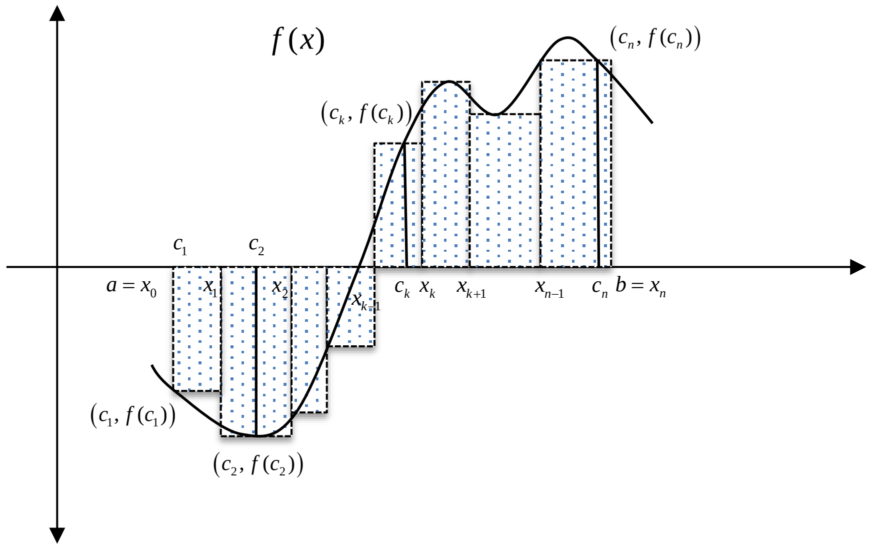
6. Ορισμένο Ολοκλήρωμα

6.1 Γενικά Ορισμοί

Έστω ότι η $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα $[a,b]$. Χωρίζουμε το διάστημα $[a,b]$ σε n υποδιαστήματα επιλέγοντας $n+1$ σημεία τέτοια ώστε

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

Το σύνολο $P=\{x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n\}$ ονομάζεται **διαμέριση** του διαστήματος $[a,b]$. Η διαμέριση αυτή ορίζει n κλειστά υποδιαστήματα $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2],\ldots,$ $[x_{n-1},x_n]$ με πλάτη Δx_1, $\Delta x_2,\ldots$, Δx_n όπου $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ το καθένα.



Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων προσεγγίζουν το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης της συνάρτησης και του άξονα xx'. Καθένα από αυτά τα εμβαδά ισούται με $f(c_k)\cdot\Delta x_k$ όπου το $(c_k, f(c_k))$ είναι σημείο της καμπύλης το οποίο ανήκει στο διάστημα $[x_{k-1},x_k]$.

Θεωρούμε το **άθροισμα Riemann** (όπως ονομάζεται) **της συνάρτησης** ***f(x)*** **στο διάστημα** $[a,b]$:

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k$$

Όσο το n μεγαλώνει και πυκνώνει η διαμέριση, τα ορθογώνια γίνονται περισσότερα και πιο λεπτά και το άθροισμα των εμβαδών τους προσεγγίζει όλο και καλύτερα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης της συνάρτησης $f(x)$ και του άξονα xx'. Εάν υπάρχει το όριο

$$I = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot \Delta x_k$$

ανεξάρτητα του τρόπου επιλογής της διαμέρισης P και των c_k τότε λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι **ολοκληρώσιμη** στο διάστημα και το I είναι το **ορισμένο ολοκλήρωμά** της στο διάστημα $[a,b]$ αυτό. Συμβολίζουμε δε,

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

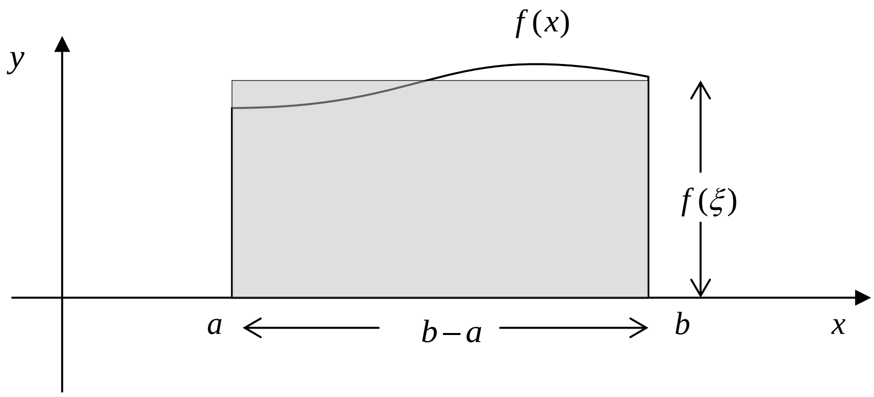
Κάθε συνεχής σε ένα διάστημα [a,b] είναι ολοκληρώσιμη σε αυτό το διάστημα.
Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων:

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

6.2 Σημαντικά Θεωρήματα Θεωρήματα Ολοκληρωτικού Λογισμού.

6.2.1 Θεώρημα Μέσης τιμής για τα ορισμένα ολοκληρώματα.

Αν $f(x)$ είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a,b]$ τότε $f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$ για κάποιο $\xi \in [a,b]$.



6.2.2 Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$, τότε η συνάρτηση $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό και ισχύει:

$$\frac{dF}{dx}=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Παράδειγμα: $F(x)=\int\limits_1^{x^3}\sqrt[3]{t}\ln(t)\,dt$

$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_1^{x^3}\sqrt[3]{t}\ln(t)\,dt \overset{u=x^3}{=} \frac{d}{du}\int\limits_1^{u}\sqrt[3]{t}\ln(t)\,dt\cdot\frac{du}{dx}=$$

$$=\sqrt[3]{u}\ln(u)\cdot\frac{d}{dx}(u) \overset{u=x^3}{=} \sqrt[3]{x^3}\ln\left(x^3\right)\frac{d}{dx}\left(x^3\right)=x\cdot 3\cdot\ln(x)\cdot 3\cdot x^2=9x^3\ln(x)$$

6.2.3 Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Αν η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$ και F είναι μία παράγουσα συνάρτηση της $f(x)$, τότε

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

Παράδειγμα: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\,dx=\left[-\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-\left(-\cos(0)\right)=0+1=1$

6.2.4 Υπολογισμός Μέσης Τιμής συνάρτησης

Αν η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$ τότε ορίζουμε ως **μέση τιμή** της στο διάστημα αυτό την ποσότητα:

$$av(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Παράδειγμα: Η μέση τιμή της συνάρτησης *sin(x)* στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ισούται με

$$av(f)=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\cos(0)\right)\right)=\frac{2}{\pi}(0+1)=\frac{2}{\pi}$$

6.3 Τεχνικές Ολοκλήρωσης

6.3.1 Ολοκλήρωση συναρτήσεων που αλλάζουν συμπεριφορά μέσα στο διάστημα ολοκλήρωσης.

Παράδειγμα $\int_0^3 \frac{|x-1|}{x^2+1}dx$

Επειδή $|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x<1 \end{cases}$, και για το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{x}{x^2+1}dx$ μπορούμε να γράψουμε $\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$, για το ορισμένο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^3 \frac{|x-1|}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{-x+1}{x^2+1}dx + \int_1^3 \frac{x-1}{x^2+1}dx = \\
&= -\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx + \int_1^3 \frac{x}{x^2+1}dx - \int_1^3 \frac{1}{x^2+1}dx \\
&= -\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 + \left[\arctan(x)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_1^3 - \left[\arctan(x)\right]_1^3 \\
&= -\frac{1}{2}(\ln(2)-\ln(1)) + \arctan(1) - \arctan(0) + \frac{1}{2}(\ln(10)-\ln(2)) - \arctan(3) + \arctan(1) \\
&= \frac{1}{2}(\ln(10)-2\ln(2)) - \arctan(3) + 2\arctan(1) = \frac{1}{2}(\ln(10)-\ln(2^2)) - \arctan(3) + 2\frac{\pi}{4} = \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{10}{4}\right) - \arctan(3) + \frac{\pi}{2} = \ln\sqrt{\frac{5}{2}} - \arctan(3) + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

6.3.2 Παραγοντική Ολοκλήρωση

$$
\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)f'(x)dx
$$

Παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
&\int_1^2 \ln^2(x)dx = \int_1^2 (x)'\ln^2(x)dx = [x\ln^2(x)]_1^2 - \int_1^2 x\cdot 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}dx = \\
&= [2\ln^2(2) - \underbrace{\ln^2(1)}_{=0}] - 2\int_1^2 \ln(x)dx = 2\ln^2(2) - 2\int_1^2 (x)'\ln(x)dx = \\
&= 2\ln^2(2) - 2\left([x\ln(x)]_1^2 - \int_1^2 x\frac{1}{x}dx\right) = 2\ln^2(2) - 4\ln(2) + 2\int_1^2 dx = 2\ln^2(2) - 4\ln(2) + 2
\end{aligned}
$$

6.3.3 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Παράδειγμα

$\int_0^1 \frac{2x-5}{x^2-5x+6}dx$ Θέτουμε $u = x^2-5x+6 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = 2x-5 \Leftrightarrow du = \left(2x-5\right)dx$

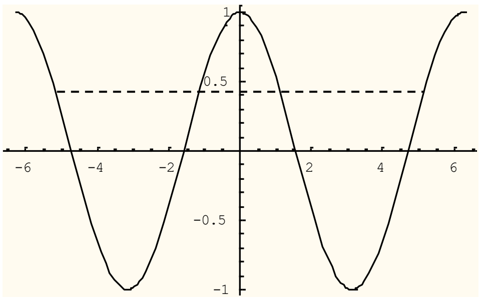
$$\int_0^1 \frac{2x-5}{x^2-5x+6}dx \underset{u=x^2-5x+6}{=} \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{du}{u} = \int_6^2 \frac{du}{u} = -\int_2^6 \frac{du}{u} = -\left[\ln|6|-\ln|2|\right] = \ln\left(2\right)-\ln\left(6\right) =$$
$$= \ln\left(\frac{2}{6}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln(1)-\ln(3) = -\ln(3).$$

6.3.4 Ολοκλήρωση άρτιων και περιττών συναρτήσεων σε συμμετρικό διάστημα

Μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα *[-α,α]* είναι **άρτια** εφόσον ισχύει η σχέση *f(-x)=f(x)*. Οι άρτιες συναρτήσεις είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα *yy'*.

Παράδειγμα

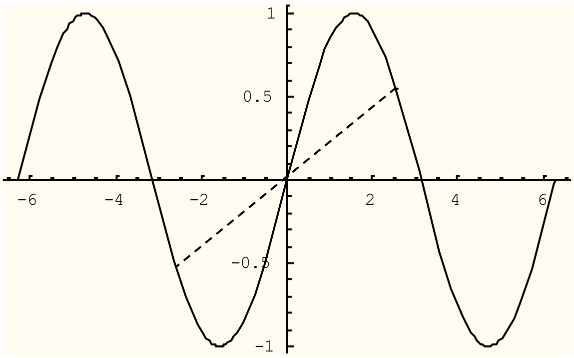
Η συνάρτηση *y=cos(x)*



Μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα *[-α,α]* είναι **περιττή** εφόσον ισχύει η σχέση *f(-x)=-f(x)*. Οι περιττές συναρτήσεις είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση *y=sin(x)*



Το **άθροισμα δύο άρτιων συναρτήσεων είναι πάντα άρτια** συνάρτηση, το **άθροισμα δύο περιττών συναρτήσεων είναι πάντα περιττή**. Το **άθροισμα άρτιας και περιττής συνάρτησης δεν μπορούμε να το χαρακτηρίσουμε** ως άρτια ή περιττή συνάρτηση.

Επίσης **το γινόμενο δύο άρτιων συναρτήσεων είναι πάντα άρτια** συνάρτηση, **το γινόμενο δύο περιττών συναρτήσεων είναι πάντα άρτια**. Το γινόμενο **άρτιας και περιττής συνάρτησης είναι πάντα περιττή** συνάρτηση.

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι για f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-a,a](a>0)$ και $x\in[-a,a]$ αν **η** f **είναι άρτια** $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ και αν **η** f **είναι περιττή** $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Απόδειξη

Αν η συνάρτηση είναι άρτια ισχύει $f(-x)=f(x), \forall x\in[-a,a]$, επομένως $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$. Θέτουμε $x=-u \Rightarrow dx=-du$ και έχουμε

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx \underset{u=-x}{=} \int_{a}^{0} f(-u)(-du) = -\int_{a}^{0} f(u)du = \int_{0}^{a} f(u)du \underset{u=x}{=} \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Άρα $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dt$.

Αν η συνάρτηση είναι περιττή ισχύει $f(-x)=-f(x), \forall x\in[-a,a]$ τότε

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx \underset{u=-x}{=} \int_{a}^{0} f(-u)(-du) = \int_{a}^{0} f(u)du = -\int_{0}^{a} f(u)du \underset{u=x}{=} -\int_{0}^{a} f(x)dx,$$

επομένως

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

Παραδείγματα

α)

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2+\sin(x)}{x^2+1}dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{x^2+1}dx + \int_{-1}^{1} \frac{\sin(x)}{x^2+1}dx = 2\int_{0}^{1} \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx + 0 = 2\int_{0}^{1} dx - 2\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$= 2[x]_0^1 - 2[\arctan(x)]_0^1 = 2(1-0) - 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = 2 - \frac{\pi}{2}$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2+1}$ είναι περιττή διότι

$f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{(-x)^2+1} = -\dfrac{\sin(x)}{x^2+1} = -f(x)$ οπότε το ολοκλήρωμά της σε συμμετρικό

διάστημα είναι ίσο με 0, δηλαδή $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin(x)}{x^2+1}dx = 0$ και το ότι η $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ είναι άρτια

διότι $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \dfrac{x^2}{x^2+1} = f(x)$.

β)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x+\cos(x)}{\tan^2(x)+1}dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x}{\tan^2(x)+1}dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\tan^2(x)+1}dx = 0 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}+1}dx =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^3(x)}{\sin^2(x)+\cos^2(x)}dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3(x)dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos^3(x)dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos(x)(1-\sin^2(x))dx =$$

$$= 2\int_{0}^{\pi/2} \cos(x)dx - 2\int_{0}^{\pi/2} \cos(x)\sin^2(x)dx = 2[\sin(x)]_0^{\pi/2} - 2\left[\frac{\sin^3(x)}{3}\right]_0^{\pi/2} = 2\cdot(1-0) - 2\frac{1^3-0}{3} = \frac{4}{3}$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε το ότι $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos(x)dx \overset{u=\sin(x)}{=} \int u^2 du = \frac{u^3}{3} = \frac{\sin^3(x)}{3} + c$

και το ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{\tan^2(x)+1}$ είναι περιττή διότι

$f(-x) = \dfrac{-x}{\tan^2(-x)+1} = -\dfrac{x}{\tan^2(x)+1} = -f(x)$,οπότε το ολοκλήρωμά της σε

συμμετρικό διάστημα είναι ίσο με 0, δηλαδή $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x}{\tan^2(x)+1}dx = 0$. Τέλος, η

$f(x) = \cos^3(x)$ είναι άρτια συνάρτηση διότι $f(-x) = \cos^3(-x) = \cos^3(x) = f(x)$

οπότε $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3(x)dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos^3(x)dx$.

6.3.5 Σειρές και πολυώνυμα Taylor στην ολοκλήρωση

Εκμεταλλευόμενοι ότι **κάθε σειρά Taylor ολοκληρώνεται όρο προς όρο στο διάστημα σύγκλισης της** μπορούμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα συναρτήσεων (κυρίως αυτών των οποίων ο αναλυτικός υπολογισμός του ολοκληρώματος δεν είναι δυνατός) ως άπειρες σειρές. Χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες σειρές Taylor μπορούμε να έχουμε προσεγγίσεις των ζητούμενων ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{-x}$. Χρησιμοποιώντας τους τέσσερις πρώτους όρους του αναπτύγματος σε σειρά Taylor της *f(x)* με κέντρο $x_0=0$, βρείτε μία προσέγγιση για το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$. Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση βρείτε την ακριβή τιμή του ολοκληρώματος και υπολογίστε το σφάλμα της προηγούμενης προσέγγισης. Πόσο μεταβάλλεται το % απόλυτο σφάλμα όταν προσθέσουμε έναν ακόμη όρο;

Ο τύπος της σειράς με κέντρο το 0 είναι $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Υπολογίζουμε τις επιμέρους ποσότητες:

$$f(x) = xe^{-x},\ f(0) = 0$$

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x},\ f'(0) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = -2e^{-x} + xe^{-x},\ f^{(2)}(0) = -2$$

$$f^{(3)}(x) = 3e^{-x} - xe^{-x},\ f^{(3)}(0) = 3$$

$$f^{(4)}(x) = -4e^{-x} + xe^{-x},\ f^{(4)}(0) = -4$$

Οπότε, η σειρά Taylor στο $x_0=0$ είναι η

$$xe^{-x} = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 + \ldots\ldots =$$

$$= 0 + \frac{1}{1!}x - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 - \frac{4}{4!}x^4 + \ldots = x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} + \ldots$$

Εναλλακτικά μπορούμε να βρούμε το ανάπτυγμα από τους τύπους:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$xe^{-x} = x - x^2 + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^6}{5!} + \ldots$$

Για το αόριστο ολοκλήρωμα ισχύει:

$$\int xe^{-x}dx = \int\left(x - x^2 + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^6}{5!} + \ldots\right)dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4\cdot 2!} - \frac{x^5}{5\cdot 3!} + \frac{x^6}{6\cdot 4!} - \frac{x^7}{7\cdot 5!} + \ldots + c =$$
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{30} + \frac{x^6}{144} - \frac{x^7}{840} + \ldots + c =$$

Οπότε χρησιμοποιώντας τους τέσσερις πρώτους όρους του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης έχουμε ότι

$$xe^{-x} \approx x - x^2 + \frac{x^3}{2}$$

Και η προσέγγιση του ολοκληρώματος, κάνοντας πράξεις με 6 δεκαδικά ψηφία, είναι:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\cdot e^{-x}dx \approx \int_0^1\left(x - x^2 + \frac{x^3}{2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = 0.291667$$

Η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος είναι :

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\cdot e^{-x}dx = \int_0^1 x\cdot\left(-e^{-x}\right)'dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 x'\cdot\left(-e^{-x}\right)dx$$
$$= -e^{-1} + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_{x=0}^{x=1} = -e^{-1} - e^{-1} + e^0 = -2e^{-1} + 1$$

Επομένως το απόλυτο σφάλμα της προσέγγισης που έγινε είναι:

Απόλυτο Σφάλμα=|(Πραγμ. τιμή) – (Προς. τιμή)| =| $\left(-2e^{-1}+1\right)$–0.292|=
=|0.264241-0.291667|=0.027426.

Το επί τοις εκατό σχετικό σφάλμα είναι ίσο με

0.027426/0.264241 x100 %=10.38%

Εάν τώρα χρησιμοποιήσουμε ένα ακόμη όρο του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης έχουμε ότι

$$xe^{-x} \approx x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6}$$

Και η προσέγγιση του ολοκληρώματος είναι:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\cdot e^{-x}dx \approx \int_0^1 \left(x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{30} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{30} = 0.258333$$

Επομένως, το απόλυτο σφάλμα της προσέγγισης που έγινε είναι:

Απόλυτο Σφάλμα=|(Πραγμ. τιμή) – (Προς. τιμή)| =| $\left(-2e^{-1}+1\right)$–0.258|=
=|0.264241-0.258333|=0.005911.

Το επί τοις εκατό σχετικό σφάλμα είναι ίσο με 0.006/0.264 x100 %=2.24%.

Εάν προσθέσουμε ακόμη ένα όρο στην προηγούμενη προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος θα προστεθεί η ποσότητα $\left[\frac{x^6}{144} \right]_0^1 = \frac{1}{144} \approx 0.006944$. Εάν προσθέσουμε ακόμη έναν όρο το αποτέλεσμα της προσέγγισης θα μεταβληθεί κατά $\left[-\frac{x^7}{840} \right]_0^1 = -\frac{1}{840} \approx 0.00119048$. Οπότε παρατηρούμε προστίθενται ή αφαιρούνται όλο και μικρότερες ποσότητες. Εάν υπολογίσουμε ακόμη έναν (τον έβδομο) όρο, το αποτέλεσμα της προσέγγισης θα μεταβληθεί κατά $\left[\frac{x^8}{5760} \right]_0^1 = \frac{1}{5760} \approx 0.0001736$.

Ο συγκεκριμένος όρος θα είναι μεγαλύτερος (κατά απόλυτη τιμή) από τον κάθε επόμενο στην άπειρη σειρά που υπολογίζει το ολοκλήρωμα. Οπότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ο όρος αυτός μας περιγράφει (όσο αφορά την τάξη μεγέθους) το σφάλμα που θα έχουμε στην ολοκλήρωση (εάν δεν γνωρίζαμε την ακριβή τιμή). Δηλαδή εάν θεωρήσουμε τους πρώτους έξι όρους η προσέγγιση θα είναι ακριβής σε τρία τουλάχιστον δεκαδικά ψηφία εφόσον ο κυρίαρχος όρος σφάλματος θα είναι της τάξης του 0.0001736.

6.3.6 Προσεγγιστικός υπολογισμός Ολοκληρωμάτων

Ο αναλυτικός (ακριβής) υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος μίας συνάρτησης είτε γιατί δεν είναι πάντα δυνατός διότι δεν είναι δυνατός (ή εύκολος) ο αναλυτικός υπολογισμός του αόριστου ολοκληρώματος της συνάρτησης ή γιατί δεν έχουμε στη διάθεσή μας τη συνάρτηση αλλά μόνο τιμές της. Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορούμε να υπολογίσουμε μία προσεγγιστική τιμή του ζητούμενου ολοκληρώματος. Μία μεθοδολογία είναι αυτή που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο με τη χρήση αναπτυγμάτων Taylor η οποία βασίζεται στην προσέγγιση της συνάρτησης τοπικά από ένα πολυώνυμο. Είναι πολύ πιο συνηθισμένο, και μοναδική λύση όταν έχουμε μόνο τιμές της συνάρτησης και όχι τον τύπο της να χρησιμοποιούμε μία διαφορετική αλγοριθμική μεθοδολογία, η οποία μπορεί να προγραμματιστεί και στον υπολογιστή. Σκοπός μας είναι να προσεγγίσουμε την τιμή του ολοκληρώματος

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

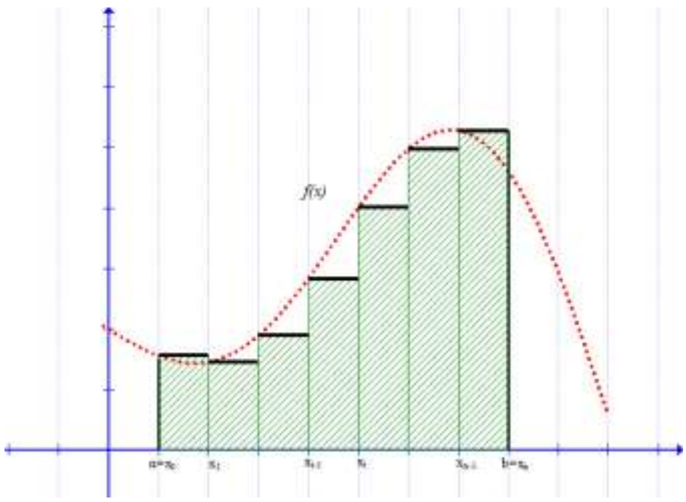
Ο πιο απλός τύπος ονομάζεται **κανόνας του Ορθογωνίου**. Για να τον εφαρμόσουμε διαμερίζουμε (χωρίζουμε) το διάστημα ολοκλήρωσης $[a,b]$ σε n διαστήματα θεωρώντας τα ακόλουθα $n+1$ σημεία

$$x_0 = a, x_1 = a+h, x_2 = a+2h, ..., x_{n-1} = a+(n-1)h,\ x_n = b, \text{ όπου } h = \frac{b-a}{n}.$$

Η προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος δίνεται από τον τύπο

$$I \approx h\left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1})\right)$$

και σχηματικά παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα όπου το άθροισμα των γραμμοσκιασμένων εμβαδών ορθογωνίων παραλληλογράμμων είναι η προσέγγιση του ολοκληρώματος.



Αποδεικνύεται ότι το σφάλμα της προσέγγισης αυτής φράσσεται από τον τύπο

$$|E| \le \frac{b-a}{2} hM$$

όπου θεωρούμε ότι η παράγωγος $f'(x)$ είναι συνεχής και Μ τυχόν άνω φράγμα των τιμών της $|f'(x)|$ στο $[a,b]$.

Παράδειγμα:

Θα προσεγγίσουμε με τον κανόνα του ορθογωνίου με $n=5$ το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 x^2 dx$$

Θεωρούμε τα ακόλουθα σημεία

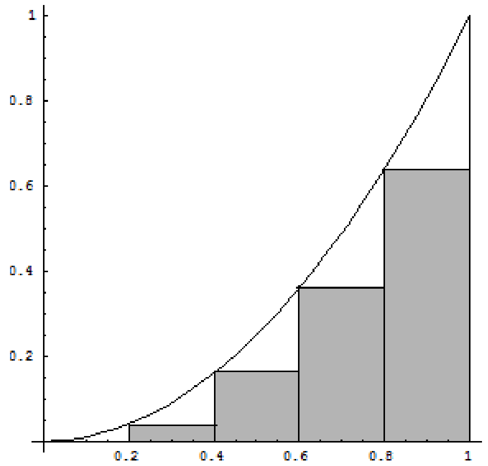
$$x_0 = 0, x_1 = 0 + h = 0.2, x_2 = 0 + 2h = 0.4, x_3 = 0 + 3h = 0.6, x_4 = 0 + 4h = 0.8\,,\ x_5 = 1\,,$$

όπου $h = \frac{1-0}{5} = 0.2$.

και η προσέγγιση του ολοκληρώματος δίνεται από τον υπολογισμό

$$I \approx 0.2 \times (f(0) + f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8)) =$$
$$= 0.2 \times \left(0.0^2 + 0.2^2 + 0.4^2 + 0.6^2 + 0.8^2\right) = 0.24$$

Σχηματικά υπολογίσαμε τα γραμμοσκιασμένα εμβαδά και τα προσθέσαμε:



Η ακριβής τιμής του ολοκληρώματος είναι

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

και το απόλυτο σφάλμα $|0.3333333 - 0.24| = 0.0933333$ που ικανοποιεί το άνω φράγμα του σφάλματος

$$|E| \le \frac{1-0}{2} 0.2 \cdot 2 = 0.2$$

αφού $(x^2)' = 2x$ οπότε και $M = 2$ η μέγιστη τιμή της στο διάστημα ολοκλήρωσης.

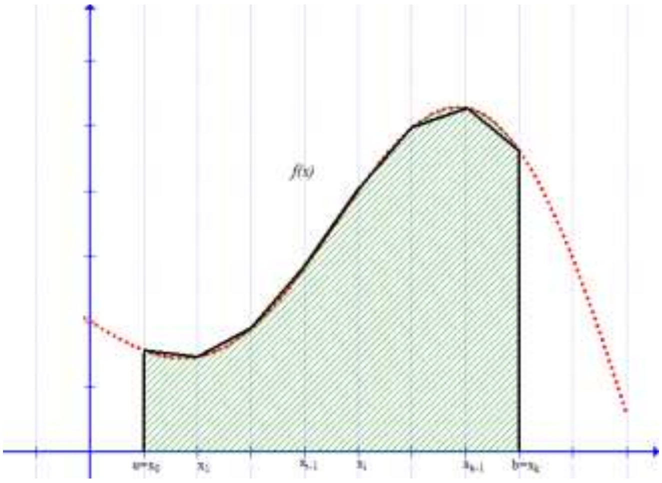
Ένας άλλος προσεγγιστικός πιο ακριβής τύπος, είναι **κανόνας του Τραπεζίου**. Για να εφαρμόζουμε και αυτόν, διαμερίζουμε (χωρίζουμε) το διάστημα ολοκλήρωσης $[a,b]$ σε n διαστήματα θεωρώντας τα ακόλουθα $n+1$ σημεία

$$x_0 = a, x_1 = a+h, x_2 = a+2h, ..., x_{n-1} = a+(n-1)h,\ x_n = b, \text{ όπου } h = \frac{b-a}{n}.$$

Η προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος δίνεται από τον τύπο

$$I \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

και σχηματικά παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα όπου το άθροισμα των γραμμοσκιασμένων εμβαδών τραπεζίων είναι η προσέγγιση του ολοκληρώματος.



Αποδεικνύεται ότι το σφάλμα της προσέγγισης αυτής φράσσεται από τον τύπο

$$|E| \le \frac{b-a}{12} h^2 M$$

όπου θεωρούμε ότι η δεύτερη παράγωγος $f''(x)$ είναι συνεχής και M τυχόν άνω φράγμα των τιμών της $|f''(x)|$ στο $[a,b]$.

Παράδειγμα

α) Θα προσεγγίσουμε τώρα με τον κανόνα του τραπεζίου με $n=5$ το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 x^2 dx$$

Θεωρούμε τα ακόλουθα σημεία

$$x_0 = 0, x_1 = 0 + h = 0.2, x_2 = 0 + 2h = 0.4, x_3 = 0 + 3h = 0.6, x_4 = 0 + 4h = 0.8\,,\ x_5 = 1\,,$$

όπου $h = \dfrac{1-0}{5} = 0.2$.

και η προσέγγιση του ολοκληρώματος δίνεται από τον υπολογισμό

$$I \approx \frac{0.2}{2}(f(0) + 2f(0.2) + 2f(0.4) + 2f(0.6) + 2f(0.8) + f(1)) =$$
$$= 0.1 \times \left(0.0^2 + 2\cdot 0.2^2 + 2\cdot 0.4^2 + 2\cdot 0.6^2 + 2\cdot 0.8^2 + 1.0^2\right) = 0.34$$

Εφόσον η ακριβής τιμής του ολοκληρώματος είναι

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

το απόλυτο σφάλμα είναι $|0.333333 - 0.034| = 0.066667$ που ικανοποιεί το άνω φράγμα του σφάλματος

$$|E| \le \frac{1-0}{12} 0.2^2 \cdot 2 = 0.066667$$

αφού $(x^2)'' = 2$ οπότε και $M = 2$ η μέγιστη τιμή της στο διάστημα ολοκλήρωσης.

β) Γνωρίζοντας ότι

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \left[\ln|x|\right]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

χρησιμοποιείστε τον κανόνα του τραπεζίου για υπολογίστε προσεγγιστικά τον αριθμό $\ln 2$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-2}.

Ξέρουμε ότι $(x^{-1})'' = (-x^{-2})' = 2x^{-3}$. Η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η δεύτερη παράγωγος στο διάστημα $[1, 2]$ είναι για $x = 1$η τιμή 2, αφού η $2x^{-3}$ είναι φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Έστω $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2-1}{n} = \dfrac{1}{n}$ το βήμα με το οποίο θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο του τραπεζίου από το τύπο φράγματος του σφάλματος έχουμε

$$|E| \le \frac{b-a}{12} h^2 M \le 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{2-1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2 2 < 10^{-2} \Rightarrow \frac{1}{6n^2} < 10^{-2} \Rightarrow \frac{100}{6} < n^2 \Rightarrow$$
$$n > \sqrt{\frac{100}{6}} \approx 4.082$$

οπότε με $n=5$ μπορούμε να εξασφαλίσουμε τον υπολογισμό του $\ln 2$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-2}.

Θα προσεγγίσουμε λοιπόν με τον κανόνα του Τραπεζίου με $n=5$ το ολοκλήρωμα

$$I=\int_1^2 \frac{1}{x}dx$$

Θεωρούμε τα ακόλουθα σημεία

$x_0=1, x_1=1+h=1.2, x_2=1+2h=1.4, x_3=1+3h=1.6, x_4=1+4h=1.8$, $x_5=2$, όπου

$$h=\frac{1-0}{5}=0.2\,.$$

και η προσέγγιση του ολοκληρώματος δίνεται από τον υπολογισμό

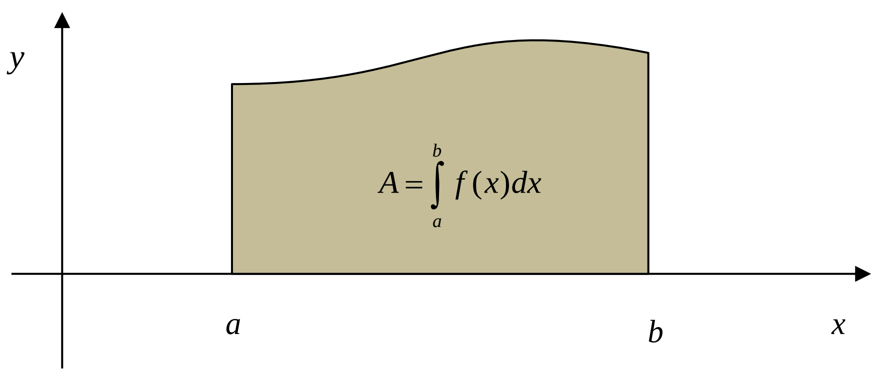
$$\begin{aligned}
I &\approx \frac{0.2}{2}(f(1)+2f(1.2)+2f(1.4)+2f(1.6)+2f(1.8)+f(2))=\\
&=0.1\times\left(\frac{1}{1.0}+2\cdot\frac{1}{1.2}+2\cdot\frac{1}{1.4}+2\cdot\frac{1}{1.6}+2\cdot\frac{1}{1.8}+\frac{1}{2}\right)=\\
&=0.1\times\left(1+2\cdot 0.8333+2\cdot 0.714286+2\cdot 0.625+2\cdot 0.555556+0.5\right)=\\
&=\frac{1}{10}\cdot 6.95634=0.695634
\end{aligned}$$

Η τιμή που παίρνουμε από τον ορισμό είναι $\ln 2=0.693147$, βλέπουμε επομένως ότι έχουμε ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων.

6.4 Εφαρμογές

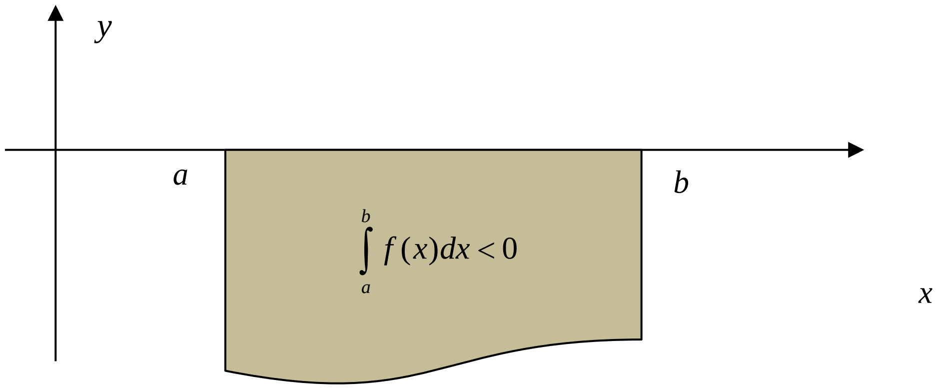
6.4.1 Υπολογισμοί Εμβαδών

Αν η $f(x)$ είναι μη αρνητική και ολοκληρώσιμη σε ένα διάστημα $[a,b]$, τότε το **εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη** $y=f(x)$ **και τις ευθείες** $x=a, x=b$ **και** $y=0$ **ισούται με το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης σε αυτό το διάστημα:**



Αν η $f(x)$ είναι αρνητική και ολοκληρώσιμη σε ένα διάστημα $[a,b]$, τότε ισχύει $\int_a^b f(x)dx<0$ και το **εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη** $y=f(x)$ **και τις ευθείες** $x=a, x=b$ **και** $y=0$ **ισούται με :**

$$A=\left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$



Παράδειγμα: Υπολογίστε την συνολική επιφάνεια των κλειστών χωρίων που ορίζεται από την καμπύλη

$$y=x^3-x$$

και τον άξονα των x.

Σε τέτοια προβλήματα πρέπει να προηγηθεί μελέτη της προς ολοκλήρωση συνάρτησης και γραφική της παράσταση ώστε να διαπιστώσουμε σε ποια διαστήματα η συνάρτηση είναι θετική και σε ποια αρνητική. Υπολογίζουμε τα σημεία τομής της συνάρτησης και του άξονα των x. Υπολογίζουμε επίσης, την πρώτη παράγωγό της συνάρτησης, το πρόσημό της και τα σημεία στα οποία μηδενίζεται (κρίσιμα σημεία). Τέλος, υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγό της καμπύλης, το πρόσημό της και την τιμή της στα κρίσιμα σημεία.

$$f(x)=x^3-x=x(x-1)(x+1)$$

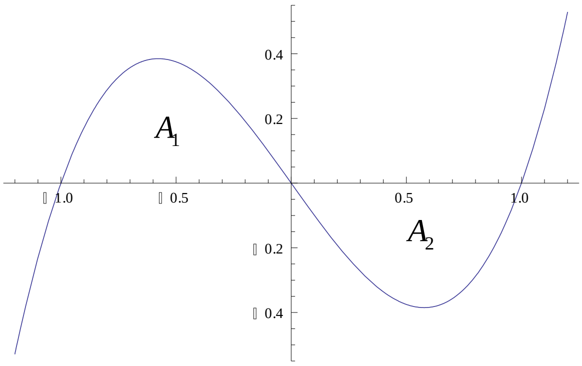
$$f'(x)=3x^2-1=3\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=3\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$f''(x)=6x$$

Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

	$-\infty$		-1		$-\sqrt{3}/3$		0		$+\sqrt{3}/3$		1		$+\infty$
f		- ↗	0	+ ↗		↘	0	- ↘		↗	0	+ ↗	
f'		+		+	0	-		-	0	+		+	
f''		-		-			0	+				+	
					τ. max		σ.κ.		τ. min				

και η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι η ακόλουθη:



Οπότε για το ζητούμενο εμβαδό έχουμε

$$E = |A1| + |A2| = \int_{-1}^{0}\left(x^3 - x\right)dx + \left|\int_{0}^{1}\left(x^3 - x\right)dx\right| = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right| =$$

$$= 0 - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2}\right] + \left|\left[\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2}\right]\right| = -\left(-\frac{1}{4}\right) + \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Το εμβαδόν μεταξύ δύο καμπύλων για τις οποίες ισχύει $f_1(x) \geq f_2(x)$ για $a \leq x \leq b$ ισούται με

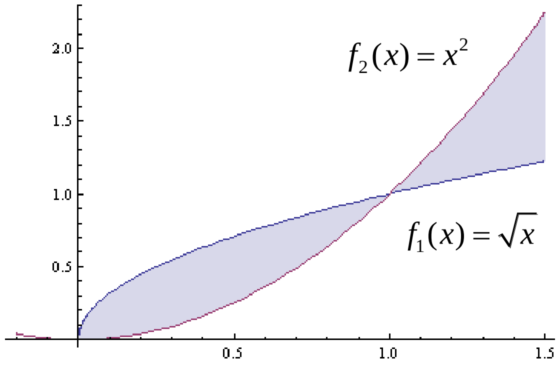
$$E = \int_a^b \left| f_1(x) - f_2(x) \right| dx$$

Οπότε σε τέτοιες περιπτώσεις θα πρέπει να μελετάμε ως προς το πρόσημο της την συνάρτηση $h(x) = f_1(x) - f_2(x)$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το εμβαδόν του κλειστού χωρίου που ορίζουν οι συναρτήσεις $f_1(x) = \sqrt{x}$ και $f_2(x) = x^2$.

Θα βρούμε τα σημεία τομής των δύο καμπυλών.

$\sqrt{x} = x^2 \Leftrightarrow x = x^4 \Leftrightarrow x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3-1) = 0 \Leftrightarrow$
$x(x-1)(x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$
Παρατηρούμε ότι, στο διάστημα [0,1] η συνάρτηση $h(x) = \sqrt{x} - x^2$ παίρνει θετικές τιμές, οπότε:



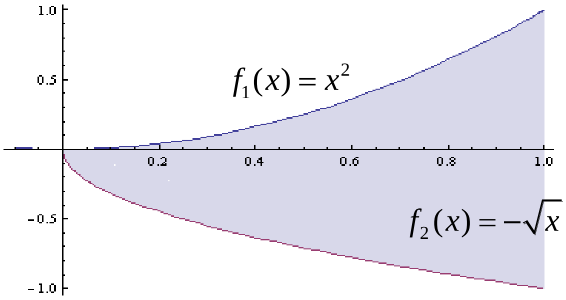
$$E = \int_0^1 \left|\sqrt{x} - x^2\right| dx = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}1^{\frac{3}{2}} - \frac{1^3}{3}\right] - \left[\frac{2}{3}0^{\frac{3}{2}} - \frac{0^3}{3}\right] = \frac{1}{3}$$

Παράδειγμα Να υπολογιστεί το εμβαδόν του κλειστού χωρίου που ορίζουν οι καμπύλες $f_1(x) = x^2$ και $f_2(x) = -\sqrt{x}$ και $x = 1$.

Στο διάστημα [0,1] ισχύει $\left|x^2 + \sqrt{x}\right| = x^2 + \sqrt{x}$.

$$E = \int_0^1 \left|x^2 - \left(-\sqrt{x}\right)\right| dx = \int_0^1 \left|x^2 + \sqrt{x}\right| dx = \int_0^1 \left(x^2 + \sqrt{x}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \left[\frac{1^3}{3} + \frac{2}{3}1^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{2}{3}0^{\frac{3}{2}}\right] = 1$$

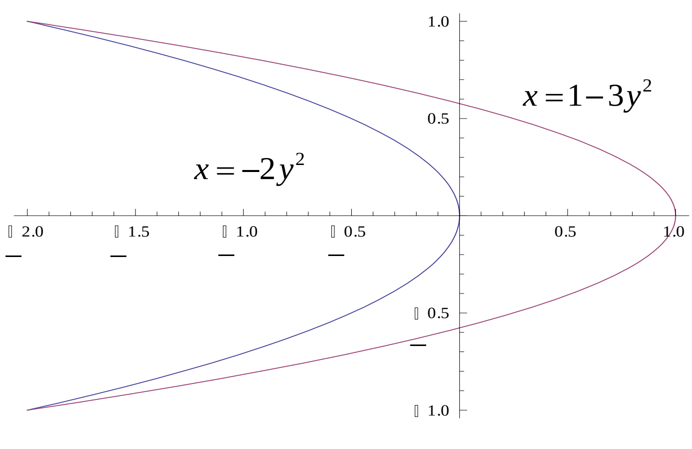


Το εμβαδόν μεταξύ δύο καμπύλων για τις οποίες ισχύει $f_1(y) \geq f_2(y)$ για $a \leq y \leq b$ ισούται με

$$E = \int_a^b \left|f_1(y) - f_2(y)\right| dy$$

Παράδειγμα Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $x = -2y^2$ και $x = 1 - 3y^2$.

Σε αυτήν την άσκηση θα θεωρήσουμε τις συναρτήσεις ως συναρτήσεις της μορφής $x = f(y)$ και το ζητούμενο ολοκλήρωμα υπολογίζεται από τον τύπο που παραθέσαμε παραπάνω.



Βρίσκουμε τα σημεία τομής των δύο καμπύλων λύνοντας το σύστημα το δύο εξισώσεων των δύο συναρτήσεων:

$$\left.\begin{array}{l} x=-2y^2 \\ x=1-3y^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2y^2 \\ -2y^2=1-3y^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2y^2 \\ y^2=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2y^2 \\ y=1 ή \quad y=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{ccc} x=-2 & & x=-2 \\ \text{και} & ή & \text{και} \\ y=1 & & y=-1 \end{array}\right\}$$

Το προς ολοκλήρωση διάστημα είναι το $[-1,1]$. Για $y \in [-1,1]$, οπότε έχουμε:

$1-3y^2 \geq -2y^2 \Leftrightarrow 1-y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (1-y)(1+y) \geq 0$ οπότε ισχύει $\left|1-y^2\right| = 1-y^2$.

Συνεπώς το ζητούμενο εμβαδόν χωρίου είναι:

$$\int_{-1}^{1}\left|\left(1-3y^2\right)-\left(-2y^2\right)\right|dy = \int_{-1}^{1}\left|1-y^2\right|dy = \int_{-1}^{1}\left(1-y^2\right)dy = [y]_{-1}^{1} - \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2-\frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

6.4.2 Μήκος τμήματος καμπύλης

Το μήκος τμήματος καμπύλης της συνάρτησης $y = f(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a,b]$ ισούται με

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το μήκος του τμήματος της καμπύλης $y = x^{\frac{3}{2}}$ που ορίζεται ανάμεσα στις ευθείες $x=0$ και $x=4$.

Για τη συγκεκριμένη συνάρτηση ισχύει $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ οπότε το μήκος είναι

$$L = \int_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{4+9x}\,dx$$

Για να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \sqrt{4+9x}\,dx$ θέτουμε όπως έχουμε αναφέρει $u = \sqrt{4+9x} \Leftrightarrow u^2 = 4+9x \Leftrightarrow 2u\dfrac{du}{dx} = 9 \Leftrightarrow \dfrac{2}{9}udu = dx$ οπότε

$$\int \sqrt{4+9x}\,dx = \int u\frac{2}{9}udu = \frac{2}{9}\int u^2du = \frac{2}{9}\frac{u^3}{3} + c = \frac{2\left(\sqrt{4+9x}\right)^3}{27} + c = \frac{2(4+9x)^{\frac{3}{2}}}{27} + c$$

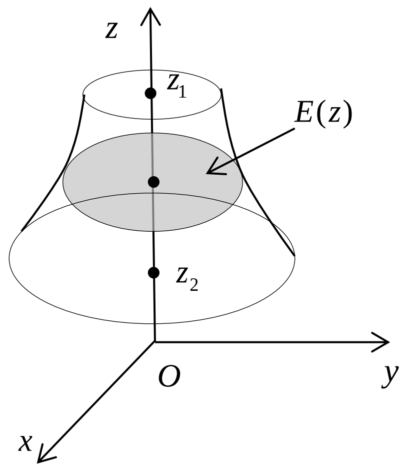
Οπότε τελικά

$$L=\frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{4+9x}dx=\frac{1}{2}\left[2\frac{(4+9x)^{\frac{3}{2}}}{27}\right]_0^4=\frac{1}{27}\left((4+9\cdot 4)^{\frac{3}{2}}-(4+9\cdot 0)^{\frac{3}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{27}\left(40^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{4^{\frac{3}{2}}}{27}\left(10^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{8}{27}\left(10^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

6.4.3 Υπολογισμοί όγκων

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα στερεό, όπως φαίνεται στη σχήμα, για το οποίο γνωρίζουμε το εμβαδό $E(z)$ κάθε διατομής του από ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα των z.



Ο όγκος του στερεού δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$V=\int_{z_1}^{z_2}E(z)dz.$$

Όταν γνωρίζουμε το εμβαδό $E(x)$ κάθε διατομής του από ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα των x τότε ο όγκος ισούται με

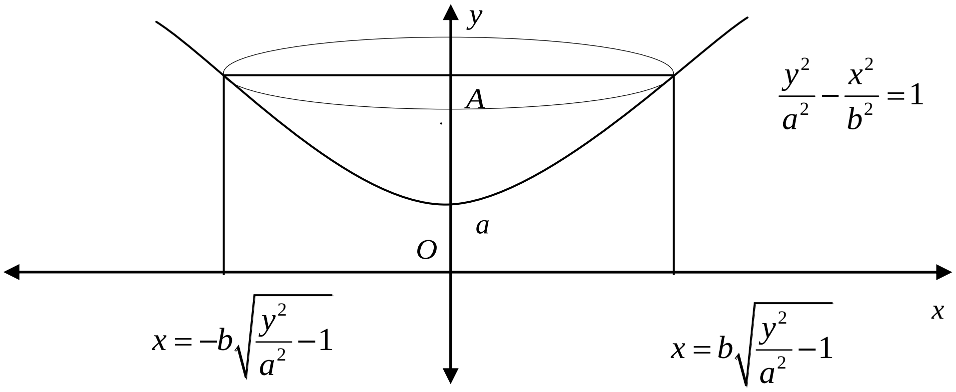
$$V=\int_{x_1}^{x_2}E(x)dx\,.$$

Ενώ όταν γνωρίζουμε το εμβαδό $E(y)$ κάθε διατομής του από ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα των x τότε ο όγκος ισούται με

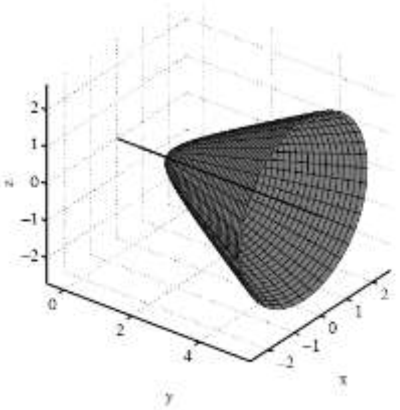
$$V=\int_{y_1}^{y_2}E(y)dy\,.$$

Παράδειγμα

Έστω ο κλάδος της υπερβολής $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ για τον οποίο y > 0. Εάν περιστρέψουμε τον κλάδο περί τον άξονα των y δημιουργούμε ένα κωνικό κέλυφος που μοιάζει με ποτήρι. Πόσος όγκος νερού χρειάζεται για να γεμίσουμε το ποτήρι μέχρι το ύψος $y = A$; Εννοείται πως $A > \alpha$.



Παρατηρούμε ότι μετά την περιστροφή μία κάθετη τομή στον άξονα yy' είναι ένας κύκλος με ακτίνα x και εμβαδό $E(x) = \pi x^2$. Σε ύψος $y > \alpha$, η ακτίνα του κύκλος είναι $x = b\sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1}$, άρα ο όγκος του νερού μέχρι τη θέση *A* είναι:

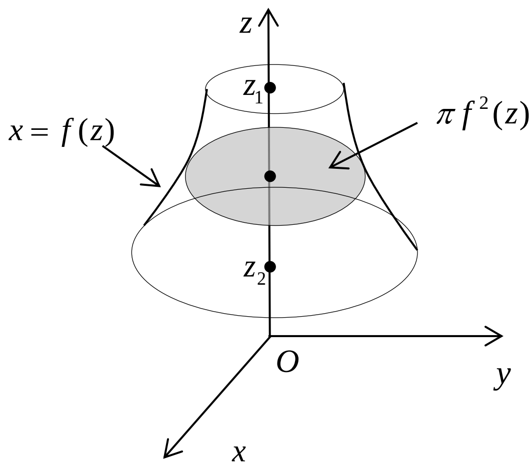


$$\int_a^A \pi x^2 dy = \int_a^A \pi b^2 \left(\frac{y^2}{a^2} - 1 \right) dy = \pi b^2 \left[\left(\frac{y^3}{3a^2} - y \right) \right]_a^A =$$

$$= \pi b^2 \left[\frac{A^3}{3a^2} - A - \frac{a^3}{3a^2} + a \right] = \pi b^2 \left[\frac{A^3}{3a^2} - A + \frac{2a}{3} \right].$$

Εάν τώρα το στερεό προέρχεται από την περιστροφή της επίπεδης καμπύλης $x=f(z)$ του επιπέδου $x0z$ γύρω από τον άξονα z, τότε ο όγκος του στερεού από περιστροφή δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$V = \int_{z_1}^{z_2} \pi f^2(z) dz$$



Εάν το στερεό προέρχεται από την περιστροφή της επίπεδης καμπύλης *y=f(x)* του επιπέδου *x0y* γύρω από τον άξονα *x*, τότε ο όγκος του στερεού από περιστροφή δίνεται από το ολοκλήρωμα

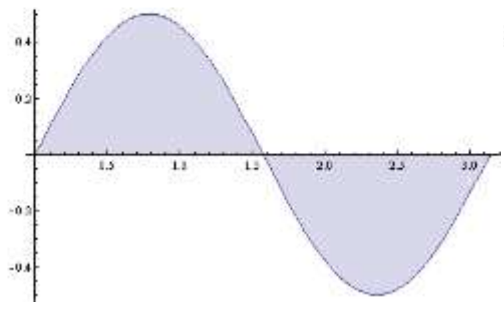
$$V = \int_{x_1}^{x_2} \pi f^2(x) dx.$$

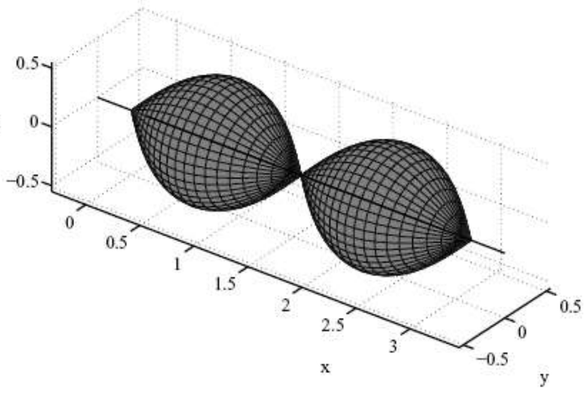
Εάν το στερεό προέρχεται από την περιστροφή της επίπεδης καμπύλης *x=f(y)* του επιπέδου *x0y* γύρω από τον άξονα *y*, τότε ο όγκος του στερεού από περιστροφή δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$V = \int_{y_1}^{y_2} \pi f^2(y) dy.$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού V που δημιουργείται λόγω περιστροφής του γραφήματος της συνάρτησης $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ γύρω από τον άξονα των x, για το διάστημα $x \in [0, \pi]$.





Σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο ο όγκος δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$V=\int_0^{\pi}\pi\left[\sin(x)\cos(x)\right]^2dx=\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\sin^2(2x)dx=\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(4x)}{2}dx=$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}dx-\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\frac{\cos(4x)}{2}dx=\frac{\pi}{8}\left[x\right]_0^{\pi}-\frac{\pi}{8}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(4x)}{4}\right)'dx=$$

$$=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{32}\int_0^{\pi}\left(\sin(4x)\right)'dx=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{32}\left[\sin(4x)\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{32}\left[\sin(4\pi)-\sin(0)\right]=\frac{\pi^2}{8}.$$

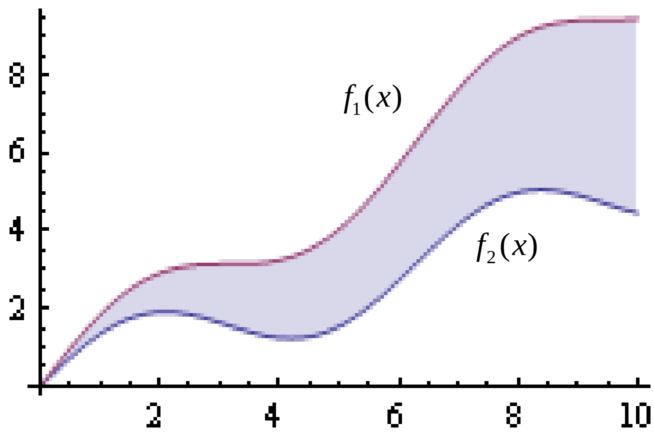
Όπου χρησιμοποιήσαμε τις ακόλουθες τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x)=1-2\sin^2(x)\Leftrightarrow\sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}\Leftrightarrow\sin^2(2x)=\frac{1-\cos(4x)}{2}$$

Στην περίπτωση που θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο στερεού που προέρχεται από την περιστροφή του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ δύο καμπυλών $y=f_1(x)$ και $y=f_2(x)$ γύρω από τον άξονα των x ο όγκος ισούται με:

$$V=\pi\int_a^b(f_1^2(x)-f_2^2(x))dx$$



Ανάλογα, ο όγκος του στερεού που προέρχεται από την περιστροφή του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ δύο καμπυλών $x=f_1(y)$ και $x=f_2(y)$ γύρω από τον άξονα των y ο όγκος ισούται με:

$$V=\pi\int_a^b(f_1^2(y)-f_2^2(y))dy$$

Παραδείγματα

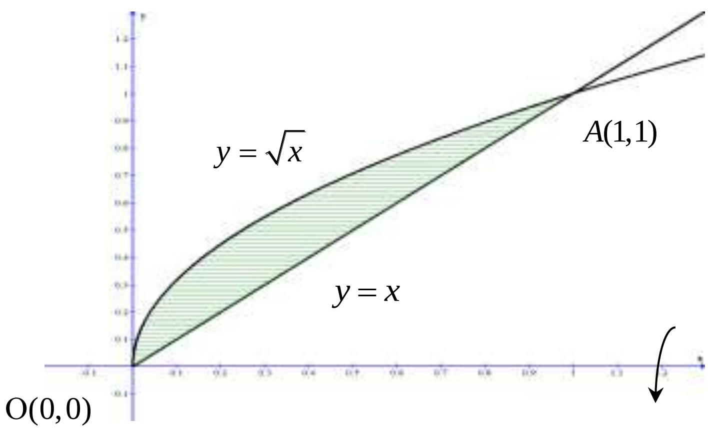
1. Να βρεθεί ο όγκος εκ περιστροφής, γύρω από τον άξονα των x, του χωρίου που περιέχεται πάνω από τη συνάρτηση $y=\sqrt{x}$ και κάτω από την $y=x$.

Τα σημεία τομής των δύο καμπυλών βρίσκονται στο 1° τεταρτημόριο $(x,y\geq 0)$

και προκύπτουν από τη λύση του συτσήματος:

$$\left.\begin{array}{l} y=x \\ y=\sqrt{x} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=x \\ x=\sqrt{x} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=x \\ x^2=x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=x \\ x^2-x=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=x \\ x(x-1)=0 \end{array}\right\}$$

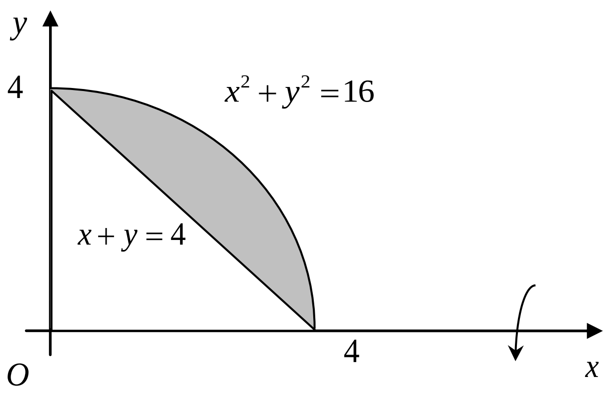
$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=x \\ x=1 \text{ ή } x=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=0,\ y=0 \\ \text{ή} \\ x=1, y=1 \end{array}\right\}$$



Ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή, γύρω από τον άξονα xx', του κλειστού χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες ($f_1(x)=\sqrt{x}$ και $f_2(x)=x$) δίνεται από τον τύπο:

$$V=\pi\int_0^1\left(f_1^{\,2}(x)-f_2^{\,2}(x)\right)dx=\pi\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$$

2. Να βρεθεί ο όγκος εκ περιστροφής, γύρω από τον άξονα των x, του χωρίου που περιέχεται μεταξύ του τόξου του κύκλου $x^2+y^2=16$ και της ευθείας $x+y=4$.



Βρίσκω τα σημεία τομής:

$$\left.\begin{matrix} x^2+y^2=16 \\ x+y=4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x^2+y^2=16 \\ x=4-y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} (y-4)^2+y^2=16 \\ x=4-y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y^2-8y+16+y^2=16 \\ x=4-y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} 2y^2-8y+16=16 \\ x=4-y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2y^2-8y=0 \\ x=4-y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2y^2-8y=0 \\ x=4-y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y(y-4)=0 \\ x=4-y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=0 \\ x=4 \end{matrix} \text{ ή } \begin{matrix} y=4 \\ x=0 \end{matrix}$$

Συνεπώς:

$$V=\pi\int_0^4\left(\left(\sqrt{16-x^2}\right)^2-\left(4-x\right)^2\right)dx=\pi\int_0^4 16-x^2-\left(4-x\right)^2dx$$

$$=\pi\int_0^4 16-x^2-16+8x-x^2dx=\pi\int_0^4 -2x^2+8xdx=\pi\left[\frac{-2x^3}{3}+8\frac{x^2}{2}\right]_0^4=$$

$$=\pi\left(\frac{-2\cdot 64}{3}+8\frac{16}{2}-0-0\right)=\pi\left(64-\frac{2\cdot 64}{3}\right)=\frac{64\pi}{3}$$

6.5 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Ολοκληρώματα συναρτήσεων με άπειρα όρια ολοκλήρωσης ονομάζονται **γενικευμένα ολοκληρώματα α' είδους** της *f(x)*.

Έστω ότι η *f(x)* μία πραγματική συνάρτηση συνεχής

α) στο διάστημα $[a,\infty)$ τότε

$$\int_a^{\infty} f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

β) στο διάστημα $(-\infty,a]$ τότε

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx=\lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx$$

γ) στο διάστημα $(-\infty,\infty)$ τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int_c^{\infty} f(x)dx$$

όπου c τυχών πραγματικός αριθμός.

Αν το όριο (ή και τα δύο όρια στην περίπτωση γ) υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπάρχει ή **συγκλίνει**. Αν το όριο δεν υπάρχει ή απειρίζεται τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα **αποκλίνει**.

Παραδείγματα

α)

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\left[\ln(x)\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\ln(b) = +\infty$$

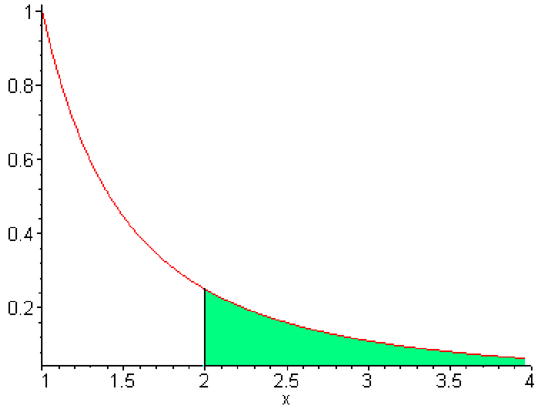
β)

$$\int_0^{\infty} \cos(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} \cos(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\sin(x)\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\sin(b)$$

το οποίο δεν υπάρχει επειδή στην περίπτωση όπου το x απειρίζεται η συνάρτηση $sin(x)$ κυμαίνεται μεταξύ 1 και -1.

γ)

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_2^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_2^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$



Ολοκληρώματα συναρτήσεων οι οποίες απειρίζονται σε κάποιο σημείο εντός του διαστήματος ολοκλήρωσης ονομάζονται **γενικευμένα ολοκληρώματα β' είδους** της $f(x)$.

Έστω ότι η $f(x)$ μία πραγματική συνάρτηση συνεχής

α) στο διάστημα $(a,b]$ τότε

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx$$

β) στο διάστημα $[a,b)$ τότε

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx$$

γ) στο διάστημα $[a,c)\cup(c,b]$ τότε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Αν το όριο (ή και τα δύο όρια στην περίπτωση γ) υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπάρχει ή **συγκλίνει**. Αν το όριο δεν υπάρχει ή απειρίζεται τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα **αποκλίνει**.

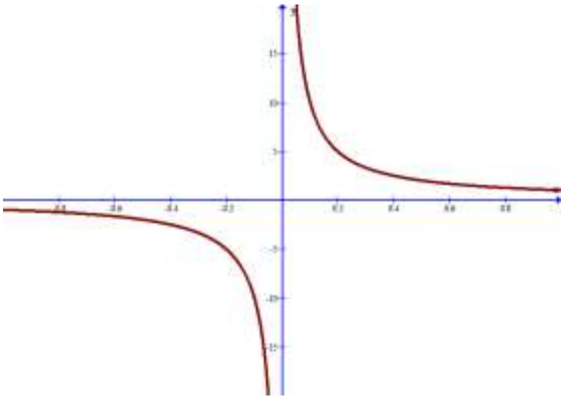
Παραδείγματα

$$\int_{0+}^{2}\frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to 0+}\int_{a}^{2}\frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to 0+}\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_a^2=$$

$$=\lim_{a\to 0+}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^2=\lim_{a\to 0+}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{a}\right)=+\infty$$

β) Ο παρακάτω υπολογισμός ολοκληρώματος είναι λανθασμένος.

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx=\left[\ln|x|\right]_{-1}^{1}=\ln(1)-\ln|-1|=0$$



Ο σωστός υπολογισμός είναι ο ακόλουθος

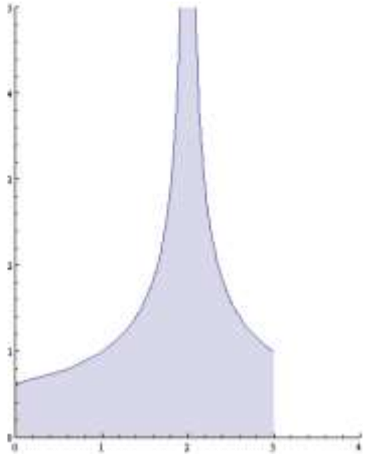
$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx=\lim_{a\to 0-}\int_{-1}^{a}\frac{1}{x}dx+\lim_{a\to 0+}\int_{a}^{1}\frac{1}{x}dx$$

Υπολογίζουμε τα δύο ολοκληρώματα ξεχωριστά και βλέπουμε ότι δεν συγκλίνουν και το κάθε χωρίο ξεχωριστά δεν είναι φραγμένο.

$$\lim_{a\to 0-}\int_{-1}^{a}\frac{1}{x}dx=\lim_{a\to 0-}\left[\ln|x|\right]_{-1}^{a}=\lim_{a\to 0-}\left(\ln|a|\right)-\ln|-1|=-\infty$$

$$\lim_{a\to 0+}\int_{a}^{1}\frac{1}{x}dx=\lim_{a\to 0+}\left[\ln|x|\right]_{a}^{1}=\ln|1|-\lim_{a\to 0+}\left(\ln|a|\right)=+\infty$$

Το αποτέλεσμα μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.



γ)

$$\int_{0}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}=\lim_{a\to 2-}\int_{0}^{a}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}+\lim_{a\to 2+}\int_{a}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}=$$

$$=\lim_{a\to 2-}\int_{0}^{a}|x-2|^{-\frac{2}{3}}dx+\lim_{a\to 2+}\int_{a}^{3}|x-2|^{-\frac{2}{3}}dx=$$

$$=\lim_{a\to 2-}\int_{0}^{a}(2-x)^{-\frac{2}{3}}dx+\lim_{a\to 2+}\int_{a}^{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}dx=$$

$$=\lim_{a\to 2-}-\int_{0}^{a}(2-x)^{-\frac{2}{3}}d(2-x)+\lim_{a\to 2+}\int_{a}^{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}d(x-2)=$$

$$= \lim_{a\to 2-}\left[-\frac{(2-x)^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\right]_0^a + \lim_{a\to 2+}\left[\frac{(x-2)^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\right]_a^3 =$$

$$= \lim_{a\to 2-}\left[-\frac{(2-x)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right]_0^a + \lim_{a\to 2+}\left[\frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right]_a^3 =$$

$$= \lim_{a\to 2-}\left[-3\sqrt[3]{(2-x)}\right]_0^a + \lim_{a\to 2+}\left[3\sqrt[3]{(x-2)}\right]_a^3 =$$
$$= -0 + 3\sqrt[3]{2} + 3 - 0 = 3 + 3\sqrt[3]{2}$$

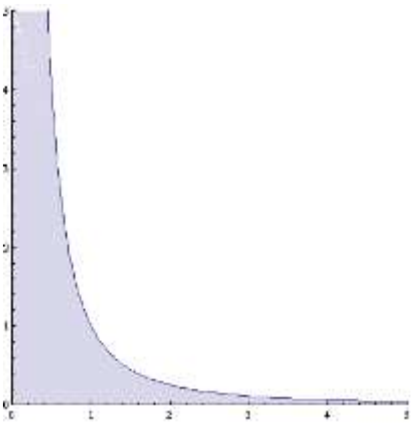
Παρατήρηση: Υπενθυμίζουμε ότι δεν ορίζονται οποιαδήποτε τάξης ρίζα αρνητικού αριθμού και ρητές δυνάμεις αρνητικών αριθμών. Δηλαδή $a^{\frac{k}{m}}$ ορίζεται όταν $a \geq 0$. Για αυτό το λόγο αντικαθιστούμε $\sqrt[3]{a^2} = |a|^{\frac{2}{3}}$. Επίσης εδώ χρησιμοποιήσαμε ότι

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{όταν } x > 2 \\ 2-x & \text{όταν } x < 2 \end{cases}.$$

Ολοκληρώματα συναρτήσεων τα οποία μπορούν να χαρακτηριστούν συγχρόνως ως α’ και β’ είδους ονομάζονται **γενικευμένα ολοκληρώματα γ’ είδους** της *f(x)*.

Παράδειγμα

$$\int_{0+}^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \int_{0+}^{b}\frac{dx}{x^2} + \int_{b}^{+\infty}\frac{dx}{x^2} =$$
$$= \lim_{a\to 0+}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b + \lim_{a\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_b^a =$$
$$= \lim_{a\to 0+}\left[-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right] + \lim_{a\to+\infty}\left[-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right] =$$
$$= +\infty + \frac{1}{b} = +\infty$$



Παράδειγμα, Η συνάρτηση Γάμμα

Έστω φυσικός αριθμός $n>0$. Η συνάρτηση Γάμμα στη θέση n, ορίζεται από τον τύπο:

$$\Gamma(n)=\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$$

α) Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση, δείξατε ότι $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ για $n>0$ και με την βοήθεια αυτής της σχέσης την $\Gamma(n+1)=n!,(n=0,1,2,3,...)$

β) Στηριζόμενοι στα προηγούμενα αποτελέσματα, υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int\limits_0^{+\infty} x^6e^{-2x}dx$

Λύση

α) Από τον ορισμό της Γάμμα συνάρτησης έχουμε:

$$\Gamma(n+1)=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a x^n e^{-x}dx$$

Ολοκληρώνοντας παραγοντικά, έχουμε διαδοχικά:

$$\int_0^a x^n e^{-x}dx=\int_0^a x^n(-e^{-x})'dx=[x^n\cdot(-e^{-x})]_0^a-\int_0^a nx^{n-1}(-e^{-x})dx=$$

$$=-a^n e^{-a}+n\int_0^a x^{n-1}e^{-x}dx$$

Υπολογίζουμε τώρα το όριο και έχουμε

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a x^n e^{-x}dx=\lim_{a\to\infty}(-a^n e^{-a})+n\lim_{a\to\infty}\int_0^a x^{n-1}e^{-x}dx$$

Το δεύτερο όριο είναι ίσο με $\Gamma(n)$, ενώ το πρώτο υπολογίζεται με κανόνα L´Hospital:

$$\lim_{a\to\infty}(-a^n e^{-a})=\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{a^n}{e^a}\right)=\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{na^{n-1}}{e^a}\right)=\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{n(n-1)a^{n-2}}{e^a}\right)=$$

$$=\cdots=\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{e^a}\right)=0$$

Αντικαθιστώντας όλα τα προηγούμενα, έχουμε τελικά $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το ζητούμενο, $\Gamma(n+1)=n!,(n=0,1,2,3,...)$, επαγωγικά.

Αποδεικνύουμε ότι ισχύει για $n=0$, δηλαδή δείχνουμε ότι $\Gamma(1)=1$.

Πράγματι:

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}dx=\lim_{a\to\infty}(1-e^{-a})=1$$

Δέχομαι ότι ισχύει για $n=k-1$ δηλαδή ισχύει $\Gamma(k)=(k-1)!$ και θα δείξω ότι ισχύει για $n=k$. Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$, έχουμε:

$$\Gamma(k+1)=k\cdot\Gamma(k)=k\cdot(k-1)!=k!$$

β) Για να υπολογίσουμε τώρα το ολοκλήρωμα θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό: $x=\frac{y}{2}\Leftrightarrow dx=\frac{dy}{2}$ και θα πάρουμε:

$$\int_0^{+\infty} x^6 e^{-2x}dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{2}\right)^6 e^{-y}\frac{dy}{2}=$$

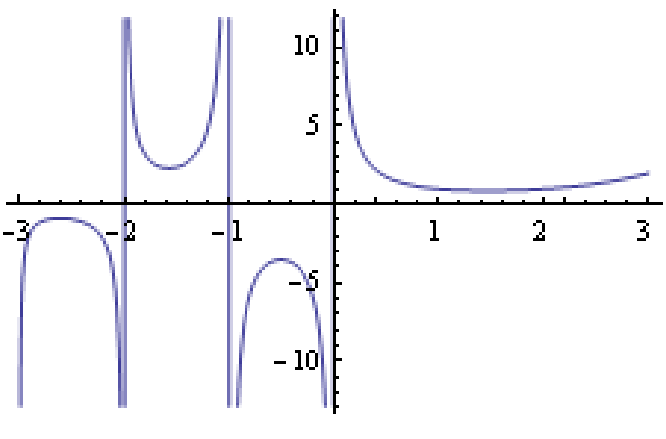
$$=\frac{1}{2^7}\int_0^{+\infty} y^6 e^{-y}dy=\frac{\Gamma(7)}{2^7}=\frac{6!}{2^7}=\frac{45}{8}$$

Παρατήρηση:

Γενικά η συνάρτηση γάμμα ορίζεται για μιγαδικούς $z\in\mathbb{C}$ ως

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}dx$$

Όταν ορίζεται για πραγματικούς αριθμούς $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}dy$ το γράφημά της είναι το ακόλουθο:



Ασκήσεις

1. Αν οι συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και η $h(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε, χρησιμοποιώντας το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού, να παραγωγισθεί η συνάρτηση

$$F(x)=\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt$$

Λύση

Η $F(x)$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και έχουμε

$$F(x)=\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt=\int_{f(x)}^{c} h(t)dt+\int_{c}^{g(x)} h(t)dt=\int_{c}^{g(x)} h(t)dt-\int_{c}^{f(x)} h(t)dt \text{ οπότε}$$

$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt=\frac{d}{dx}\int_{c}^{g(x)} h(t)dt-\frac{d}{dx}\int_{c}^{f(x)} h(t)dt=$$

$$=\left[\frac{d}{du}\int_{c}^{u} h(t)dt\right]_{u=g(x)} g'(x)-\left[\frac{d}{du}\int_{c}^{u} h(t)dt\right]_{u=f(x)} f'(x)=$$

$$=\left[h(u)\right]_{u=g(x)} g'(x)-\left[h(u)\right]_{u=f(x)} f'(x)=h(g(x))g'(x)-h(f(x))f'(x)$$

2. Χρησιμοποιώντας το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού, να παραγωγισθεί ως προς x η συνάρτηση: $F(x)=\int_{x^2}^{x^3} \ln(t)dt$

Λύση

$$F(x)=\int_{x^2}^{x^3} \ln(t)dt=\int_{x^2}^{c} \ln(t)dt+\int_{c}^{x^3} \ln(t)dt=\int_{c}^{x^3} \ln(t)dt-\int_{c}^{x^2} \ln(t)dt$$

$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \ln(t)dt=\frac{d}{dx}\int_{c}^{x^3} \ln(t)dt-\frac{d}{dx}\int_{c}^{x^2} \ln(t)dt=$$

$$=\left[\frac{d}{du}\int_{c}^{u} \ln(t)dt\right]_{u=x^3}(x^3)'-\left[\frac{d}{du}\int_{c}^{u} \ln(t)dt\right]_{u=x^2}(x^2)'$$

$$=\left[\ln(t)\right]_{u=x^3}(x^3)'-\left[\ln(t)\right]_{u=x^2}(x^2)'=3x^2\ln\left(x^3\right)-2x\ln\left(x^2\right)=(9x^2-4x)\ln(x)$$

3. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor της $f(x)=e^x$ κέντρου 0 Αναπτύξτε σε σειρά Taylor κέντρου 0 τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^{-x}-(1-x)}{x^2}$.

Χρησιμοποιώντας 4 όρους του αναπτύγματος αυτού υπολογίστε μία προσέγγιση του ολοκληρώματος $\int_0^{0.2} f(x)dx$.

Λύση

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$
$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$$
$$e^{-x} - (1-x) = -1 + x + 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$$
$$\frac{e^{-x} - (1-x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots\right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{5!} + \dots$$

Οπότε

$$\int_0^{0.2} \frac{e^{-x} - (1-x)}{x^2} dx = \int_0^{0.2}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{5!} + \dots\right)dx = \left[\frac{x}{1\cdot 2!} - \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} - \frac{x^4}{4\cdot 5!} + \dots\right]_0^{0.2} =$$
$$= \frac{0.2}{2} - \frac{0.2^2}{12} + \frac{0.2^3}{72} - \frac{0.2^4}{480} + \dots$$

Κρατώντας έτσι τους όρους για $n = 0,1,2,3$ έχουμε:

$$\int_0^{0.2} \frac{e^{-x} - (1-x)}{x^2} dx \approx \frac{0.2}{2} - \frac{0.2^2}{12} + \frac{0.2^3}{72} - \frac{0.2^4}{480} \approx 0.0967744$$

4. Με τη μέθοδο της παραγοντικής ολοκλήρωσης υπολογίστε το ορισμένο ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \ln(x+1)dx$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα τους 5 πρώτους όρους του πολυωνύμου Taylor με κέντρο το 0, υπολογίστε μία προσέγγιση του παραπάνω ολοκληρώματος. Υπολογίστε το απόλυτο και το απόλυτο σχετικό σφάλμα της προσέγγισης όταν σας δίνεται ότι $\ln(2) \approx 0.693147$.

Λύση

Το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \ln(x+1)dx = \int x'\ln(x+1)dx = x\ln(x+1) - \int x\left(\ln(x+1)\right)'dx = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx =$$

$$= x\ln(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1}dx = x\ln(x+1) - \int \frac{x+1}{x+1}dx + \int \frac{1}{x+1}dx =$$

$$= x\ln(x+1) - \int dx + \int \frac{1}{x+1}dx = x\ln(x+1) - x + \ln|x+1| + c$$

Οπότε

$$\int_0^1 \ln(x+1)dx = 1\ln(2) - 1 + \ln|1+1| - 0 = -1 + 2\ln(2) \approx -1 + 2\cdot 0.693147 = .$$
$$= -1 + 1.386294 = 0.386294$$

Το ανάπτυγμα τους 5 πρώτους όρους του πολυωνύμου Taylor με κέντρο το 0 της συνάρτησης $f(x) = \ln(x+1)$ είναι το ακόλουθο:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

$$\int_0^1 \ln(x+1)dx = \int_0^1 x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^6}{30}\right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{30-10+5-3+2}{60} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Το απόλυτο σφάλμα είναι ίσο με $|0.386294 - 0.4| = 0.013706$.

Το απόλυτο σχετικό σφάλμα είναι ίσο με

$$\frac{|0.386294 - 0.4|}{|0.386294|} = \frac{0.013706}{0.386294} = 0.0354807.$$

5. Να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor κέντρου 0 η συνάρτηση $f(x) = 1 - e^{-2x^2}$ και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \left(1 - e^{-2x^2}\right)dx$ σε μορφή σειράς. Πόσους όρους πρέπει να κρατήσουμε ώστε το σφάλμα να είναι μικρότερο του 10^{-3};

Λύση

Το ανάπτυγμα βρίσκεται ως εξής:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} ...$$

$$e^{-2x^2} = 1 - 2x^2 + \frac{4x^4}{2!} - \frac{8x^6}{3!} + \frac{16x^8}{4!} - \frac{32x^{10}}{5!} + \frac{64x^{12}}{6!} - \frac{128x^{14}}{7!} + \frac{256x^{16}}{8!} - ...$$

$$1 - e^{-2x^2} = 1 - \left(1 - 2x^2 + \frac{4x^4}{2!} - \frac{8x^6}{3!} + \frac{16x^8}{4!} - \frac{32x^{10}}{5!} + \frac{64x^{12}}{6!} - \frac{128x^{14}}{7!} + \frac{256x^{16}}{8!} - ...\right) =$$

$$= 2x^2 - \frac{4x^4}{2!} + \frac{8x^6}{3!} - \frac{16x^8}{4!} + \frac{32x^{10}}{5!} - \frac{64x^{12}}{6!} + \frac{128x^{14}}{7!} - \frac{256x^{16}}{8!} + ... =$$

$$= 2x^2 - 2x^4 + \frac{4}{3}x^6 - \frac{2}{3}x^8 + \frac{4}{15}x^{10} - \frac{4}{45}x^{12} + \frac{8}{315}x^{14} - \frac{2}{315}x^{16} + ...$$

Το ολοκλήρωμα βρίσκεται ως εξής:

$$\int_0^1 \left(1 - e^{-2x^2}\right) dx = \int_0^1 \left(2x^2 - 2x^4 + \frac{4}{3}x^6 - \frac{2}{3}x^8 + \frac{4}{15}x^{10} - \frac{4}{45}x^{12} + \frac{8}{315}x^{14} - \frac{2}{315}x^{16} + ...\right) dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{4}{21}x^7 - \frac{2}{27}x^9 + \frac{4}{165}x^{11} - \frac{4}{585}x^{13} + \frac{8}{4725}x^{15} - \frac{2}{5355}x^{17} + ...\right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{4}{21} - \frac{2}{27} + \frac{4}{165} - \frac{4}{585} + \frac{8}{4725} - \frac{2}{5355} + ... =$$

$$= 0.666666 - 0.40000 + 0.190476 - 0.0740741 + 0.0242424 -$$

$$- 0.00683761 + 0.0016912 - 0.0003734 + ...$$

$$= 0.4021667 - 0.0003734 + ...$$

Κάθε όρος που προστίθεται ή αφαιρείται στην παραπάνω σειρά είναι μεγαλύτερος από αυτούς που τον ακολουθούν. Οπότε, ο όρος αυτός, ως μέγεθος, είναι κυρίαρχος στο σφάλμα της προσέγγισης όταν επιλέξουμε να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα με όλους τους προηγούμενουςαπό αυτόν όρους. Εφόσον θέλουμε το σφάλμα να είναι μικρότερο του 10^{-3} είναι φανερό ότι πρέπει να κρατήσουμε τουλάχιστον 7 όρους μιας και η κυρίαρχη ποσότητα στο σφάλμα, σε μία τέτοια περίπτωση θα είναι ο 8^{ος} όρος ο οποίος είναι $0.0003734 < 10^{-3}$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι εάν σε μία εναλλάσσουσα σειρά Taylor, δηλαδή σειρά με μορφή $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n,\ a_n \geq 0$ στην οποία **οι συντελεστές εναλλάσσουν το πρόσημό τους,** χρησιμοποιήσουμε το μερικό άθροισμα $\sum_{n=0}^{k} (-1)^n a_n$, για να προσεγγίσουμε μία συνάρτηση, τότε το σφάλμα που προκύπτει δεν υπερβαίνει (κατ' απόλυτη τιμή) τον πρώτο όρο που αγνοούμε, δηλαδή τον όρο a_{k+1}.

Χρησιμοποιώντας και πάλι το ανάπτυγμα Taylor της εκθετικής συνάρτησης έχουμε:

$$f(x) = 1 - e^{-2x^2} = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-2x^2\right)^n}{n!} = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} x^{2n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!} x^{2n} = 2x^2 - 2x^4 + \frac{4}{3}x^6 - .....$$

Οπότε το ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\int_0^1 \left(1 - e^{-2x^2}\right) dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!} x^{2n} \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!} \int_0^1 x^{2n} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!} \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_{x=0}^{x=1}$$

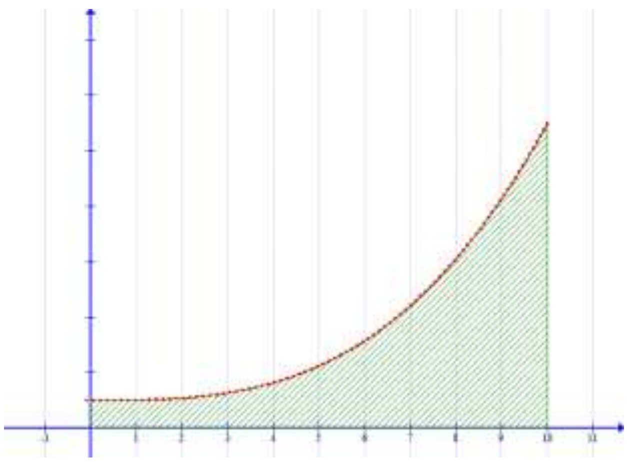
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!(2n+1)}$$

Σύμφωνα με την υπόδειξη, αν κρατήσουμε n-όρους σε αυτό το ανάπτυγμα της σειράς αυτής που είναι εναλλάσσουσα, θα έχουμε σφάλμα κατ' απόλυτη τιμή μικρότερο του $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!(2n+3)}$. Αν λοιπόν θέλουμε ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων θα πρέπει $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!(2n+3)} < 10^{-3}$ το οποίο επιτυγχάνεται για n≥7.

Κρατώντας έτσι 7 όρους έχουμε:

$$\frac{2^1}{1!\cdot 3} - \frac{2^2}{2!\cdot 5} + \frac{2^3}{3!\cdot 7} - \frac{2^4}{4!\cdot 9} + \frac{2^5}{5!\cdot 11} - \frac{2^6}{6!\cdot 13} + \frac{2^7}{7!\cdot 15} \cong 0.40217 .$$

6. Έστω ότι θέλουμε να καλύψουμε με ταπετσαρία μία επιφάνεια της μορφής του γραμμοσκιασμένου σχήματος που ακολουθεί.



Για να υπολογίσουμε προσεγγιστικά το εμβαδό της επιφάνειας μετρήσαμε ανά 1 μέτρο το ύψος της επιφάνειας και καταγράψαμε τις ακόλουθες τιμές

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.01	1.08	1.27	1.64	2.25	3.16	4.43	6.12	8.29	11.00

Χρησιμοποιήστε αυτές τις τιμές και τον Κανόνα του Τραπεζίου για να προσεγγίσετε το εμβαδό της επιφάνειας.

Λύση

Είναι σαν να χρειάζεται να υπολογίσουμε προσεγγιστικά το $I = \int_0^{10} f(x)dx$ όπου μπορεί να είναι άγνωστη η συνάρτηση αλλά γνωρίζουμε τις τιμές της σε μία διαμέριση του διαστήματος ολοκλήρωσης $[0,10]$ πλάτος $h=1$ δηλαδή $n=10$. Οπότε

$$I = \int_0^{10} f(x)dx \approx \frac{1}{2}(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_9)+f(x_{10}))$$

Όπου οι τιμές λαμβάνονται από τον ακόλουθο πίνακα:

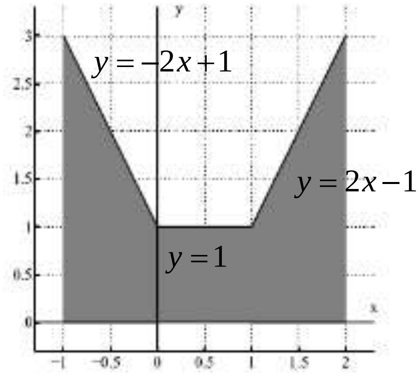
i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x_i)$	1	1.01	1.08	1.27	1.64	2.25	3.16	4.43	6.12	8.29	11.00

Οπότε

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{1}{2}(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_9)+f(x_{10})) = \\ &= 0.5\cdot(1+2\cdot1.01+2\cdot1.08+2\cdot1.27+2\cdot1.64+2\cdot2.25+ \\ &\quad +2\cdot3.16+2\cdot4.43+2\cdot6.12+2\cdot8.29+11) = 35.25 \end{aligned}$$

7. Να σχεδιάσετε το χωρίο που περικλείεται μεταξύ των γραφημάτων των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ με $a \le x \le b$, και να υπολογίσετε το εμβαδόν του: $f(x)=|x|+|x-1|, g(x)=0,\ a=-1,\ b=2$. Να επαληθεύστε το αποτέλεσμά σας, υπολογίζοντας το ζητούμενο εμβαδόν με στοιχειώδη γεωμετρία, απ'ευθείας από την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Λύση:



Προφανώς $f\left(x\right)\geq 0$,και ο τύπος της είναι ο ακόλουθος:

$$f(x)=\begin{cases}-x-x+1 & 0\leq x\\ x-x+1 & 0<x\leq 1\\ x+x-1 & 1<x\end{cases}=\begin{cases}-2x+1 & 0\leq x\\ 1 & 0<x\leq 1\\ 2x-1 & 1<x\end{cases}$$

Οπότε

$$E=\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)+\int_{1}^{2}f(x)dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(-x-x+1\right)dx+\int_{0}^{1}\left(x-x+1\right)dx+\int_{1}^{2}\left(x+x-1\right)dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(-2x+1\right)dx+\int_{0}^{1}dx+\int_{1}^{2}\left(2x-1\right)dx=$$

$$=\left[\left[x\right]_{-1}^{0}-2\int_{-1}^{0}xdx\right]+\left[x\right]_{0}^{1}+\left[2\int_{1}^{2}xdx-\left[x\right]_{1}^{2}\right]=$$

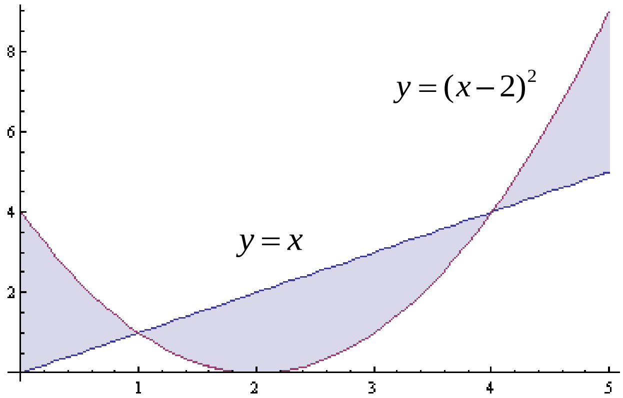
$$=\left[1-2\int_{-1}^{0}xdx\right]+1+\left[2\int_{1}^{2}xdx-1\right]=$$

$$=1-2\left[\frac{x^{2}}{2}\right]_{-1}^{0}+2\left[\frac{x^{2}}{2}\right]_{1}^{2}=5$$

Το αποτέλεσμα αυτό συμπίπτει με αυτό που βρίσκουμε αν υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν από το παραπάνω σχήμα αθροίζοντας το εμβαδόν του κάτω παραλληλογράμμου (με βάση 3 και ύψος 1) με αυτό των άνω δύο τριγώνων που συνθέτουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο βάσης 1 και ύψους 2.

8. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που βρίσκεται κάτω από τη καμπύλη $y=x$ και πάνω από τη καμπύλη $y=(x-2)^{2}$;

ΛΥΣΗ



Θα βρούμε πρώτα τα κοινά σημεία των καμπυλών $y=x$ και $y=(x-2)^2$ λύνοντας την εξίσωση:

$$x=x^2-4x+4\Rightarrow x^2-5x+4=0\Rightarrow(x-1)(x-4)=0\,.$$

Άρα

$$\int_1^4\left(x-(x-2)^2\right)dx=\int_1^4(-x^2+5x-4)dx\left[-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}-4x\right]_1^4=$$
$$=\left[-\frac{64}{3}+40-16\right]-\left[-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-4\right]=4.5$$

9. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^4+27},x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{4},x\geq 0$. α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της *f* καθώς και την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τα γραφήματα των συναρτήσεων *f* και *g* και τις κατακόρυφες ευθείες *x*=1 και *x*=3. Υπόδειξη: Προκειμένου να συγκρίνετε τις συναρτήσεις *f* και *g* στο διάστημα [1,3], χρησιμοποιήστε το ερώτημα (α).

Λύση

Υπολογίζουμε την παράγωγο της *f* :

$$f\,'(x)=\frac{(x^3)'.(x^4+27)-x^3(x^4+27)'}{(x^4+27)^2}=\frac{3x^2(x^4+27)-x^3.4x^3}{(x^4+27)^2}=\frac{x^2(81-x^4)}{(x^4+27)^2}=$$
$$=\frac{x^2(9+x^2)(3-x)(3+x)}{(x^4+27)^2}.$$

Παρατηρούμε ότι $f\,'(x)>0$ στα διαστήματα (–3,0) και (0,3) και $f\,'(x)<0$ στα διαστήματα

$(-\infty,-3)$ και $(3,+\infty)$ (το 0 άρα που είναι ρίζα της παραγώγου δεν επηρεάζει την μονοτονία).

Συνεπώς η *f* είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-3,3)$ και γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-3)$ και $(3,+\infty)$.

Επίσης έχουμε:

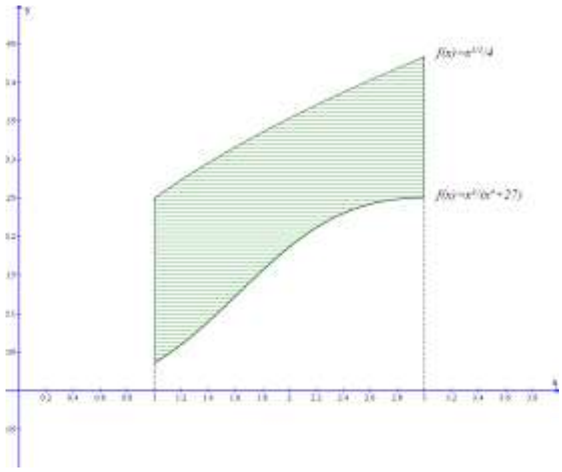
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^4(1+\frac{27}{x^4})}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x(1+\frac{27}{x^4})}=0,\quad f(x)>0 \text{ για } x>0,$$

$f(x)<0$ για $x<0$ και $f(0)=0$.

Άρα η μέγιστη τιμή της *f* είναι για *x*=3 ίση με $f(3)=\frac{3^3}{3^4+27}=\frac{1}{4}$ και η ελάχιστη τιμή για *x*=–3 ίση με $f(-3)=\frac{-3^3}{3^4+27}=-\frac{1}{4}$.

Συμπεραίνουμε άρα ότι $-\frac{1}{4}\le f(x)\le\frac{1}{4}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Από το ερώτημα (α) συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x\ge 1$ έχουμε $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{4}\ge\frac{1}{4}\ge f(x)$, άρα το γράφημα της *g* στο διάστημα [1,3] βρίσκεται πάνω από αυτό της *f*.



Οπότε, το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_1^3 (g(x)-f(x))dx=\int_1^3\left(\frac{\sqrt{x}}{4}-\frac{x^3}{x^4+27}\right)dx=\int_1^3\frac{\sqrt{x}}{4}dx-\int_1^3\frac{x^3}{x^4+27}dx.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα και είναι

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{4}dx = \left[\frac{1}{4}.\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^3 = \frac{1}{6}(3\sqrt{3}-1)\ .$$

Στο δεύτερο εκτελούμε την αντικατάσταση $u = x^4 + 27,\ du = 4x^3dx$ και έχουμε

$$\int \frac{x^3}{x^4+27}dx = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{4}\ln|u| + c = \frac{1}{4}\ln\left|x^4+27\right| + c \text{ άρα}$$

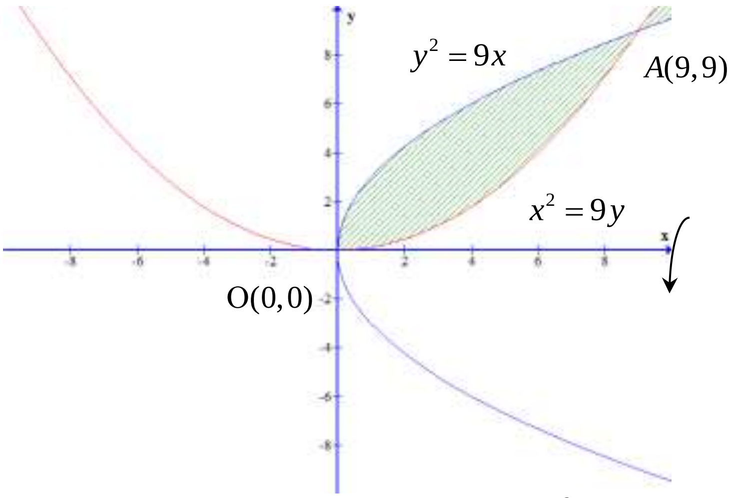
$$\int_1^3 \frac{x^3}{x^4+27}dx = \left[\frac{1}{4}\ln(x^4+27)\right]_1^3 = \frac{1}{4}\ln 108 - \frac{1}{4}\ln 28 = \frac{1}{4}\ln\frac{108}{28} = \frac{1}{4}\ln\frac{27}{7}\ .$$

Συνεπώς

$$E = \frac{1}{6}(3\sqrt{3}-1) - \frac{1}{4}\ln\frac{27}{7} \approx 0,361877...$$

9. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή, γύρω από τον άξονα xx', του κλειστού χωρίου που περικλείεται από τις παραβολές $y^2 = 9x$ και $x^2 = 9y$.

Λύση



Τα σημεία τομής των δύο παραβολών βρίσκονται στο 1ο τεταρτημόριο $(x, y \geq 0)$ και προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 9x \\ x^2 = 9y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y^2 = 9x \\ x^4 = 81y^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y^2 = 9x \\ x^4 = 81\cdot 9x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y^2 = 9x \\ x^4 - 9^3x = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 9x \\ \left(x^3 - 9^3\right)x = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y^2 = 9x \\ x = 9 \ \ ή \ \ x = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0,\ y = 0 \\ ή \\ x = 9,\ y = 9 \end{array}\right\}$$

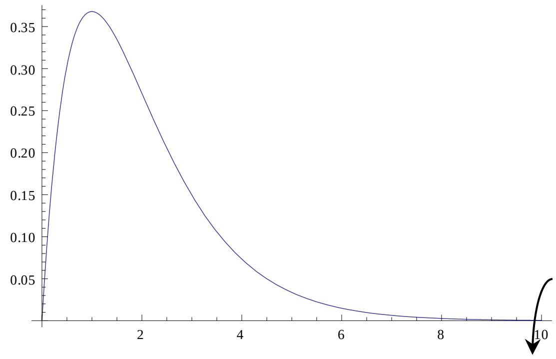
Ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή, γύρω από τον άξονα xx', του κλειστού χωρίου που περικλείεται από τις παραβολές

($f_1(x)=3\sqrt{x}$ και $f_2(x)=\dfrac{x^2}{9}$) δίνεται από τον τύπο :

$$V=\pi\int_0^9\left(f_1^{\,2}(x)-f_2^{\,2}(x)\right)dx=\pi\int_0^9\left(9x-\frac{x^4}{81}\right)dx=\pi\left[9\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5\cdot 81}\right]_0^9=$$

$$=\pi\left(9\frac{9^2}{2}-\frac{9^5}{5\cdot 81}\right)=\pi\left(\frac{9^3}{2}-\frac{9^3}{5}\right)=9^3\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=9^3\pi\frac{3}{10}=218.7\pi$$

10. Να υπολογισθεί ο όγκος του σχήματος που προκύπτει αν περιστρέψουμε τη συνάρτηση $y=xe^{-x}$ γύρω από τον άξονα των x από $x=0$ ως $x=\infty$.



Λύση

Σύμφωνα με τον τύπο που είδαμε παραπάνω ο ζητούμενος όγκος υπολογίζεται ως εξής:

$$V=\int_0^{+\infty}\pi(xe^{-x})^2\,dx=\pi\int_0^{+\infty}x^2e^{-2x}dx\,.$$

Το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x^2e^{-2x}dx$ υπολογίζεται εύκολα με διαδοχικές παραγοντικές ολοκληρώσεις

$$\int e^{-2x}dx=\int\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)'dx=-\frac{e^{-2x}}{2}+c$$

$$\int xe^{-2x}dx=\int x\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)'dx=x\frac{e^{-2x}}{-2}-\int x'\frac{e^{-2x}}{-2}dx=-x\frac{e^{-2x}}{2}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)'dx=-x\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+c$$

$$\int x^2e^{-2x}dx=\int x^2\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)'dx=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}-\int\left(x^2\right)'\frac{e^{-2x}}{-2}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}+\int xe^{-2x}dx=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}-x\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C=-e^{-2x}\left(\frac{1}{4}+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}\right)+\mathrm{C}$$

Οπότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα είναι το ακόλουθο:

$$V=\pi\int_0^{+\infty}x^2e^{-2x}dx=\pi\lim_{b\to\infty}\left[-e^{-2x}\left(\frac{1}{4}+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^b=\pi\lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-2b}\left(\frac{1}{4}+\frac{b}{2}+\frac{b^2}{2}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)\right)=\frac{\pi}{4}$$

και ο ζητούμενος όγκος ισούται προς $\frac{\pi}{4}$.

Εδώ χρησιμοποιήσαμε τα όρια

$$\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-2b}\right)=0$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left(be^{-2b}\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b}{e^{2b}}\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b'}{\left(e^{2b}\right)'}\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2e^{2b}}\right)=0$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left(b^2e^{-2b}\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^2}{e^{2b}}\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{\left(b^2\right)'}{\left(e^{2b}\right)'}\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{2b}{2e^{2b}}\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b}{e^{2b}}\right)=0$$

11. Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I=\int_{-\infty}^{0}xe^{\frac{x}{2}}dx$

Λύση

Για το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int xe^{\frac{x}{2}}dx=\int x\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)'dx=2\int x\left(e^{\frac{x}{2}}\right)'dx=2\left[xe^{\frac{x}{2}}-\int\left(x\right)'e^{\frac{x}{2}}dx\right]=2xe^{\frac{x}{2}}-2\int e^{\frac{x}{2}}dx=$$

$$=2xe^{\frac{x}{2}}-2\int 2\left(e^{\frac{x}{2}}\right)'dx=2xe^{\frac{x}{2}}-4e^{\frac{x}{2}}+c$$

Επομένως, $I_2 = \lim_{b\to-\infty}\left[2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}}\right]_b^0 = \lim_{b\to-\infty}\left[-4 - 2be^{\frac{b}{2}} + 4e^{\frac{b}{2}}\right] = -4$

αφού με εφαρμογή του κανόνα De L' Hospital έχουμε

$$\lim_{b\to-\infty}\left(be^{\frac{b}{2}}\right) = \lim_{b\to-\infty}\frac{b}{e^{-\frac{b}{2}}} = \lim_{b\to-\infty}\frac{(b)'}{\left(e^{-\frac{b}{2}}\right)'} = \lim_{b\to-\infty}\frac{1}{-\frac{1}{2}e^{-\frac{b}{2}}} = 0$$

12. Έστω το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx$. Δείξτε ότι με απευθείας χρήση των κανόνων ολοκλήρωσης ισούται με - 2. Αυτό όμως είναι λάθος (γιατί;). Στη συνεχεία βρείτε το σωστό αποτέλεσμα.

Λύση

Εάν προχωρήσουμε αφελώς στην αντικατάσταση $x-1=u$, $dx=du$ και την αντίστοιχη αλλαγή στα όρια ολοκλήρωσης για $x=0, u=-1$ και για $x=2, u=1$, έχουμε

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{u^2}du = \int_{-1}^1 u^{-2}\cdot du = \left[\frac{u^{-2+1}}{-2+1}\right]_{-1}^1 = \left[-\frac{1}{u}\right]_{-1}^1 = \frac{-1}{1} - \left(\frac{-1}{-1}\right) = -1-1 = -2,$$

πράγμα εντελώς παράδοξο για το ολοκλήρωμα μιας θετικής συνάρτησης στο διάστημα από 0 μεχρι 2 (!).

Όμως το $1\in(0,2)$ είναι ανώμαλο σημείο της συνάρτησης $\frac{1}{(x-1)^2}$ επειδή

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2} = +\infty .$$

Οπότε ακολουθούμε τον ορισμό γενικευμένου ολοκληρώματος:

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{c\to 1-}\int_0^c \frac{1}{(x-1)^2}dx + \lim_{c\to 1+}\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx =$$

$$= \lim_{c\to 1-}\left[\frac{-1}{(x-1)}\right]_0^c + \lim_{c\to 1-}\left[\frac{-1}{(x-1)}\right]_c^2 = \lim_{c\to 1-}\left[\frac{-1}{(c-1)}-1\right] + \lim_{c\to 1-}\left[-1-\frac{-1}{(c-1)}\right] = -2+\infty+\infty = +\infty$$

13. Δείξτε ότι $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x+1} = \ln(2)$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $y = e^x$ και την ανάλυση σε απλά κλάσματα.

Λύση

Θα υπολογίσουμε κατ' αρχάς το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{e^x+1}$. Θέτουμε

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{du}{u(u+1)}$$

αυτό είναι ένα ρητό ολοκλήρωμα. Για να το υπολογίσουμε θα αναλύσουμε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} = \frac{A(u+1)+Bu}{u(u+1)} = \frac{(A+B)u+A}{u(u+1)} \quad \Rightarrow \quad A=1, B=-1$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{du}{u(u+1)} = \int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u+1} = \ln|u| - \ln|u+1| + C$$

και τελικά: $\int \frac{dx}{e^x+1} = \ln|e^x| - \ln|e^x+1| + C = \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + C$

Το ορισμένο ολοκλήρωμα τώρα είναι: $\int_0^a \frac{dx}{e^x+1} = \ln\left(\frac{e^a}{e^a+1}\right) - \ln\left(\frac{e^0}{e^0+1}\right) = \ln\left(\frac{e^a}{e^a+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Και τελικά έχουμε: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+1} = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{dx}{e^x+1} = \lim_{a\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{e^a}{e^a+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

Με τον κανόνα L´ Hopital υπολογίζουμε το όριο $\lim_{a\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{e^a}{e^a+1}\right)\right) = \ln\left(\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{e^a}{e^a+1}\right)\right)$.

Αλλά $$\lim_{a\to\infty}\frac{e^a}{e^a+1} = \lim_{a\to\infty}\frac{(e^a)'}{(e^a+1)'} = \lim_{a\to\infty}\frac{e^a}{e^a} = 1$$

και επομένως $$\lim_{a\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{e^a}{e^a+1}\right)\right) = \ln\left(\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{e^a}{e^a+1}\right)\right) = \ln(1) = 0$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα τελικά γίνεται:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+1} = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{dx}{e^x+1} = \lim_{a\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{e^a}{e^a+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \ln(1) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0 - [\ln(1) - \ln(2)] = \ln(2).$$