου  $c$  είναι αυθαίρετη πραγματική σταθερά.

Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς της διαφορίσης ισχύουν τα παρακάτω:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d[F(x) + c] = (F(x) + c)' dx = F'(x)dx = f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\left(\int f(x)dx\right)}{dx} = f(x)$$

$$\text{και } \int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + c.$$

**Παραδείγματα βασισμένα στον ορισμό της αντιπαραγώγου**

$$\int x^2 dx = \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' dx = \frac{x^3}{3} + c \text{ διότι ισχύει } \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$$

$$\int \cos\left(\frac{x}{5}\right) dx = \int \left(5 \sin\left(\frac{x}{5}\right)\right)' dx = 5 \sin\left(\frac{x}{5}\right) + c \text{ διότι ισχύει } \left(5 \sin\left(\frac{x}{5}\right)\right)' = 5 \frac{1}{5} \cos\left(\frac{x}{5}\right) = \cos\left(\frac{x}{5}\right)$$

$$\int e^{2x} dx = \int \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx = \frac{e^{2x}}{2} + c \text{ διότι ισχύει } \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' = \frac{2e^{2x}}{2} = e^{2x}$$

$$\int 2^x dx = \int \left(\frac{2^x}{\ln 2}\right)' dx = \frac{2^x}{\ln 2} + c \text{ διότι ισχύει } \left(\frac{2^x}{\ln 2}\right)' = \frac{2^x \ln 2}{\ln 2} = 2^x$$

$$\int \sqrt{2x+3} dx = \int \left( \frac{(2x+3)^{3/2}}{3} \right)' dx = \frac{\sqrt{(2x+3)^3}}{3} + c$$

$$\text{διότι ισχύει } \left( \frac{\sqrt{(2x+3)^3}}{3} \right)' = \left( \frac{(2x+3)^{3/2}}{3} \right)' = \frac{3}{2} \frac{(2x+3)^{3/2-1}}{3} (2x+3)' = \sqrt{2x+3}.$$

### 5.1.1 Βασικό τυπολόγιο ολοκλήρωσης

Με βάση τον παραπάνω ορισμό ισχύει το ακόλουθο τυπολόγιο.

$\int k dx = kx + c$	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \in \mathbb{R} - \{-1\}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln( x ) + c$	$\int e^x dx = e^x + c$
$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$
$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$	$\int \frac{a}{x^2 + a^2} dx = \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + c$	$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + c$

### Παραδείγματα βασισμένα στο βασικό τυπολόγιο ολοκλήρωσης

$$\int dx = x + c$$

$$\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + c$$

$$\int \frac{1}{x^6} dx = \frac{x^{-6+1}}{-6+1} + c = -\frac{x^{-5}}{5} + c$$

$$\int x^2 \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + c = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{5}{2}+1}}{-\frac{5}{2}+1} + c = -\frac{2}{3} x^{-\frac{3}{2}} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

$$\int \frac{3}{x^2+9} dx = \int \frac{3}{x^2+3^2} dx = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

## 5.2 Υπολογισμοί Ολοκληρωμάτων

### 5.2.1 Γραμμικότητα Ολοκληρώματος

Στην ολοκλήρωση ισχύει:  $\int (\kappa f(x) + \lambda g(x)) dx = \kappa \int f(x) dx + \lambda \int g(x) dx$

**Παραδείγματα όπου χρησιμοποιούμε τη γραμμικότητα.**

$$\int \sqrt{3x} dx = \sqrt{3} \int \sqrt{x} dx = \sqrt{3} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{3} \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \sqrt{3} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{x^3} + c$$

$$\int \sqrt[4]{\frac{2}{x^3}} dx = \int \frac{\sqrt[4]{2}}{x^{\frac{3}{4}}} dx = \sqrt[4]{2} \int x^{-\frac{3}{4}} dx = \sqrt[4]{2} \frac{x^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1} + c = \sqrt[4]{2} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + c = 4\sqrt[4]{2x} + c$$

$$\int \frac{2x^2 - x + 5}{x^2} dx = \int 2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} dx = \int 2 dx - \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{5}{x^2} dx = 2x - \ln|x| + 5 \frac{x^{-1}}{-1} + c = 2x - \ln|x| - \frac{5}{x} + c$$

$$\int \frac{\sqrt{x} - 6x^3}{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} - 6x^2 dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx - 6 \int x^2 dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - 6 \frac{x^3}{3} + c = 2\sqrt{x} - 2x^3 + c$$

$$\int \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx = \int \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x-1} dx = \int (x^2 + x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c$$

$$\int \left( \frac{6}{9+x^2} - \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx = \int \left( \frac{2 \cdot 3}{x^2+3^2} - \frac{2}{\sqrt{2^2-x^2}} \right) dx = 2 \arctan\left(\frac{x}{3}\right) - 2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

$$\int 4 \cos(x) - \sin(x) + 10e^x dx = 4 \sin(x) + \cos(x) + 10e^x + c$$

$$\int \frac{1 - \sin^2(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{\cos^2(x)}{\cos(x)} dx = \int \cos(x) dx = \sin(x) + c$$

$$\int \frac{2}{\cos^2(x) \sin^2(x)} dx = 2 \int \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x) \sin^2(x)} dx = 2 \left[ \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x) \sin^2(x)} dx + \int \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x) \sin^2(x)} dx \right] = 2 \left[ \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx + \int \frac{1}{\sin^2(x)} dx \right] = 2 \tan(x) - 2 \cot(x) + c$$

### 5.2.2 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Πολλά ολοκληρώματα υπολογίζονται πιο εύκολα όταν προβούμε σε αλλαγή μεταβλητής.

$$\text{Θέτοντας } u = u(x) \Leftrightarrow du = u'(x)dx \Leftrightarrow \frac{du}{u'(x)} = dx \Leftrightarrow \frac{du}{u'} = dx$$

$$\int f(u(x))dx = \int_{u=u(x)}^{u=u(x)} \frac{f(u)}{u'} du$$

Υπάρχουν κάποιοι βασικοί τύποι ολοκληρωμάτων, οι οποίοι σε συνδυασμό με τις ιδιότητες ολοκλήρωσης, μας οδηγούν στον υπολογισμό πιο σύνθετων ολοκληρωμάτων.

Έστω  $F(x)$  το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης  $f(x)$ , τότε θέτοντας  $u = u(x)$  έχουμε

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int_{u=u(x)}^{u=u(x)} f(u)u' dx = \int f(u)du = F(u(x)) + c .$$

Με τη χρήση του βασικού τυπολογίου ολοκλήρωσης έχουμε τις παρακάτω κατηγορίες :

$$O_1 \quad \int (u(x))^a u'(x)dx = \int (u(x))^a du = \frac{(u(x))^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$O_2 \quad \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{du}{u(x)} = \ln|u(x)| + c$$

$$O_3 \quad \int e^{u(x)} u'(x)dx = \int e^{u(x)} du = e^{u(x)} + c$$

$$O_4 \quad \int \cos(u(x)) u'(x)dx = \int \cos(u(x)) du = \sin(u(x)) + c$$

$$O_5 \quad \int \sin(u(x)) u'(x)dx = \int \sin(u(x)) du = -\cos(u(x)) + c$$

$$O_6 \quad \int \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2} dx = \int \frac{du}{1+(u(x))^2} = \arctan(u(x)) + c$$

$$O_7 \quad \int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}} dx = \int \frac{du}{\sqrt{1-(u(x))^2}} = \arcsin(u(x)) + c$$

Παρόμοιοι τύποι ισχύουν και για τα υπόλοιπα βασικά ολοκληρώματα.

#### Απλά παραδείγματα

Για τα ακόλουθα ολοκληρώματα θέτουμε  $u = ax + b \Leftrightarrow du = adx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{a}$

$$\int (ax+b)^k dx = \int \frac{u^k}{a} du = \frac{1}{a} \frac{u^{k+1}}{k+1} + \frac{c'}{a} = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{k+1}}{k+1} + c \quad (\text{όταν } k \neq -1, -1, \text{ Τύπος } O_1)$$

Στα αόριστα ολοκληρώματα συνηθίζουμε να αντικαθιστούμε όλες στις επιμέρους σταθερές ολοκλήρωσης (εδώ  $\frac{c'}{a}$ ) με μία τελική σταθερά ολοκλήρωσης (εδώ  $c = \frac{c'}{a}$ ).

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^k} = \int (ax+b)^{-k} dx = \int \frac{u^{-k}}{a} du = \frac{u^{-k+1}}{-k+1} + c = \frac{(ax+b)^{-k+1}}{-k+1} + c \quad (k \neq 1, -1, \text{ Τύπος } O_1)$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \int \frac{1}{u} \frac{1}{a} du = \frac{1}{a} \ln(|u|) + c = \frac{1}{a} \ln(|ax+b|) + c \quad (\text{Τύπος } O_2)$$

$$\int e^{ax+b} dx = \int \frac{e^u}{a} du = \frac{1}{a} \int e^u du = \frac{e^{ax+b}}{a} + c \quad (\text{Τύπος } O_3)$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \int \frac{\cos(u)}{a} du = \frac{\sin(u)}{a} + c = \frac{\sin(ax+b)}{a} + c \quad (\text{Τύπος } O_4)$$

$$\int \sin(ax+b) dx = \int \frac{\sin(u)}{a} du = -\frac{\cos(u)}{a} + c = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + c \quad (\text{Τύπος } O_5)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2-2x+2} dx &= \int \frac{1}{x^2-2x+1+1} dx = \int \frac{1}{1+(x-1)^2} dx = \int \frac{(x-1)'}{1+(x-1)^2} dx \\ &\stackrel{u=x-1}{du=dx} = \int \frac{u' dx}{1+(u(x))^2} = \int \frac{du}{1+(u(x))^2} = \arctan(u(x)) + c = \arctan(x-1) + c \quad (\text{Τύπος } O_6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{\sqrt{-x^2+4x-3}} dx &= \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2+4x-4}} dx = \int \frac{2}{\sqrt{1-(x-2)^2}} dx = 2 \int \frac{u(x)' dx}{\sqrt{1-(u(x))^2}} = \\ &= 2 \arcsin(u(x)) + c = 2 \arcsin(x-2) + c \quad (\text{Τύπος } O_7) \end{aligned}$$

Για το επόμενο ολοκλήρωμα θέτουμε  $u = x^3 \Leftrightarrow du = u(x)' dx \Leftrightarrow du = 3x^2 dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{(x^3)'}{\sqrt{1-(x^3)^2}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{u(x)' dx}{\sqrt{1-(u(x))^2}} = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{1-(u(x))^2}} = \frac{1}{3} \arcsin(u(x)) + c = \frac{1}{3} \arcsin(x^3) + c \quad (\text{Τύπος } O_7) \end{aligned}$$

Το να καθορίσεις το ποια αντικατάσταση θα επιλέξει κάποιος για να υπολογίσει κάποιο ολοκλήρωμα είναι θέμα εμπειρίας. Για αυτόν το λόγο κατηγοριοποιούμε τα ολοκληρώματα, ανάλογα με τη μορφή τους, σε ομάδες στις οποίες γνωρίζουμε από τη βιβλιογραφία ποια είναι η κατάλληλη αντικατάσταση.

### 5.2.2.1 Ρητές πολυωνυμικές συναρτήσεις ειδικής μορφής

Σε ολοκληρώματα της μορφής  $I = \int \frac{p(x)}{(q(x))^k} dx$  όπου  $p(x), q(x)$  πολυώνυμα για τα οποία

ισχύει  $p(x) = q'(x)$  και  $k \in \mathbb{N}$  θέτουμε  $u = q(x)$  και οδηγούμαστε σε ολοκλήρωμα τύπου  $O_1$ .

#### Παραδείγματα

$$\alpha) \int \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx \quad \text{Θέτουμε } u = x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = 2x - 5 \Leftrightarrow du = (2x - 5) dx$$

$$\int \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx \stackrel{u=x^2-5x+6}{=} \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c = \ln |x^2 - 5x + 6| + c.$$

$$\beta) \int \frac{6x-1}{(3x^2-x-12)^2} dx \quad \text{Θέτουμε } u = 3x^2 - x - 12 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = 6x - 1 \Leftrightarrow du = (6x - 1) dx$$

$$\int \frac{6x-1}{(3x^2-x-12)^2} dx \stackrel{u=3x^2-x-12}{=} \int \frac{du}{u^2} = \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{3x^2-x-12} + c.$$

$$\gamma) \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}} dx \quad \text{Θέτουμε } u = 1 - x^6 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = -6x^5 \Leftrightarrow du = -6x^5 dx \Leftrightarrow -\frac{du}{6} = x^5 dx$$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}} dx \stackrel{u=1-x^6}{=} -\frac{1}{6} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{6} \int u^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{6} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3} u^{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{1-x^6}}{3} + c$$

### 5.2.2.2 Ολοκλήρωση συναρτήσεων με τη χρήση τριγωνομετρικών τύπων και αντικαταστάσεων.

Στα παρακάτω ολοκληρώματα θα κάνουμε δύο είδη μετασχηματισμού.

$$\text{Όταν θα θέτουμε } u = \sin(x) \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \cos(x) \Leftrightarrow du = \cos(x) dx.$$

$$\text{Όταν θα θέτουμε } u = \cos(x) \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = -\sin(x) \Leftrightarrow du = -\sin(x) dx.$$

#### Παραδείγματα

$$\alpha) \int \cos(x) \sin(x) dx \stackrel{u=\cos(x)}{=} \int -u du = -\frac{u^2}{2} + c = -\frac{\cos^2(x)}{2} + c$$

Εναλλακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε:

$$\int \cos(x) \sin(x) dx \stackrel{u=\sin(x)}{=} \int u du = \frac{u^2}{2} + c' = \frac{\sin^2(x)}{2} + c'$$

Τα δύο αποτελέσματα είναι ισοδύναμα διότι ισχύει  $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ , οπότε έχουμε

$$\frac{\sin^2(x)}{2} + c' = \frac{1 - \cos^2(x)}{2} + c' = -\frac{\cos^2(x)}{2} + \frac{1}{2} + c'$$

Εάν θεωρήσουμε  $c = \frac{1}{2} + c'$  βλέπουμε ότι στην ουσία έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Επίσης σε ισοδύναμο αποτέλεσμα καταλήγουμε όταν χρησιμοποιήσουμε τους τριγωνομετρικούς τύπους:

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) \text{ και } \cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\begin{aligned} \int \cos(x) \sin(x) dx &= \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx = -\frac{\cos(2x)}{4} + c = -\frac{2 \cos^2(x) - 1}{4} + c = \\ &= -\frac{\cos^2(x)}{2} + \frac{1}{4} + c = -\frac{\cos^2(x)}{2} + c' \end{aligned}$$

Γενικά, όταν έχουμε ολοκληρώματα της μορφής  $\int \cos^a(x) \sin(x) dx$  (ή  $\int \sin^a(x) \cos(x) dx$ ) θέτουμε  $u = \cos(x)$  (αντίστοιχα  $u = \sin(x)$ ). Εάν  $a = -1$  οδηγούμαστε σε ολοκλήρωμα της μορφής  $\int \frac{1}{u} du$  διαφορετικά όταν  $a \neq -1$  σε ολοκλήρωμα της μορφής  $\int u^a du$ .

$$\beta) \int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx \stackrel{u=\cos(x)}{=} \int -\frac{1}{u} du = -\ln|u| + c = -\ln|\cos(x)| + c$$

$$\gamma) \text{Όταν } a \neq -1 \text{ έχουμε } \int \cos^a(x) \sin(x) dx \stackrel{u=\cos(x)}{=} \int -u^a du = -\frac{u^{a+1}}{a+1} + c = -\frac{\cos^{a+1}(x)}{a+1} + c.$$

$$\delta) \int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} dx \stackrel{u=\sin(x)}{=} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{\sin(x)} + c$$

$$\begin{aligned} \epsilon) \int \cos^3(x) dx &= \int \cos(x) \cos^2(x) dx = \int \cos(x) (1 - \sin^2(x)) dx = \\ &= \int \cos(x) dx - \int \cos(x) \sin^2(x) dx = \sin(x) - \int \cos(x) \sin^2(x) dx \stackrel{u=\sin(x)}{=} \\ &= \sin(x) - \int u^2 du = \sin(x) - \frac{u^3}{3} + c = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + c \end{aligned}$$

$$\sigma\tau) \int \cos^2(x) \tan(x) dx = \int \cos^2(x) \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \cos(x) \sin(x) dx =$$

$$= \int_{u=\sin x} u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\sin^2(x)}{2} + c$$

$$\zeta) \int \sin^2(x) \cdot \cos^3(x) dx = \int \sin^2(x) \cdot \cos^2(x) \cdot \cos(x) dx = \int \sin^2(x) \cdot (1 - \sin^2(x)) \cdot \cos(x) dx =$$

$$\stackrel{u=\sin(x)}{=} \int u^2(1-u)^2 du = \int (u^2 - u^4) du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c = \frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{\sin^5(x)}{5} + c$$

$$\eta) I = \int \sin(x) \cos(qx) dx, \quad q \in \mathbb{R},$$

Εδώ θεωρούμε δύο περιπτώσεις. Αρχικά για  $q = 1$  υπολογίζουμε

$$I = \int \sin(x) \cos(x) dx = \int \frac{\sin(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left( -\frac{\cos(2x)}{2} \right)' dx = -\frac{\cos(2x)}{4} + c$$

Για  $q \neq 1$ , χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a-b) + \sin(a+b)) \text{ υπολογίζουμε:}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \sin(x) \cos(qx) dx = \frac{1}{2} \int \sin(x-qx) + \sin(x+qx) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \left( -\frac{\cos(x-qx)}{1-q} - \frac{\cos(x+qx)}{1+q} \right)' dx = -\frac{1}{2} \left( \frac{\cos(x-qx)}{1-q} + \frac{\cos(x+qx)}{1+q} \right) + c \end{aligned}$$

$$\theta) I = \int \sin(x) \sin(qx) dx, \quad q \in \mathbb{R},$$

Εδώ θεωρούμε δύο περιπτώσεις. Αρχικά για  $q = 1$ , χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική

ταυτότητα  $\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$  υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} I &= \int \sin(x) \sin(x) dx = \int \sin^2(x) dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \left( \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos(2x)}{2} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \left( \frac{\sin(2x)}{2} \right)' dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c \end{aligned}$$

Επίσης, για  $q \neq 1$ , χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b)) \text{ υπολογίζουμε}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \sin(x) \sin(qx) dx = \int \frac{1}{2} (\cos(x-qx) - \cos(x+qx)) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \left( \frac{\sin(x-qx)}{1-q} - \frac{\sin(x+qx)}{1+q} \right)' dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(x-qx)}{1-q} - \frac{\sin(x+qx)}{1+q} \right) + c \end{aligned}$$

$$\iota) I = \int \sin(qx) \cos(x) dx, \quad q \in \mathbb{R},$$

Εδώ θεωρούμε δύο περιπτώσεις. Αρχικά για  $q = 1$  υπολογίζουμε:

$$I = \int \sin(x) \cos(x) dx = \int \frac{\sin(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \int \left( -\frac{\cos(2x)}{2} \right)' dx = -\frac{\cos(2x)}{4} + c$$

Για  $q \neq 1$ , χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b)) \text{ υπολογίζουμε:}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \sin(qx)\cos(x)dx = \frac{1}{2} \int \sin(qx-x) + \sin(qx+x)dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \left( -\frac{\cos(qx-x)}{q-1} - \frac{\cos(qx+x)}{q+1} \right) dx = -\frac{1}{2} \left( \frac{\cos(qx-x)}{q-1} + \frac{\cos(qx+x)}{q+1} \right) + c \end{aligned}$$

κ)  $I = \int \cos(x)\cos(qx)dx, \quad q \in \mathbb{R}.$

Εδώ θεωρούμε δύο περιπτώσεις. Αρχικά για  $q = 1$ , χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική

ταυτότητα  $\cos^2(a) = \frac{\cos(2a)+1}{2}$  υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} I &= \int \cos(x)\cos(x)dx = \int \cos^2(x)dx = \int \frac{\cos(2x)+1}{2}dx = \left( \int \frac{\cos(2x)}{2}dx + \int \frac{1}{2}dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int \left( \frac{\sin(2x)}{2} \right) dx + \frac{1}{2} \int dx = \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2} + c \end{aligned}$$

Επίσης, για  $q \neq 1$ , χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b)) \text{ υπολογίζουμε:}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \cos(x)\cos(qx)dx = \int \frac{1}{2}(\cos(x-qx) + \cos(x+qx))dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \left( \frac{\sin(x-qx)}{1-q} + \frac{\sin(x+qx)}{1+q} \right) dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(x-qx)}{1-q} + \frac{\sin(x+qx)}{1+q} \right) + c \end{aligned}$$

#### Χρήσιμοι τύποι τριγωνομετρίας.

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$$

$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$$

$$\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2} \qquad \cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\tan^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{1 + \cos(2a)} \qquad \cot^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{1 - \cos(2a)}$$

$$\tan^2(a) + 1 = \frac{\sin^2(a)}{\cos^2(a)} + 1 = \frac{\sin^2(a) + \cos^2(a)}{\cos^2(a)} = \frac{1}{\cos^2(a)}$$

### 5.2.2.3 Ολοκλήρωση συναρτήσεων με μορφή $\int f(e^{ax})dx$

$$\text{Θέτουμε } u = e^x \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Leftrightarrow du = e^x dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{e^x} \Leftrightarrow dx = \frac{du}{u}.$$

#### Παραδείγματα

$$\begin{aligned} \alpha) \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx &= \int \frac{u^2}{u+1} \frac{du}{u} = \int \frac{u}{u+1} du = \int \frac{u+1-1}{u+1} du = \int \left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du = \\ &= \int du - \int \frac{1}{u+1} du = u - \ln|u+1| + c = e^x - \ln|e^x + 1| + c = e^x - \ln(e^x + 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(Σημείωση: επειδή  $|e^x + 1| = e^x + 1$ )

Εναλλακτικά θέτουμε  $e^x + 1 = u$ . Οπότε  $e^x + 1 = u \Rightarrow e^x = u - 1 > 0$  και

$$d(e^x + 1) = du \Rightarrow e^x dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u-1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx &= \int \frac{(u-1)^2}{u} \frac{du}{u-1} = \int \frac{u-1}{u} du = \int \left(\frac{u}{u} - \frac{1}{u}\right) du = \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \\ &= \int du - \int \frac{1}{u} du = u - \ln|u| + c = e^x + 1 - \ln|e^x + 1| + c = e^x + 1 - \ln(e^x + 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\beta) \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx \stackrel{u=e^x}{=} \int \frac{u^3 + 1}{u+1} \cdot \frac{1}{u} du$$

Ξέρουμε ότι ισχύει  $u^3 + 1 = (u+1)(u^2 - u + 1)$  οπότε

$$\frac{u^3 + 1}{u(u+1)} = \frac{(u+1)(u^2 - u + 1)}{u(u+1)} = \frac{u^2 - u + 1}{u} = u - 1 + \frac{1}{u}$$

Και τελικά

$$\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \int \left(u - 1 + \frac{1}{u}\right) du = \int (u-1) du + \int \frac{1}{u} du = \frac{u^2}{2} - u + \ln|u| + C = \frac{e^{2x}}{2} - e^x + x + c$$

(Σημείωση: επειδή  $u = e^x \Leftrightarrow |u| = u$ )

### 5.2.2.4 Ολοκλήρωση συναρτήσεων με μορφή $\int f(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$

$$\text{Θέτουμε } u = \sqrt[n]{ax+b} \Leftrightarrow x = \frac{u^n - b}{a} \text{ οπότε } \frac{dx}{du} = \frac{n \cdot u^{n-1}}{a} \Leftrightarrow dx = \frac{n \cdot u^{n-1}}{a} du.$$

## Παραδείγματα

α)  $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$  Θέτουμε  $u = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x = u^2 - 1$  οπότε  $\frac{dx}{du} = 2u \Leftrightarrow dx = 2udu$ .

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{u^2 - 1}{u} 2udu = 2 \int (u^2 - 1) du = 2 \frac{u^3}{3} - 2u + c = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2(x+1)^{1/2} + c$$

Εναλλακτικά, θέτοντας  $u = x+1 \Leftrightarrow du = dx$

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{u-1}{\sqrt{u}} du = \int u^{1/2} - u^{-1/2} du = \frac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2} + c =$$
$$= \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2(x+1)^{1/2} + c$$

β)  $I = \int \frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}} dx$

Θέτουμε  $u = \sqrt[3]{1-3x} \Leftrightarrow x = -\frac{u^3-1}{3}$  οπότε  $\frac{dx}{du} = -\frac{3 \cdot u^2}{3} \Leftrightarrow dx = -u^2 du$ .

$$I = \int \frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}} dx = \int \frac{-u^2}{u} du = -\int u du = -\frac{u^2}{2} + c = -\frac{1}{2} \sqrt[3]{(1-3x)^2} + c$$

Εναλλακτικά, αντικαθιστούμε  $y = 1-3x$ , οπότε  $dy = -3dx \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{3} dy$  και το

ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt[3]{y}} dy = -\frac{1}{3} \int y^{-1/3} dy = -\frac{1}{3} \frac{y^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c =$$
$$-\frac{1}{3} \frac{y^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = -\frac{1}{2} \sqrt[3]{y^2} + c = -\frac{1}{2} \sqrt[3]{(1-3x)^2} + c$$

γ)  $I = \int \frac{x+3\sqrt{2x-5}}{\sqrt{2x-5}+1} dx$

Θέτουμε  $u = \sqrt{2x-5}$  όπου  $u \geq 0$  και συνεπώς λύνοντας ως προς  $x$  έχουμε

$$x = \frac{u^2+5}{2} \Leftrightarrow \frac{dx}{du} = u \Rightarrow dx = udu$$

Αντικαθιστούμε στο ολοκλήρωμα  $I$  και έχουμε

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x+3\sqrt{2x-5}}{\sqrt{2x-5}+1} dx = \int \frac{\frac{u^2+5}{2}+3u}{\frac{u^2+5}{2}+3u} u du \stackrel{u>0}{=} \int \frac{u^2+6u+5}{2(u+1)} u du = \\
&= \int \frac{u(u+1)(u+5)}{2(u+1)} du = \int \frac{u(u+5)}{2} du = \frac{1}{2} \int u^2 du + \frac{5}{2} \int u du = \\
&= \left( \frac{1}{2} \frac{u^3}{3} + c_1 \right) + \left( \frac{5}{2} \frac{u^2}{2} + c_2 \right) \stackrel{c=c_1+c_2}{=} \frac{u^3}{6} + \frac{5u^2}{4} + c
\end{aligned}$$

$$\text{Συνεπώς } I = \frac{u^3}{6} + \frac{5u^2}{4} + c \stackrel{u=\sqrt{2x-5}}{=} = \frac{(2x-5)^{\frac{3}{2}}}{6} + \frac{5}{4}(2x-5) + c$$

$$\delta) I = \int \frac{dx}{2\sqrt{x+1}+x+2}$$

Θέτοντας  $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = u^2 - 1$ , από όπου έχουμε  $dx = 2udu$ . Αντικαθιστώντας τις προηγούμενες σχέσεις στο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{2\sqrt{x+1}+x+2} = \int \frac{2udu}{2u+u^2+1} = \int \frac{2udu}{(u+1)^2} \\
&= \int \frac{2(u+1)}{(u+1)^2} du - \int \frac{2}{(u+1)^2} du \\
&= \int \frac{2}{u+1} du - \int \frac{2}{(u+1)^2} du \\
&= \ln|u+1| + \frac{2}{u+1} + c = \ln(\sqrt{x+1}+1) + \frac{2}{\sqrt{x+1}+1} + c.
\end{aligned}$$

$$\epsilon) I = \int \frac{dx}{x-4\sqrt{x}}$$

Θέτοντας  $u = x^{1/4} \Rightarrow x = u^4 \Rightarrow dx = 4u^3 du$ , το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{x-4\sqrt{x}} = \int \frac{4u^3}{u^4-u} du = 4 \int \frac{u^2}{u^3-1} du = \frac{4}{3} \int \frac{(u^3-1)'}{u^3-1} du \\
&= \frac{4}{3} \ln|u^3-1| + c = \frac{4}{3} \ln|(x^{1/4})^3-1| + c = \frac{4}{3} \ln|\sqrt[4]{x^3}-1| + c.
\end{aligned}$$

### 5.2.2.5 Ολοκλήρωση συναρτήσεων με μορφή

$$\int f(x, \sqrt{a-bx^2}) dx \quad \text{ή} \quad \int f(x, \sqrt{a+bx^2}) dx \quad \text{ή} \quad \int f(x, \sqrt{bx^2-a}) dx$$

Για το  $\int f(x, \sqrt{a-bx^2}) dx$

θέτουμε  $x = \sqrt{\frac{a}{b}} \sin(u)$  οπότε  $\frac{dx}{du} = \sqrt{\frac{a}{b}} \cos(u) \Leftrightarrow dx = \sqrt{\frac{a}{b}} \cos(u) du$  ή

θέτουμε  $x = \sqrt{\frac{a}{b}} \cos(u)$  οπότε  $\frac{dx}{du} = -\sqrt{\frac{a}{b}} \sin(u) \Leftrightarrow dx = -\sqrt{\frac{a}{b}} \sin(u) du$ .

Για το  $\int f(x, \sqrt{a+bx^2}) dx$

θέτουμε  $x = \sqrt{\frac{a}{b}} \tan(u)$  οπότε  $\frac{dx}{du} = \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{1}{\cos^2(u)} \Leftrightarrow dx = \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{du}{\cos^2(u)}$ .

Για το  $\int f(x, \sqrt{bx^2 - a}) dx$

θέτουμε  $x = \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{1}{\cos(u)}$  οπότε  $\frac{dx}{du} = \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{\sin(u)}{\cos^2(u)} \Leftrightarrow dx = \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{\sin(u)}{\cos^2(u)} du$ .

### Παραδείγματα

α)  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Θέτοντας  $x = \sin(u) \Leftrightarrow u = \arcsin(x)$  έχω  $dx = \cos(u) du$  οπότε

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} \cos(u) du = \int \frac{1}{\sqrt{\cos^2(u)}} \cos(u) du = \int \frac{1}{\cos(u)} \cos(u) du = \\ &= \int du = u + c = \arcsin(x) + c \end{aligned}$$

β)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$

Θέτοντας  $x = 2 \cos(\theta)$  και παραγωγίζοντας ως προς  $\theta$  παίρνουμε τη σχέση μεταξύ των διαφορικών  $\frac{dx}{d\theta} = -2 \sin(\theta) \Rightarrow dx = -2 \sin(\theta) d\theta$ . Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx &= -\int \frac{4 \cos^2(\theta)}{\sqrt{4-4 \cos^2(\theta)}} 2 \sin(\theta) d\theta = -\int \frac{4 \cos^2(\theta)}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}} \sin(\theta) d\theta = \\ &= -\int \frac{4 \cos^2(\theta)}{\sin(\theta)} \sin(\theta) d\theta = -4 \int \cos^2(\theta) d\theta \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή ταυτότητα  $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ . Τώρα χρησιμοποιούμε άλλη μια γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα  $\cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1 \Rightarrow \cos^2(\theta) = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}$ . Αντικαθιστώντας έχουμε

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = -2 \int (\cos(2\theta) + 1) d\theta = -2 \int \cos(2\theta) d\theta - 2\theta + C = -\sin(2\theta) - 2\theta + C$$

Παρατηρούμε ότι  $x = 2 \cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{x}{2} \Rightarrow \sin(\theta) = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$  και

χρησιμοποιώντας μια ακόμη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα έχουμε

$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta) = 2 \frac{x}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}.$$

Αντικαθιστώντας έχουμε  $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = -x \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - 2 \arccos\left(\frac{x}{2}\right) + C.$

$$\gamma) \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}} dx$$

Θέτουμε  $x = 5 \tan(\theta)$  και παραγωγίζοντας ως προς  $\theta$  παίρνουμε τη σχέση μεταξύ των διαφορικών  $\frac{dx}{d\theta} = \frac{5}{\cos^2(\theta)} \Rightarrow dx = \frac{5}{\cos^2(\theta)} d\theta$ . Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα

θέτουμε  $x = 5 \tan(\theta) \Rightarrow dx = \frac{5}{\cos^2(\theta)} d\theta$ , οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned} \int \frac{625 \tan^3(\theta)}{\cos^2(\theta) \sqrt{25 \tan^2(\theta) + 25}} d\theta &= \int \frac{625 \sin^3(\theta)}{5 \cos^5(\theta) \sqrt{\tan^2(\theta) + 1}} d\theta = \\ &= \int \frac{125 \sin^3(\theta)}{\cos^5(\theta) \sqrt{\frac{1}{\cos^2(\theta)}}} d\theta = 125 \int \frac{\sin^3(\theta)}{\cos^4(\theta)} d\theta = \end{aligned}$$

Θέτουμε  $u = \cos(\theta) \Rightarrow du = -\sin(\theta) d\theta$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} 125 \int \frac{\sin^3(\theta)}{\cos^4(\theta)} d\theta &= 125 \int \frac{\sin^3(\theta)}{u^4} \left(-\frac{du}{\sin(\theta)}\right) = -125 \int \frac{\sin^2(\theta)}{u^4} du = \\ &= -125 \int \frac{1-u^2}{u^4} du = -125 \left(-\frac{1}{3u^3} + \frac{1}{u}\right) + c. \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή ταυτότητα  $\tan^2(\theta) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$ .

Εκφράζουμε τώρα το  $u$  συναρτήσει του  $x$ .

$$\tan(\theta) = \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}}{\cos(\theta)} = \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{1-\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{x^2}{25}. \text{ Από τη σχέση αυτή}$$

$$\text{βρίσκουμε } u = \cos \theta = \frac{5}{\sqrt{25+x^2}}.$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{25+x^2}} dx = -125\left(-\frac{1}{3u^3} + \frac{1}{u}\right) + c = \frac{\sqrt{(25+x^2)^3}}{3} - 25\sqrt{25+x^2} + c.$$

### 5.2.3 Κανόνας παραγοντικής ολοκλήρωσης

Ισχύει ο ακόλουθος κανόνας:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Η απόδειξή του είναι απλή:

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow \\ f'(x)g(x) &= (f(x)g(x))' - f(x)g'(x) \Rightarrow \\ \int f'(x)g(x)dx &= \int (f(x)g(x))'dx - \int f(x)g'(x)dx \Rightarrow \\ \int f'(x)g(x)dx &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

#### Βασικά παραδείγματα

$$\begin{aligned} \alpha) \int x \cos(ax) dx &= \int x \left( \frac{\sin(ax)}{a} \right)' dx = \frac{x \sin(ax)}{a} - \frac{1}{a} \int x' \sin(ax) dx = \\ &= \frac{x \sin(ax)}{a} - \frac{1}{a} \int \sin(ax) dx = \frac{x \sin(ax)}{a} + \frac{\cos(ax)}{a^2} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \int x \sin(ax) dx &= \int x \left( -\frac{\cos(ax)}{a} \right)' dx = -\frac{x \cos(ax)}{a} + \frac{1}{a} \int x' \cos(ax) dx = \\ &= -\frac{x \cos(ax)}{a} + \frac{1}{a} \int \cos(ax) dx = -\frac{x \cos(ax)}{a} + \frac{\sin(ax)}{a^2} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \int x e^{ax} dx &= \int x \left( \frac{e^{ax}}{a} \right)' dx = \frac{x e^{ax}}{a} - \int x' \frac{e^{ax}}{a} dx = \frac{x e^{ax}}{a} - \int \left( \frac{e^{ax}}{a} \right)' \frac{1}{a} dx = \\ &= \frac{x e^{ax}}{a} - \frac{1}{a^2} \int (e^{ax})' dx = \frac{x e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta) \int \ln(x) dx &= \int x' \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x (\ln(x))' dx = \\ &= x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - \int dx = x \ln(x) - x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon) \int x \ln(x) dx &= \int \left( \frac{x^2}{2} \right)' \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} \int x dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$

**Περισσότερες ασκήσεις:**

$$\begin{aligned} \alpha) \int x^n \ln(x) dx &= \int \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' \ln(x) dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{x} dx = \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \int \ln(2x) dx &= \int x' \ln(2x) dx = x \ln(2x) - \int x (\ln(2x))' dx = x \ln(2x) - \int x \frac{(2x)'}{2x} dx = \\ &= x \ln(2x) - \int 1 dx = x \ln(2x) - x + c \end{aligned}$$

γ) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\int (ax^2 + bx + c)e^{-x} dx \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \int (ax^2 + bx + c)e^{-x} dx &= \int (ax^2 + bx + c)(-e^{-x})' dx = \\ &= -(ax^2 + bx + c)e^{-x} - \int (ax^2 + bx + c)'(-e^{-x}) dx = \\ &= -(ax^2 + bx + c)e^{-x} + \int (2ax + b)e^{-x} dx = \\ &= -(ax^2 + bx + c)e^{-x} + \int (2ax + b)(-e^{-x})' dx = \\ &= -(ax^2 + bx + c)e^{-x} + \left[ (2ax + b)(-e^{-x}) - \int (2ax + b)'(-e^{-x}) dx \right] = \\ &= -(ax^2 + bx + c)e^{-x} - (2ax + b)e^{-x} + \int 2ae^{-x} dx = \\ &= -(ax^2 + bx + c)e^{-x} - (2ax + b)e^{-x} + 2a \int (-e^{-x})' dx = \\ &= -(ax^2 + bx + c)e^{-x} - (2ax + b)e^{-x} - 2ae^{-x} + c' = \\ &= -[ax^2 + (b + 2a)x + (c + b + 2a)]e^{-x} + c' \end{aligned}$$

δ) Να υπολογιστεί με τη χρήση της παραγοντικής ολοκλήρωσης το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{2x}{(x+1)^2} dx.$$

$$\int \frac{2x}{(x+1)^2} dx = \int 2x \left( -\frac{1}{x+1} \right)' dx = 2x \left( -\frac{1}{x+1} \right) - \int 2(x)' \left( -\frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{-2x}{x+1} + 2 \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \frac{-2x}{x+1} + 2 \ln(|x+1|) + c$$

ε) Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα  $I = \int e^x \sin(x) dx$

$$I = \int e^x \sin(x) dx = \int (e^x)' \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x (\sin(x))' dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx =$$

$$= e^x \sin(x) - \int (e^x)' \cos(x) dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) + \int e^x (\cos(x))' dx =$$

$$= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - I$$

Οπότε λύνοντας ως προς  $I$  έχουμε:

$$2I = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) \Leftrightarrow I = \frac{e^x \sin(x) - e^x \cos(x)}{2} + c$$

στ. Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα  $I = \int e^x \cos(x) dx$

$$I = \int e^x \cos(x) dx = \int (e^x)' \cos(x) dx = e^x \cos(x) - \int e^x (\cos(x))' dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx =$$

$$= e^x \cos(x) + \int (e^x)' \sin(x) dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x (\sin(x))' dx =$$

$$= e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - I$$

Οπότε λύνοντας ως προς  $I$  έχουμε:

$$2I = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) \Leftrightarrow I = \frac{e^x \sin(x) + e^x \cos(x)}{2} + c$$

ζ) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα  $I = \int e^{-ax} \sin(bx) dx$ , όπου  $a, b$  σταθερές.

$$I = \int e^{-ax} \sin(bx) dx = -\frac{1}{b} \int e^{-ax} (\cos(bx))' dx = -\frac{e^{-ax}}{b} \cos(bx) - \frac{a}{b} \int e^{-ax} \cos(bx) dx =$$

$$= -\frac{e^{-ax}}{b} \cos(bx) - \frac{a}{b^2} \int e^{-ax} (\sin(bx))' dx =$$

$$= -\frac{e^{-ax}}{b} \cos(bx) - \frac{a}{b^2} (e^{-ax} \sin(bx) + a \int e^{-ax} \sin(bx) dx)$$

$$I = -\frac{e^{-ax}}{b} \cos(bx) - \frac{a}{b^2} e^{-ax} \sin(bx) - \frac{a^2}{b^2} I$$

Λύνοντας ως προς  $I$  έχουμε:  $I = \frac{-e^{-ax}}{a^2 + b^2} (b \cos(bx) + a \sin(bx)) + c$

η) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα  $\int e^{ax} \cos(bx) dx$ , όπου  $a, b$  σταθερές.

Αν θέσουμε  $I = \int e^{ax} \cos(bx) dx$ , με επανειλημμένη χρήση της μεθόδου της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, έχουμε:

$$\begin{aligned} I &= \int e^{ax} \left( \frac{\sin(bx)}{b} \right)' dx = e^{ax} \frac{\sin(bx)}{b} - \int (e^{ax})' \frac{\sin(bx)}{b} dx = e^{ax} \frac{\sin(bx)}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \left( \frac{-\cos(bx)}{b} \right)' dx = \\ &= e^{ax} \frac{\sin(bx)}{b} - \frac{a}{b} \left( -e^{ax} \frac{\cos(bx)}{b} + \int (e^{ax})' \frac{\cos(bx)}{b} dx \right) = \\ &= e^{ax} \frac{\sin(bx)}{b} + \frac{ae^{ax} \cos(bx)}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos(bx) dx. \end{aligned}$$

Άρα αποδείξαμε ότι  $I = \frac{be^{ax} \sin(bx) + ae^{ax} \cos(bx)}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} I$ .

Λύνοντας την τελευταία σχέση ως προς  $I$  έχουμε:

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) I = \frac{e^{ax} (b \sin(bx) + a \cos(bx))}{b^2} \Rightarrow I = \frac{e^{ax} (b \sin(bx) + a \cos(bx))}{a^2 + b^2}$$

θ) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα  $\int \ln(x^2 + 1) dx$

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2 + 1) dx &= \int (x)' \ln(x^2 + 1) dx = x \ln(x^2 + 1) - \int x (\ln(x^2 + 1))' dx = \\ &= x \ln(x^2 + 1) - \int x \frac{1}{x^2 + 1} (x^2 + 1)' dx = x \ln(x^2 + 1) - \int x \frac{1}{x^2 + 1} (2x) dx = \\ &= x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = \\ &= x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx = x \ln(x^2 + 1) - 2 \int dx + 2 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \\ &= x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arc} \tan(x) + c. \end{aligned}$$

ι) Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα  $\int x^2 \cos(bx) dx$ ,  $\int x^2 \sin(bx) dx$ , όπου  $b$  σταθερά.

Αν  $b=0$  τότε το πρώτο ολοκλήρωμα ισούται προς  $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$  και το δεύτερο προς μία

σταθερά. Αν  $b$  είναι διάφορο του μηδενός, τότε εργαζόμαστε με παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\int x^2 \cdot \cos(bx) dx = \int x^2 \left( \frac{\sin(bx)}{b} \right)' dx = x^2 \frac{\sin(bx)}{b} - \int 2x \frac{\sin(bx)}{b} dx =$$

$$\frac{x^2 \sin(bx)}{b} - \frac{2}{b} \int x \sin(bx) dx = \frac{x^2 \sin(bx)}{b} - \frac{2}{b} \int x \left( \frac{-\cos(bx)}{b} \right)' dx =$$

$$\frac{x^2 \sin(bx)}{b} - \frac{2}{b} \left[ x \frac{(-\cos(bx))}{b} - \int \left( \frac{-\cos(bx)}{b} \right) dx \right] = \frac{x^2 \sin(bx)}{b} + \frac{2x \cos(bx)}{b^2} + \frac{2}{b} \int \frac{-\cos(bx)}{b} dx =$$

$$\frac{x^2 \sin(bx)}{b} + \frac{2x \cos bx}{b^2} - \frac{2}{b^2} \int \cos(bx) dx = \frac{x^2 \sin(bx)}{b} + \frac{2x \cos(bx)}{b^2} - \frac{2}{b^2} \frac{\sin(bx)}{b} + c$$

Και για το δεύτερο ολοκλήρωμα

$$\int x^2 \sin(bx) dx = \int x^2 \left( \frac{-\cos(bx)}{b} \right)' dx = \frac{-x^2 \cdot \cos(bx)}{b} - \int 2x \left( \frac{-\cos(bx)}{b} \right) dx =$$

$$\frac{-x^2 \cdot \cos(bx)}{b} + \frac{2}{b} \int x \cos(bx) dx = \frac{-x^2 \cdot \cos(bx)}{b} + \frac{2}{b} \int x \left( \frac{\sin(bx)}{b} \right)' dx =$$

$$\frac{-x^2 \cos(bx)}{b} + \frac{2}{b} \left[ \frac{x \sin(bx)}{b} - \int \frac{\sin(bx)}{b} dx \right] = \frac{-x^2 \cos(bx)}{b} + \frac{2x \sin(bx)}{b^2} - \frac{2}{b^2} \int \sin(bx) dx =$$

$$\frac{-x^2 \cos(bx)}{b} + \frac{2x \sin(bx)}{b^2} - \frac{2}{b^2} \left( \frac{-\cos(bx)}{b} \right) + c = \frac{-x^2 \cos(bx)}{b} + \frac{2x \sin(bx)}{b^2} + \frac{2 \cos(bx)}{b^3} + c$$

κ) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο παραγοντικής ολοκλήρωσης υπολογίστε τα ολοκληρώματα  $\int \ln(x) dx$  και  $\int \ln^2(x) dx$ . Στη συνέχεια να βρεθεί αναγωγικός τύπος για το  $I_n = \int \ln^n(x) dx$ ,  $n=3,4,\dots$ , από τον οποίο να υπολογίζεται το  $I_n$ , συναρτήσει του προηγουμένου  $I_{n-1}$ .

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο παραγοντικής ολοκλήρωσης βρίσκουμε για τα δύο πρώτα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x (\ln(x))' dx = x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - x + c$$

$$I_2 = \int \ln^2(x) dx = \int x' \ln^2(x) dx = x \ln^2(x) - \int x (\ln^2(x))' dx = x \ln^2(x) - \int x 2 \ln(x) (\ln(x))' dx =$$

$$= x \ln^2(x) - 2 \int x \ln(x) \frac{1}{x} dx = x \ln^2(x) - 2 \int \ln(x) dx = x \ln^2(x) - 2I_1 = x \ln^2(x) - 2x \ln(x) + 2x + c$$

Τώρα μπορούμε να βρούμε επαγωγικά το ολοκλήρωμα. Για  $n \geq 2$  έχουμε

$$I_n = \int \ln^n(x) dx = \int (x)' \ln^n(x) dx = x \ln^n(x) - \int x (\ln^n(x))' dx =$$

$$= x \ln^n(x) - n \int x \ln^{n-1}(x) (\ln x)' dx = x \ln^n(x) - n \int x \ln^{n-1}(x) \frac{1}{x} dx =$$

$$= x \ln^n(x) - n \int \ln^{n-1}(x) dx = x \ln^n(x) - n I_{n-1}.$$

#### 5.2.4 Ολοκλήρωση ρητών πολυωνυμικών συναρτήσεων

$$I = \int \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

**A) Περίπτωση που ο αριθμητής  $p(x)$  έχει βαθμό μικρότερο από τον βαθμό του παρονομαστή  $q(x)$ .** Αρχικά εξετάζουμε εάν ο αριθμητής είναι ίσος με την παράγωγο του παρονομαστή. Σε μία τέτοια περίπτωση είδαμε ότι το ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα. Εάν δεν ισχύει κάτι τέτοιο, διερευνούμε ένα το ολοκλήρωμά ανήκει σε μία από τις επόμενες περιπτώσεις.

**1. Περίπτωση που ο παρονομαστής  $q(x)$  είναι δευτέρου βαθμού και δεν αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων πρώτου βαθμού (δηλαδή έχει διακρίνουσα αρνητική).** Σε μία τέτοια περίπτωση εφαρμόζουμε συμπλήρωση τετραγώνου.

**Παραδείγματα:**

α) Το ολοκλήρωμα  $\int \frac{8x+4}{x^2-2x+5} dx$  είναι ένα ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης με αριθμητή ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού και παρονομαστή ένα πολυώνυμο 2<sup>ου</sup> βαθμού το οποίο δεν έχει πραγματικές ρίζες, οπότε δεν παραγοντοποιείται.

Για να το υπολογίσουμε θα εφαρμόσουμε συμπλήρωση τετραγώνου του παρονομαστή, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\int \frac{8x+4}{x^2-2x+5} dx = \int \frac{8x+4}{x^2-2x+1+4} dx = \int \frac{8x+4}{(x-1)^2+4} dx \stackrel{u=x-1}{\underset{du=dx}}{=} \int \frac{8(u+1)+4}{u^2+4} du =$$

$$= \int \frac{8u}{u^2+4} du + \int \frac{12}{u^2+2^2} du = 4 \int \frac{2u}{u^2+4} du + 6 \int \frac{2}{u^2+2^2} du \stackrel{v=u^2+4}{\underset{dv=2udu}}{=} 4 \int \frac{dv}{v} + 6 \int \frac{2}{u^2+2^2} du =$$

$$= 4 \ln|v| + 6 \arctan\left(\frac{u}{2}\right) + c = 4 \ln|u^2 + 4| + 6 \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c =$$

$$= 4 \ln(x^2 - 2x + 5) + 6 \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$$

**Με την παραπάνω ανάλυση του κλάσματος οδηγηθήκαμε σε ολοκλήρωμα του οποίου ο αριθμητής είναι η παράγωγος του παρονομαστή (οπότε παίρνουμε λογάριθμο) και σε ολοκλήρωμα το οποίο είναι γνωστό από τους πίνακες (τόξο εφαπτομένη).**

**Εναλλακτικά**, σε παρόμοια ολοκληρώματα, μπορούμε να γράψουμε τον αριθμητή ως άθροισμα της παραγώγου του παρονομαστή συν (πιθανά) έναν αριθμό, πολλαπλασιασμένο με έναν κατάλληλο συντελεστή. Στη συνέχεια θα σπάσουμε το ολοκλήρωμα σε δύο ολοκληρώματα, το ένα από τα οποία θα έχει ως αριθμητή την παράγωγο του παρονομαστή, το δεύτερο τον αριθμό.

Δηλαδή, στην περίπτωση όπου έχουμε να υπολογίσουμε το

$$I = \int \frac{8x+4}{x^2-2x+5} dx$$

θα κάνουμε τις επόμενες αλγεβρικές πράξεις:

$$I = \int \frac{8x+4}{x^2-2x+5} dx = 4 \int \frac{2x+1}{x^2-2x+5} dx = 4 \int \frac{2x-2+3}{x^2-2x+5} dx =$$

$$= 4 \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5} dx + 4 \int \frac{3}{x^2-2x+5} dx$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα μας οδηγεί στο λογάριθμο του παρονομαστή. Στο δεύτερο θα εφαρμόσουμε συμπλήρωση τετραγώνου ώστε να οδηγηθούμε στον τύπο της ολοκλήρωσης που μας δίνει ως αποτέλεσμα τη συνάρτηση τόξο εφαπτομένη. Οπότε θέτοντας  $u = x^2 - 2x + 5 \Leftrightarrow du = (2x - 2)dx$  και  $v = x - 1 \Leftrightarrow dv = dx$  έχουμε

$$I = 4 \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5} dx + 6 \int \frac{2}{(x-1)^2+2^2} dx = 4 \int \frac{1}{u} du + 3 \int \frac{4}{v^2+4} dv =$$

$$= 4 \ln(u) + 6 \arctan\left(\frac{v}{2}\right) + c = 4 \ln(x^2 - 2x + 5) + 6 \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$$

Η έκφραση  $x^2 - 2x + 5$  (έχει διακρίνουσα  $< 0$  οπότε και πρόσημο πάντα ομόσημο του συντελεστή του  $x^2$ ) είναι θετική και για αυτό δεν βάζουμε απόλυτο στο λογάριθμο.

β) Παρόμοια για το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} \int \frac{t+2}{t^2-6t+10} dt &= \int \frac{t+2}{t^2-2 \cdot 3t+9-9+10} dt = \int \frac{t+2}{(t-3)^2+1} dt \stackrel{u=t-3}{du=dt} = \int \frac{u+5}{u^2+1} du = \\ &= \int \frac{u+5}{u^2+1} du = \int \frac{u}{u^2+1} du + \int \frac{5}{u^2+1} du \stackrel{y=u^2+1}{dy=2udu} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy + 5 \int \frac{1}{u^2+1} du \\ &= \frac{1}{2} \ln|y| + 5 \arctan(u) + c = \frac{1}{2} \ln(u^2+1) + 5 \arctan(t-3) + c = \\ &= \frac{1}{2} \ln(t^2-6t+10) + 5 \arctan(t-3) + c \end{aligned}$$

**Εναλλακτικά** υπολογίζουμε το ίδιο ολοκλήρωμα όπως ακολουθεί:

$$\begin{aligned} \int \frac{t+2}{t^2-6t+10} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{2t+4}{t^2-6t+10} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t-6+10}{t^2-6t+10} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t-6}{t^2-6t+10} dt + \frac{1}{2} \int \frac{10}{t^2-6t+10} dt \stackrel{u=t^2-6t+10}{du=(2t-6)dt} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du + \int \frac{5}{t^2-6t+10} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du + \int \frac{5}{t^2-2 \cdot 3t+9-9+10} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du + \int \frac{5}{(t-3)^2+1} dt \stackrel{y=t-3}{dy=dt} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du + \int \frac{5}{y^2+1} dy = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du + 5 \int \frac{1}{y^2+1} dy = \frac{1}{2} \ln|u| + 5 \arctan(y) + c \\ &= \frac{1}{2} \ln(u^2+1) + 5 \arctan(t-3) + c = \\ &= \frac{1}{2} \ln(t^2-6t+10) + 5 \arctan(t-3) + c \end{aligned}$$

Η έκφραση  $t^2-6t+10$  (έχει διακρίνουσα  $<0$  οπότε και πρόσημο πάντα ομόσημο του συντελεστή του  $x^2$ ) είναι θετική και για αυτό δεν βάζουμε απόλυτο στο λογάριθμο.

**2. Περίπτωση που ο παρονομαστής  $q(x)$  είναι δευτέρου βαθμού και αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων πρώτου βαθμού με διαφορετικές ρίζες ο καθένας π.χ.**

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)} = \frac{n(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a_n)}$$

$\deg n(x) < \deg d(x) = n, a_i \neq a_j$

**Παραδείγματα:**

**α)**  $I = \int \frac{x-1}{(x+1)(x-2)} dx$

Αναλύουμε το κλάσμα σε επιμέρους κλάσματα

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B)x+(-2A+B)}{(x+1)(x-2)}$$

και εξισώνουμε τους συντελεστές των δυνάμεων του  $x$  στον αριθμητή του αρχικού και του τελικού κλάσματος

$$\begin{aligned} A+B &= 1 \\ -2A+B &= -1 \end{aligned}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα έχουμε

$$A = \frac{2}{3}, B = \frac{1}{3}$$

και άρα 
$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{2}{3} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{x-2}$$

Άρα τελικά 
$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x-1}{(x+1)(x-2)} dx = \int \left( \frac{2}{3} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{x-2} \right) dx = \\ &= \frac{2}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \ln|x-2| + c \end{aligned}$$

β) 
$$\int \frac{x+2}{x^2+2x-8} dx$$

Αναλύουμε τον παρονομαστή σε παράγοντες:

$$\frac{x+2}{x^2+2x-8} = \frac{x+2}{(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+4)}{(x+4)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A+4B}{(x+4)(x-2)}$$

Η ισότητα των αριθμητών μας οδηγεί στις σχέσεις :

$$\left. \begin{aligned} A+B &= 1 \\ -2A+4B &= 2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} A &= 1-B \\ -2A+4B &= 2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} A &= 1-B \\ -2(1-B)+4B &= 2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} A &= 1-B \\ 6B &= 4 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} A &= 1-B \\ B &= \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{3} \\ B &= \frac{2}{3} \end{aligned} \right\}$$

Οπότε 
$$\int \frac{x+2}{x^2+2x-8} dx = \int \left( \frac{1}{3(x+4)} + \frac{2}{3(x-2)} \right) dx = \frac{1}{3} \ln|x+4| + \frac{2}{3} \ln|x-2| + c$$

γ) 
$$\int \frac{x-3}{x^3-3x^2+2x} dx$$

Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής παραγοντοποιείται στην μορφή:

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$$

Οπότε αναλύουμε την  $f(x)$  σε "απλά" κλάσματα ως εξής:

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{\Gamma}{x-2}, \quad (*)$$

όπου A, B, Γ είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Οπότε

$$\frac{x-3}{x^3-3x^2+2x} = \frac{A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B+C)x^2 + (-3A-2B-C)x + 2A}{x^3-3x^2+2x}$$

Από όπου έχουμε το σύστημα

$$A+B+C=0$$

$$-3A-2B-C=1$$

$$2A=-3$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow[\Gamma 3 \rightarrow \Gamma 3 - 3\Gamma 1]{\Gamma 2 \rightarrow \Gamma 2 + 3\Gamma 1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma 3 \rightarrow \Gamma 3 + 2\Gamma 2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right]$$

$$\text{Από όπου έχω } C = -\frac{1}{2}, B = 1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 2, A = -B - C = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

Οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{(x-3)dx}{x(x-1)(x-2)} = -\frac{3}{2} \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-2} = -\frac{3}{2} \ln|x| + 2 \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x-2| + c$$

$$\delta) I = \int \frac{3x}{2x^2+5x+2} dx$$

Το πολυώνυμο  $2x^2+5x+2$  μπορεί να γραφεί ως  $(2x+1)(x+2)$ . Έτσι έχουμε:

$$\frac{3x}{(2x+1)(x+2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow 3x = A(x+2) + B(2x+1) \Rightarrow$$

$$3x = (A+2B)x + (2A+B) \Rightarrow A+2B=3 \text{ και } 2A+B=0.$$

Τώρα εύκολα υπολογίζουμε ότι  $A=-1$  και  $B=2$ . Συνεπώς, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int \left( \frac{2}{x+2} - \frac{1}{2x+1} \right) dx = 2 \int \frac{dx}{x+2} - \int \frac{dx}{2x+1} = 2 \ln|x+2| - \frac{1}{2} \ln|2x+1| + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\delta) I = \int \frac{e^t}{e^{2t} + 3e^t + 2} dt.$$

$$\text{Θέτουμε } e^t = x \Rightarrow e^{2t} + 3e^t + 2 = (e^t)^2 + 3e^t + 2 = x^2 + 3x + 2$$

$$x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$$

$$I = \int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx = \int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$$

Χρησιμοποιούμε τώρα μερικά κλάσματα

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{(A+B)x + 2A + B}{(x+1)(x+2)}$$

Από όπου έχουμε

$$A + B = 0 \Leftrightarrow B = -A \text{ και } 2A + B = 1 \Leftrightarrow 2A - A = 1 \Leftrightarrow A = 1 \text{ και } B = -A = -1$$

Και τελικά

$$I = \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{x+2} dx = \ln|x+1| - \ln|x+2| + c = \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| + c = \ln \left| \frac{e^t + 1}{e^t + 2} \right| + c = \ln \left( \frac{e^t + 1}{e^t + 2} \right) + c$$

$$\epsilon) I = \int \frac{e^x - 1}{e^x + 2} dx$$

Θέτουμε  $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$ , οπότε

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 2} dx = \frac{e^x - 1}{e^x + 2} \frac{du}{e^x} = \frac{u - 1}{u(u + 2)} du$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται:  $I = \int \frac{u-1}{u(u+2)} du$ . Γράφοντας την υπό ολοκλήρωση ποσότητα

υπό μορφή αθροίσματος παίρνουμε  $\frac{u-1}{u(u+2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+2} = \frac{(A+B)u + 2A}{u(u+2)}$ . Για να ισχύει η

ισότητα αρκεί:

$$\left. \begin{array}{l} A + B = 1 \\ 2A = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \text{ Τελικά το ολοκλήρωμα γίνεται:}$$

$$I = \int \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{u} + \frac{3}{2} \frac{1}{u+2} \right) du = -\frac{1}{2} \ln|u| + \frac{3}{2} \ln|u+2| + c = -\frac{1}{2} \ln|e^x| + \frac{3}{2} \ln|e^x + 2| + c$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(e^x) + \frac{3}{2} \ln(e^x + 2) + c \Rightarrow I = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} \ln(e^x + 2) + c$$

**3. Περίπτωση που ο παρονομαστής  $q(x)$  αναλύεται σε γινόμενο δύο παραγόντων, ενός πρώτου βαθμού και ενός δευτέρου βαθμού (ο οποίος δεν παραγοντοποιείται):**

$$\frac{\kappa x^2 + \lambda x + \mu}{(x+a)(x^2+bx+c)} = \frac{A}{x+a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$$

Εδώ νοείται ότι το πολυώνυμο  $x^2+bx+c$  δεν έχει πραγματικές ρίζες (δηλαδή έχει αρνητική διακρίνουσα) και δεν παραγοντοποιείται.

**Παράδειγμα**

$$\int \frac{(x-1)dx}{x^3+1}$$

Το κλάσμα αναλύεται ως εξής

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x^3+1} &= \frac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \\ &= \frac{Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{(A+B)x^2 + (-A+B+C)x + (A+C)}{(x+1)(x^2-x+1)} \end{aligned}$$

Οι αριθμητές των κλασμάτων πρέπει να είναι ταυτοτικά ίσοι άρα θα έχω το σύστημα:

$$A+B=0$$

$$-A+B+C=1$$

$$A+C=-1$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] &\xrightarrow{\substack{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right] &\xrightarrow{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 2\Gamma_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$A = -\frac{2}{3}, B = \frac{2}{3}, C = -\frac{1}{3}$$

οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται ως ακολούθως

$$I = \int \frac{(x-1)dx}{x^3+1} = -\frac{2}{3} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3} \int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}$$

Θέτοντας  $u = x+1 \Leftrightarrow du = dx$  και  $u = x^2-x+1 \Leftrightarrow du = (2x-1)dx$

$$I = -\frac{2}{3} \int \frac{du}{u} + \frac{1}{3} \int \frac{dv}{v} = -\frac{2}{3} \ln|u| + \frac{1}{3} \ln|v| + c = -\frac{2}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \ln|x^2 - x + 1| + c =$$

Έχουμε

$$= -\frac{2}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \ln(x^2 - x + 1) + c$$

Το απόλυτο έφυγε διότι το τριώνυμο  $x^2 - x + 1$  έχει αρνητική διακρίνουσα και το πρόσημό του είναι ομόσημο του συντελεστή του  $x^2$ .

**4. Περίπτωση που ο παρονομαστής  $q(x)$  αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων πρώτου (ή/και δευτέρου βαθμού οι οποίοι δεν παραγοντοποιούνται) καθένας από τους οποίους μπορεί να είναι υψωμένος σε δύναμη μεγαλύτερη της μονάδας.**

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x+a_1)^k (x+a_2)^m \cdots (x+a_l)^n} =$$

$$= \frac{A_1}{x+a_1} + \frac{A_2}{(x+a_1)} + \cdots + \frac{A_k}{(x+a_1)^k} + \frac{B_1}{x+a_2} + \frac{B_2}{(x+a_2)} + \cdots +$$

$$+ \frac{B_k}{(x+a_2)^k} + \cdots + \frac{C_1}{x+a_l} + \frac{C_2}{(x+a_l)} + \cdots + \frac{C_k}{(x+a_l)^k}$$

$$\deg(p(x)) < k + m + \cdots + n$$

ή

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x+a)^k (x^2+bx+c)^n} =$$

$$= \frac{A_1}{x+a} + \frac{A_2}{(x+a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x+a)^k} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}$$

$$\deg(p(x)) < k + n$$

**ή συνδυασμοί τέτοιων εκφράσεων.**

**Παραδείγματα**

α)  $I = \int \frac{x^2+3}{x^3-x^2-x+1} dx$

Πρώτα παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή

$$x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1)$$

Στη συνέχεια αναλύουμε την ρητή παράσταση σε απλά κλάσματα

$$\frac{x^2+3}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)(x+1)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} =$$

$$= \frac{(B+C)x^2+(A-2C)x+(A-B+C)}{(x-1)^2(x+1)}$$

και εξισώνουμε τους συντελεστές των δυνάμεων του  $x$  στους αριθμητές

$$B+C=1$$

$$A-2C=0$$

$$A-B+C=3$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right]$$

Υπολογίζουμε τα  $A, B$  και  $C$  από την επίλυση του παραπάνω συστήματος

$$A=2, B=0, C=1$$

και συνεπώς

$$\frac{x^2+3}{x^3-x^2-x+1} = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1}$$

ή ισοδύναμα

$$\int \frac{x^2+3}{x^3-x^2-x+1} dx = \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{2}{(x-1)^2} dx = \ln|x+1| - \frac{2}{x-1} + c$$

αφού

$$\int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int (x-1)^{-2} d(x-1) = \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{(x-1)} + c$$

$$\beta) I = \int \frac{x^2+3}{x^4-x^3} dx$$

Πρώτα παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή  $x^4-x^3 = x^3(x-1)$ . Στη συνέχεια αναλύουμε την ρητή παράσταση σε απλά κλάσματα

$$\frac{x^2+3}{x^4-x^3} = \frac{x^2+3}{x^3(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} = \frac{A(x-1)x^2 + B(x-1)x + C(x-1) + Dx^3}{x^3(x-1)} =$$

$$= \frac{(A+D)x^3 + (-A+B)x^2 + (-B+C)x - C}{x^3(x-1)}$$

και εξισώνουμε τους συντελεστές των δυνάμεων του  $x$  στους αριθμητές

$$\begin{aligned} A + D &= 0 \\ -A + B &= 1 \\ -B + C &= 0 \\ -C &= 3 \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα  $A, B$  και  $C$  από την επίλυση του παραπάνω συστήματος

$$A = B - 1 = -4, B = -3, C = -3, D = -A = 4$$

$$I = \int \frac{x^2 + 3}{x^4 - x^3} dx = \int -\frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x-1} dx = 4 \ln|x-1| - 4 \ln|x| - 3 \frac{x^{-1}}{-1} - 3 \frac{x^{-2}}{-2} + c =$$

$$\text{Συνεπώς} = 4 \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + \frac{3}{x} + \frac{3}{2x^2} + c$$

$$\gamma) I = \int \frac{x^4 + x^3 + 2x - 2}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2} dx$$

$$\text{Ισχύει: } x^5 - x^4 + x^3 - x^2 = x^4(x-1) + x^2(x-1) = (x^4 + x^2)(x-1) = x^2(x^2 + 1)(x-1)$$

Οπότε η προς ολοκλήρωση συνάρτηση αναλύεται ως

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$x^4 + x^3 + 2x - 2 = Ax(x-1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + Cx^2(x^2+1) + (Dx+E)x^2(x-1)$$

Για να διευκολύνουμε τη διαδικασία επίλυσης του συστήματος μπορούμε να δώσουμε τιμές διάφορες στο  $x$  και να δούμε τι μας δίνει η παραπάνω ισότητα:

$$\text{Για } x=0 \text{ έχουμε } -2 = -B \Leftrightarrow B=2$$

$$\text{Για } x=1 \text{ έχουμε } 2 = 2C \Leftrightarrow C=1$$

$$\text{Για } x=-1 \text{ έχουμε } -4 = 4A - 8 + 2 - 2(-D+E) \Leftrightarrow 2A + D - E = 1$$

$$\text{Για } x=2 \text{ έχουμε } 26 = 10A + 10 + 20 + 4(2D+E) \Leftrightarrow 5A + 4D + 2E = -2$$

$$\text{Για } x=-2 \text{ έχουμε } 2 = 30A - 30 + 20 - 12(-2D+E) \Leftrightarrow 5A + 4D - 2E = 2$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις είναι φανερό ότι  $E = -1$ .

Τελικά λύνοντας τις  $2A + D = 0$  και  $5A + 4D = 0$ .

Έχουμε  $A = D = 0$  και δηλαδή συνολικά  $A = 0, B = 2, C = 1, D = 0, E = -1$ .

Οπότε

$$f(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2+1}.$$

Έτσι το ζητούμενο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής:

$$\int \frac{x^4 + x^3 + 2x - 2}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2} dx = \int \frac{2}{x^2} dx + \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx =$$

$$= 2 \int x^{-2} dx + \int (x-1)^{-1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx = -\frac{2}{x} + \ln|x-1| - \arctan(x) + c.$$

**B) Περίπτωση που ο αριθμητής  $p(x)$  έχει βαθμό μεγαλύτερο από τον βαθμό του παρονομαστή  $q(x)$ :**

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{και} \quad \deg p(x) > \deg q(x)$$

Εκτελούμε τη διαίρεση και έχουμε ως αποτέλεσμα έναν αριθμό και ένα κλάσμα του οποίου ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του αριθμητή.

$$f(x) = A(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)} \quad \text{και} \quad \deg p_1(x) < \deg q(x)$$

Οπότε έχουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int A(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)} dx = \int A(x) dx + \int \frac{p_1(x)}{q(x)} dx$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι πολυωνυμικό και το δεύτερο είναι ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης που ο αριθμητής έχει βαθμό μικρότερο από τον βαθμό του παρονομαστή.

### Παραδείγματα

α) Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x^4 - x^3 + 2x - 3}{x^2 - 1} dx$$

Αφού ο βαθμός του παρονομαστή είναι μικρότερος από το βαθμό του αριθμητή, κάνουμε τη διαίρεση:

$x^4 - x^3$	$+ 2x - 3$	$x^2 - 1$
$-x^4$	$+ x^2$	$x^2 - x + 1$
$-x^3 + x^2 + 2x - 3$		
$x^3$	$- x$	
$x^2 + x - 3$		
$-x^2$	$+ 1$	
$x - 2$		

Οπότε ισχύει  $x^4 - x^3 + 2x - 3 = (x^2 - 1)(x^2 - x + 1) + x - 2$ .

Άρα έχουμε: 
$$\frac{x^4 - x^3 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - x + 1) + x - 2}{x^2 - 1} = (x^2 - x + 1) + \frac{x - 2}{x^2 - 1}$$

$$\int \frac{x^4 - x^3 + 2x - 3}{x^2 - 1} dx = \int (x^2 - x + 1) + \frac{x - 2}{x^2 - 1} dx = \int (x^2 - x + 1) dx + \int \frac{x - 2}{x^2 - 1} dx$$

Το πρώτο από τα δύο ολοκληρώματα είναι ολοκλήρωση πολυωνύμου.

$$\int (x^2 - x + 1) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c_1$$

Ενώ για το δεύτερο

$$\int \frac{x - 2}{x^2 - 1} dx = \int -\frac{1}{2} \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{2} \frac{1}{x + 1} dx = -\frac{1}{2} \ln|x - 1| + \frac{3}{2} \ln|x + 1| + c_2$$

Διότι 
$$\frac{x - 2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} \Leftrightarrow \frac{x - 2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{(A + B)x + A - B}{(x - 1)(x + 1)}$$

Από όπου έχουμε 
$$\left. \begin{array}{l} A + B = 1 \\ A - B = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{3}{2} \end{array} \right\}$$

β) 
$$I_1 = \int \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)} dx$$

Πιθανές ρίζες του αριθμητή είναι οι ακέραιοι διαιρέτες του σταθερού όρου, του -9 στην περίπτωση μας. Δηλαδή πιθανές ρίζες είναι οι 1, -1, 3, -3, 9, -9. Έτσι παρατηρούμε ότι ο αριθμητής του κλάσματος διαιρείται ακριβώς με το  $x - 1$ .

$x^3 + 5x^2 + 3x - 9$	$x - 1$
$-x^3 + x^2$	$x^2 + 6x + 9$
<hr/> $6x^2 + 3x - 9$	
$-6x^2 + 6x$	
<hr/> $9x - 9$	
$-9x + 9$	
<hr/> $0$	

Οπότε γράφουμε

$$x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = (x-1)(x^2 + 6x + 9) = (x-1)(x+3)^2.$$

Και μπορούμε να απλοποιήσουμε την έκφραση:

$$\frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{(x-1)(x+3)^2}{(x-1)(x^2 - 2x - 5)} = \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 2x + 5}, \quad x \neq 1$$

και επομένως

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 2x + 5} dx = \int \frac{x^2 - 2x + 5 + 8x + 4}{x^2 - 2x + 5} dx = \int \left( 1 + \frac{8x + 4}{x^2 - 2x + 5} \right) dx = \\ &= x + \int \frac{8x + 4}{x^2 - 2x + 5} dx \end{aligned}$$

Όπως είδαμε, το ολοκλήρωμα  $\int \frac{8x+4}{x^2-2x+5} dx$  είναι ένα ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης με αριθμητή ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού και παρονομαστή ένα πολυώνυμο 2<sup>ου</sup> βαθμού το οποίο δεν έχει πραγματικές ρίζες, οπότε δεν παραγοντοποιείται.

Για να το υπολογίσουμε, το είδαμε και παραπάνω, θα εφαρμόσουμε συμπλήρωση τετραγώνου του παρονομαστή, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{8x+4}{x^2-2x+5} dx = \int \frac{8x+4}{x^2-2x+1+4} dx = \int \frac{8x+4}{(x-1)^2+4} dx \stackrel{u=x-1}{du=dx} = \int \frac{8(u+1)+4}{u^2+4} du = \\ &= \int \frac{8u}{u^2+4} du + \int \frac{12}{u^2+2^2} du = 4 \int \frac{2u}{u^2+4} du + 6 \int \frac{2}{u^2+2^2} du \stackrel{v=u^2+4}{dv=2udu} = 4 \int \frac{dv}{v} + 6 \int \frac{2}{u^2+2^2} du = \\ &= 4 \ln|v| + 6 \arctan\left(\frac{u}{2}\right) + c = 4 \ln|u^2+4| + 6 \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c = \\ &= 4 \ln(x^2 - 2x + 5) + 6 \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c \end{aligned}$$

Οπότε, τελικά έχουμε

$$I_1 = x + I_2 = x + \int \frac{8x+4}{x^2-2x+5} dx = x + 4 \ln(x^2 - 2x + 5) + 6 \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$$

Υπάρχουν και άλλες (πολλές) κατηγορίες ολοκληρωμάτων τόσο ρητών όσο και άλλων μορφών συναρτήσεων. Δεν θα μας απασχολήσουν όμως στην παρούσα φάση.