4. Παράγωγοι συναρτήσεων και εφαρμογές

4.1 Παράγωγος συνάρτησης

Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in A$ αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Τότε η συνάρτηση αυτή θα ονομάζεται **παραγωγίσιμη ή διαφορίσιμη** στο σημείο αυτό. Η διαφορισιμότητα είναι σημειακό χαρακτηριστικό αλλά μπορούμε να δούμε και την παράγωγο ως συνάρτηση.

Η παράγωγος της συνάρτησης $y=f(x)$ ως προς την μεταβλητή x είναι η συνάρτηση f' με τιμή στο x,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Το πεδίο ορισμού της f' είναι το σύνολο των σημείων του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το παραπάνω όριο υπάρχει. Οπότε είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Αν η παράγωγος υπάρχει σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης τότε λέμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι **παραγωγίσιμη ή διαφορίσιμη.**

Συμβολισμοί: Σε μία συνάρτηση $y=f(x)$ το x είναι **ανεξάρτητη μεταβλητή** και το y είναι **εξαρτημένη** (από το x) μεταβλητή.

Για την παράγωγο ως συνάρτηση συμβολίζουμε:

$$y' \quad f' \quad f'(x) \quad \frac{dy}{dx} \quad \frac{df}{dx} \quad \frac{d}{dx}f(x) \quad (....)'$$

Για την τιμή της παραγώγου σε ένα σημείο:

$$y'(a) \quad f'(a) \quad y'\big|_{x=a} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$$

Για τη δεύτερη ή μεγαλύτερης τάξης παράγωγο συμβολίζουμε:

$$f''(x) \quad f^{(k)}(x) \;\; f''(a) \quad f^{(k)}(a) \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad \frac{d^ky}{dx^k} \;\; \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=a} \quad \left.\frac{d^ky}{dx^k}\right|_{x=a}$$

Αν f είναι παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ f συνεχής

Πότε μία συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη:

- Αν η $f(x)$ δεν είναι συνεχής.
- Όταν δεν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

- Για σημεία στα οποία η συνάρτηση μας αλλάζει συμπεριφορά, όταν υπάρχουν αλλά δεν είναι ίσες οι πλευρικές παράγωγοι, δηλαδή

$$\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\neq \lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Στα άκρα κλειστού διαστήματος μία συνάρτηση μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη όταν υπάρχουν τα αντίστοιχα πλευρικά όρια.

4.2 Υπολογισμός παραγώγων

4.2.1 Ιδιότητες παραγώγων

$$\left(cf(x)\right)'=cf'(x),\quad c\in\mathbb{R}$$

$$\left(f(x)\pm g(x)\right)'=f'(x)\pm g'(x)$$

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)},\ g(x)\neq 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(cf(x)\right)=c\frac{d}{dx}\left(f(x)\right), c\in R$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)\pm\frac{d}{dx}\left(g(x)\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\frac{d}{dx}(f(x))\cdot g(x)+f(x)\cdot\frac{d}{dx}\left(g(x)\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)\cdot g(x)-f(x)\cdot\frac{d}{dx}\left(g(x)\right)}{g(x)^2}$$

Η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης (**κανόνας αλυσίδας**) $f(g(x))$ είναι

$$\left(f(g(x))\right)'=\frac{df(g(x))}{dx}=f'(g(x))g'(x)=\frac{df(g)}{dg}\cdot\frac{dg(x)}{dx}$$

4.2.2 Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων

$c'=0,\ c\in\mathbb{R}$	$(x)'=1$
$(x^k)'=k\,x^{k-1}, k\in\mathbb{R}$	$(e^x)'=e^x$
$(\ln(x))'=\frac{1}{x}$	$(a^x)'=\ln(a)\cdot a^x$
$(\sin(x))'=\cos(x)$	$(\arcsin(x))'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\cos(x))'=-\sin(x)$	$(\arccos(x))'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\tan(x))'=\frac{1}{\cos^2(x)}$	$(\arctan(x))'=\frac{1}{x^2+1}$
$(\cot(x))'=-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$(\log_a(x))'=\frac{1}{x\ln(a)}$

Παραδείγματα:

$$(\sec(x))' = \left(\frac{1}{\cos(x)}\right)' = \frac{1'\cdot\cos(x) - 1\cdot(\cos(x))'}{\cos^2(x)} = \frac{0\cdot\cos(x) - \cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sec(x)\tan(x)$$

$$(\sinh(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}(-x)'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

$$(\cosh(x))' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}(-x)'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

$$(\tanh(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{(e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{2e^x \cdot 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

Αν $f(x) = x^2 e^{\sin(x)}$ τότε

$$f'(x) = (x^2)' e^{\sin(x)} + x^2 (e^{\sin(x)}) = 2x e^{\sin(x)} + x^2 e^{\sin(x)} (\sin(x))' = 2x e^{\sin(x)} + x^2 e^{\sin(x)} \cos(x)$$

και $f''(x) = 2e^{\sin(x)} + 2xe^{\sin(x)}\cos(x) + 2xe^{\sin(x)}\cos(x) + x^2 e^{\sin(x)}\cos^2(x) - x^2 e^{\sin(x)}\sin(x)$

Αν $f(x) = \sqrt{(1+x^2)}$ τότε $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}-1}(1+x^2)' = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

και $f''(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - x\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2})^2} = \dfrac{\dfrac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας ισχύει $\left(a^{f(x)}\right)' = a^{f(x)}\ln(a) f'(x)$ οπότε έχουμε ότι $\left(5^{x^2+2}\right)' = 2x5^{x^2+2}\ln(5)$.

4.2.3 Λογαριθμική παραγώγιση:

Στα παρακάτω υποθέτουμε ότι παραγωγίζουμε σε κατάλληλο υποσύνολο του πεδίου ορισμού ώστε οι ποσότητες στους λογαρίθμους να είναι θετικές. Σε διαφορετική περίπτωση πρέπει να θεωρήσουμε τις απόλυτες τιμές τους.

Αποδείξτε ότι $\left(a^{f(x)}\right)' = a^{f(x)}\ln(a) f'(x)$.

$$y = a^{f(x)} \Leftrightarrow \ln(y) = \ln(a^{f(x)}) \Leftrightarrow \ln(y) = f(x)\ln(a) \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \ln(a) f'(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y' = y\ln(a) f'(x) \Leftrightarrow y' = a^{f(x)}\ln(a) f'(x)$$

Υπολογίστε την παράγωγο της $y = x^{\frac{1}{x}}$

$$y = x^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \ln(y) = \frac{1}{x}\ln(x) \Leftrightarrow (\ln(y))' = \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{(\ln(x))' x - \ln(x) x'}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\frac{1}{x} x - \ln(x)}{x^2} \Leftrightarrow y' = x^{\frac{1}{x}} \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Υπολογίστε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3(x)\cos^2(x)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2}\,\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3(x)\cos^2(x) \Leftrightarrow$$

$$\ln(y) = \ln\left(\sqrt[3]{x^2}\,\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3(x)\cos^2(x)\right) \Leftrightarrow$$

$$\ln(y) = \ln\left(\sqrt[3]{x^2}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right) + \ln(\sin^3(x)) + \ln(\cos^2(x)) \Leftrightarrow$$

$$\ln(y) = \frac{2}{3}\ln(x) + \ln(1-x) - \ln(1+x^2) + 3\ln(\sin(x)) + 2\ln(\cos(x)) \Leftrightarrow$$

$$(\ln(y))' = \left(\frac{2}{3}\ln(x) + \ln(1-x) - \ln(1+x^2) + 3\ln(\sin(x)) + 2\ln(\cos(x))\right)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{3}\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}(1-x)' - \frac{1}{1+x^2}(1+x^2)' + 3\frac{1}{\sin(x)}(\sin(x))' + 2\frac{1}{\cos(x)}(\cos(x))' \Leftrightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - 2\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\cot(x) - 2\tan(x) \Leftrightarrow$$

$$y' = y\left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\cot(x) - 2\tan(x)\right) \Leftrightarrow$$

$$y' = \sqrt[3]{x^2}\,\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3(x)\cos^2(x)\left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\cot(x) - 2\tan(x)\right)$$

4.2.4 Παράγωγος Αντιστρόφου συνάρτησης

Αν η f είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφη f^{-1} είναι παραγωγίσιμη τότε

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'}, \quad f' \neq 0$$

ή αν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $y(x)=f(x)$ και $x(y)=f^{-1}(y)$ τότε η σχέση γράφεται ως

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Παραδείγματα:

α) Αν $x=x(y)$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $y=y(x)$, τότε η εξίσωση $y''-x(y')^3+e^y(y')^3=0$ μετασχηματίζεται στην $x''+x=e^y$.

Λύση

Επειδή $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$ ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε $y'=\frac{1}{x'}$

Παραγωγίζοντας την $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$ ως προς x έχω:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dx}(1)\Leftrightarrow\ \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{dy}+\frac{dy}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dy}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dy}+\frac{dy}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dy}\right)=0\Leftrightarrow\ \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dy}+\frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dy}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^2x}{dy^2}=0$$

Ή γράφοντας την σχέση αυτή με διαφορετικό συμβολισμό:

$$(x')'\cdot y'+x'\cdot y''=0\ \Leftrightarrow\ x''\cdot(y')^2+x'\cdot y''=0\ \Leftrightarrow\ y''=-\frac{x''\cdot(y')^2}{x'}$$

Έτσι η $y''-x\cdot(y')^3+e^y\cdot(y')^3=0$ γίνεται:

$$-\frac{x''\cdot(y')^2}{x'}-x\cdot\frac{1}{(x')^3}+e^y\cdot\frac{1}{(x')^3}=0\ \Leftrightarrow\ -\frac{x''}{(x')^3}-x\cdot\frac{1}{(x')^3}+e^y\cdot\frac{1}{(x')^3}=0\ \Leftrightarrow\ x''+x=e^y$$

β) Δίνεται η συνάρτηση $y(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x-2$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $(1,-\frac{1}{6})$. Χωρίς να λύσετε τη σχέση αυτή ως προς *x* βρείτε την παράγωγο $\frac{dx}{dy}$ της αντίστροφης συνάρτησης στο σημείο $y=-\frac{1}{6}$.

Λύση

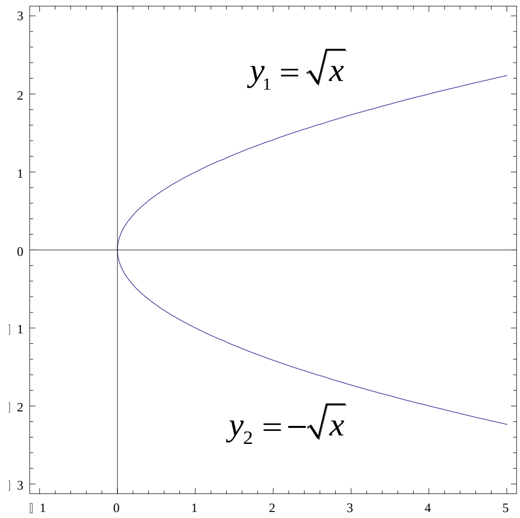
Η παράγωγος ισούται με

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = x^2 + x + 1 .$$

Επομένως $y'(1) = 3 \neq 0$. Επειδή $y(1) = -\frac{1}{6}$ έπεται ότι $x'(-\frac{1}{6}) = \frac{1}{y'(1)} = \frac{1}{3}$.

4.2.5 Παράγωγος πεπλεγμένης συνάρτησης

Εκφράσεις της μορφής $f(x,y)=0$ που αντιπροσωπεύουν καμπύλες του επιπέδου μπορούν να θεωρηθούν ως ένωση των γραφικών παραστάσεων περισσοτέρων της μίας συνάρτησης. Για παράδειγμα η $y^2-x=0$ ορίζει δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις του x στο διάστημα $x \geq 0$.



Η έκφραση αυτή ορίζει τις δύο αυτές συναρτήσεις με τρόπο **πεπλεγμένο** χωρίς να μας δίνει άμεσες αναλυτικές εκφράσεις για καθεμία από αυτές. Θεωρώντας ότι πληρούνται οι κατάλληλες συνθήκες για την ύπαρξη των παραγώγων των συναρτήσεων αυτών (με βάση τα όσα επιτάσσει θεώρημα της Μαθηματικής Ανάλυσης) μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο της πεπλεγμένης συνάρτησης $f(x,y)=0$.

$$y^2 - x = 0 \Leftrightarrow y^2 = x \Rightarrow \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x) \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

Αντικαθιστώντας την κατάλληλη έκφραση για κάθε κλάδο λαμβάνουμε την παράγωγο σε κάθε σημείο της καμπύλης. Δηλαδή για τον πάνω κλάδο η παράγωγος είναι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ και για τον κάτω } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

Παραδείγματα

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(1) \Leftrightarrow 2x\frac{d}{dx}(x) + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

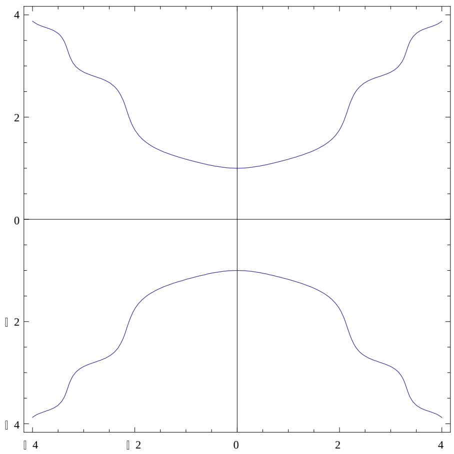
$$x^3 + y^3 = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right) + \frac{d}{dx}\left(y^3\right) = \frac{d}{dx}(1) \Rightarrow 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^2}{y^2}\right) = -\frac{\frac{d}{dx}(x^2)y^2 - x^2\frac{d}{dx}(y^2)}{y^4} = -\frac{2xy^2 - x^2 2y\frac{dy}{dx}}{y^4} =$$

$$= -\frac{2xy^2 - x^2 2y\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)}{y^4} = -\frac{2xy^4 + 2x^4y}{y^6} = -\frac{2xy^3 + 2x^4}{y^5}$$

$$y^2 = x^2 + \cos(xy)$$



$$y^2 = x^2 + \cos(xy) \Rightarrow \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x^2 + \cos(xy)) \Leftrightarrow 2y\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\cos(xy))$$

$$\Leftrightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 2x - \sin(xy)\frac{d}{dx}(xy) \Leftrightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 2x - \sin(xy)(\frac{d}{dx}(x)y + x\frac{dy}{dx})$$

$$\Leftrightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 2x - (y + x\frac{dy}{dx})\sin(xy) \Leftrightarrow 2y\frac{dy}{dx} + x\sin(xy)\frac{dy}{dx} = 2x - y\sin(xy)$$

$$\Leftrightarrow (2y + x\sin(xy))\frac{dy}{dx} = 2x - y\sin(xy) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x - y\sin(xy)}{2y + x\sin(xy)}$$

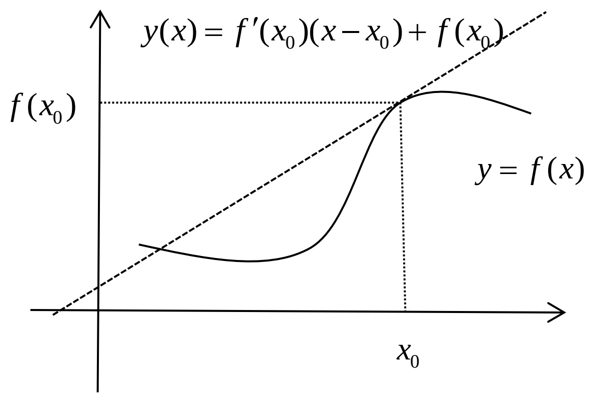
4.3 Εφαρμογές

4.3.1 Η παράγωγος ως κλίση της εφαπτομένης της *y=f(x)*

Η εφαπτομένη ευθεία της $y = f(x)$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

δηλαδή η εφαπτομένη ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης (κλίση) $f'(x_0)$. Αυτή η τιμή λέγεται και κλίση του σημείου της καμπύλης.

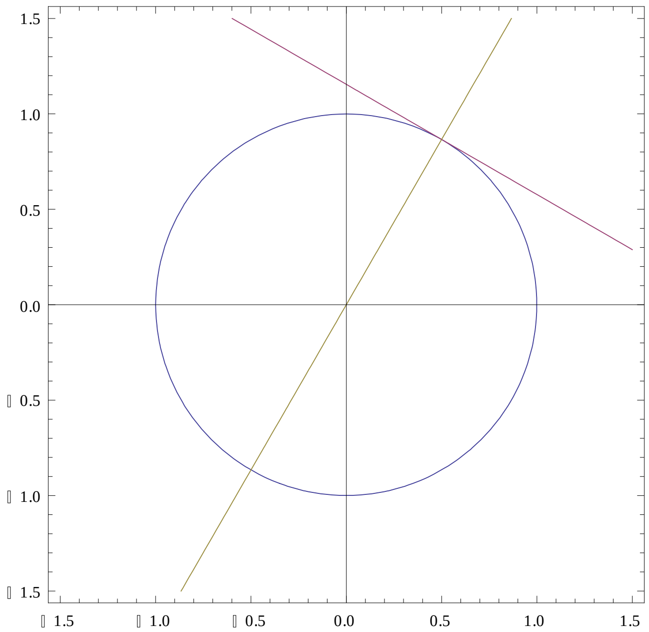


Παραδείγματα

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης κύκλου με κέντρο το (0,0) και ακτίνα 1 στο σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ αλλά και η εξίσωση της κάθετής της εφαπτομένης σε αυτό το σημείο.

Λύση

Είχαμε δει ότι $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$



Οπότε $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1/2,\sqrt{3}/2)} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης.

Άρα η εξίσωση της είναι η $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}(x - \frac{1}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Η εξίσωση της κάθετης της εφαπτόμενης που περνά από το σημείο αυτό έχει κλίση $\lambda = \frac{-1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$ οπότε η εξίσωσή της είναι

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}(x - \frac{1}{2}) = \sqrt{3}x$$

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=x^2-3x+4$ και $h(x)=3x-x^2$. Βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών τους παραστάσεων. Δείξτε ότι σε οποιοδήποτε σημείο τομής οι εφαπτόμενες ευθείες των δύο γραφικών παραστάσεων είναι μεταξύ τους κάθετες.

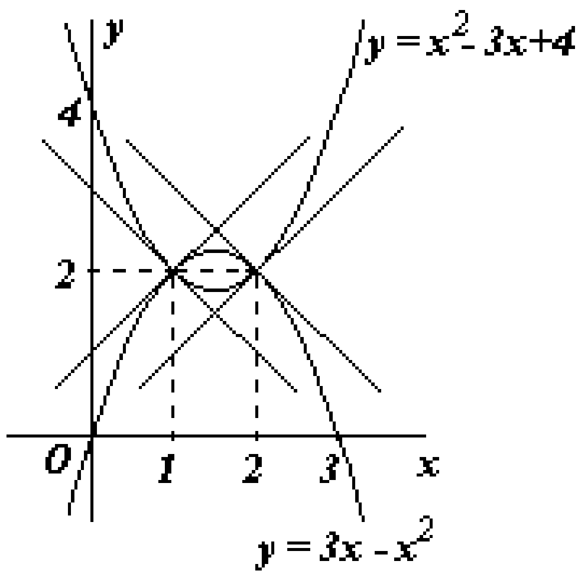
Λύση

$$y=x^2-3x+4 \Leftrightarrow y=x^2-2\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+4 \Leftrightarrow y=(x-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4} \Leftrightarrow y-\frac{7}{4}=(x-\frac{3}{2})^2$$

Η καμπύλη αυτή είναι η παραβολή προκύπτει όταν μεταφέρουμε την $y=x^2$ ώστε να έχει κορυφή $(\frac{3}{2},\frac{7}{4})$.

$$y=3x-x^2 \Leftrightarrow y=-x^2+2\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}+\frac{9}{4} \Leftrightarrow y-\frac{9}{4}=-(x-\frac{3}{2})^2$$

Η καμπύλη αυτή είναι η παραβολή προκύπτει όταν μεταφέρουμε την $y=-x^2$ ώστε να έχει κορυφή $(\frac{3}{2},\frac{9}{4})$.



Για να βρούμε τα σημεία τομής τους λύνουμε την εξίσωση

$x^2-3x+4=3x-x^2 \Leftrightarrow 2x^2-6x+4=0$ και

βρίσκουμε $x=\frac{6-\sqrt{36-32}}{4}=\frac{6-2}{4}=1$ ή

$x=\frac{6+\sqrt{36-32}}{4}=\frac{6+2}{4}=2$.

Ισχύει $g(1)=h(1)=g(2)=h(2)=2$ οπότε Άρα τα σημεία τομής είναι τα $(1,2)$ και $(2,2)$.

Επίσης $g'(x)=2x-3$ και $h'(x)=3-2x$. Επομένως $g'(1)=-1$, $h'(1)=1$, $g'(2)=1$ και $h'(2)=-1$. Συνεπώς $g'(1)h'(1)=-1$ και $g'(2)h'(2)=-1$ οι εφαπτόμενες είναι κάθετες και στα δύο σημεία τομής μιας και το γινόμενο των συντελεστών διευθύνσεων τους είναι -1.

4.3.2 Η παράγωγος ως στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της *y=f(x)*

Η παράγωγος μίας συνάρτησης σε ένα σημείο (εάν υπάρχει) είναι **ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής** της συνάρτησης σε αυτό το σημείο. Για παράδειγμα στην ευθύγραμμη κίνηση σώματος του οποίου η απόσταση που διανύει δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου κίνησης $s = x(t)$ η στιγμιαία ταχύτητα σε κάποια χρονική στιγμή του δίνεται από την παράγωγο $\frac{dx}{dt}$ την χρονική στιγμή και η στιγμιαία επιτάχυνση από τη 2η παράγωγο $\frac{d^2x}{dt^2}$.

Παραδείγματα

α) Σε ηλεκτρικό κύκλωμα με αντίσταση η τάση *V* (σε Volt), το ρεύμα *I* (σε Ampere), και η αντίσταση *R* (σε Ohm) συνδέονται από τη σχέση *V=IR*. Έστω ότι το *V* αυξάνεται με ρυθμό 2 *V/sec*. Ενώ το *I* μειώνεται κατά *½ A/sec*. Έστω επίσης *t* ο χρόνος. Ποια η τιμή του *dV/dt* και ποια του *dI/dt*. Ποια σχέση συνδέει του ρυθμούς *dV/dt ,dI/dt* και *dR/dt*; Βρείτε το ρυθμό μεταβολής του *R* όταν *V=10* και *Volt I=1A*. Αυξάνεται ή μειώνεται το *R;*

Λύση

$$\frac{dV}{dt} = 2 \text{ και } \frac{dI}{dt} = -\frac{1}{2}$$

$$V = IR \Leftrightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{dI}{dt}R + I\frac{dR}{dt} \Leftrightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{1}{I}\left(\frac{dV}{dt} - \frac{dI}{dt}R\right)$$

Για τις παραπάνω τιμές έχω

$$V = IR \Leftrightarrow 10 = 1 \cdot R \Leftrightarrow R = 10 \text{ Ohm}$$

$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{1}\left(2 + \frac{1}{2}R\right) = \frac{R}{2} + 2 = 7$ και επειδή η τιμή είναι θετική συμπεραίνουμε ότι η αντίσταση αυξάνεται.

β) Σε ένα σφαιρικό μπαλόνι διοχετεύεται αέριο με ρυθμό εισροής 20 κυβικά εκατοστά ανά λεπτό $\left(20\text{cm}^3/\text{min}\right)$. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας του, την χρονική στιγμή που η ακτίνα είναι ίση με $3cm$;

Λύση

Ο όγκος της σφαίρας δίνεται από τον τύπο $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ οπού *r* είναι η ακτίνα της.

Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο,*t*, έχουμε

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi\left(3r^2\frac{dr}{dt}\right) = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}.$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $\frac{dV}{dt} = 20$. Επομένως $20 = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$. Άρα $\frac{dr}{dt} = \frac{5}{\pi r^2}$. Όταν η ακτίνα είναι ίση με 3 *cm* τότε

$$\frac{dr}{dt} = \frac{5}{\pi 3^2} = \frac{5}{9\pi}\ cm/\min.$$

4.3.3 Προβλήματα και μοντέλα ελαχίστου μεγίστου

Είναι γνωστό ότι το πρόσημο της πρώτης παράγωγου μίας συνάρτησης σε ένα διάστημα I του πεδίου ορισμού της καθορίζει τη συμπεριφορά της συνάρτησης στο διάστημα αυτό.

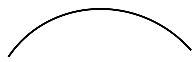
Η **μονοτονία** μίας συνάρτησης μπορεί να ελεγχτεί με την πρώτη παράγωγό της:

- Αν $\frac{dy}{dx} > 0, \forall x \in I \Rightarrow f(x)$ **αύξουσα στο** $\boldsymbol{I}$ $(\uparrow)$.
- Αν $\frac{dy}{dx} < 0, \forall x \in I \Rightarrow f(x)$ **φθίνουσα στο** $\boldsymbol{I}$ $(\downarrow)$.
- Αν $\frac{dy}{dx} = 0, \forall x \in I \Rightarrow f(x) = c$ **σταθερή στο** $\boldsymbol{I}$.

Άμεσο αποτέλεσμα της τελευταίας πρότασης είναι ότι

- Αν $f'(x) = g'(x), \forall x \in I \Rightarrow f(x) = g(x) + c$ **στο** $\boldsymbol{I}$.

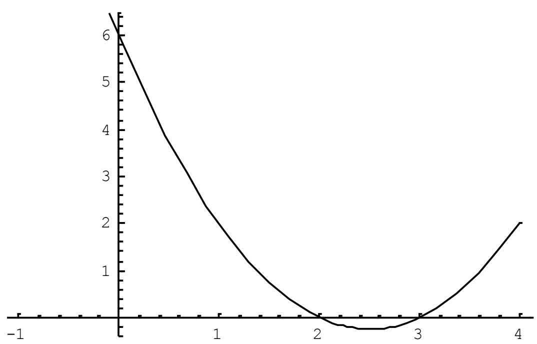
Η **καμπυλότητα** μίας συνάρτησης μπορεί να ελεγχτεί με την δεύτερη παράγωγό της:

- Αν $\frac{d^2y}{dx^2} > 0, \forall x \in I \Rightarrow f(x)$ κοίλα προς τα πάνω **(κυρτή)**. 
- Αν $\frac{d^2y}{dx^2} < 0, \forall x \in I \Rightarrow f(x)$ κοίλα προς τα κάτω **(κοίλη)**. 
- Αν $\frac{d^2y}{dx^2} < 0, \forall x < c$ & $\frac{d^2y}{dx^2} > 0, \forall x > c$ (ή αντίστροφα) τότε έχω σημείο αλλαγής καμπυλότητας. Δηλαδή, έχουμε **σημείο καμπής** (εφόσον ορίζεται η πρώτη παράγωγος).

Παράδειγμα: Για παράδειγμα για τη συνάρτηση $y(x) = x^2 - 5x + 6$ έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 5 \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} > 0 \;\; \text{όταν} \;\; x > \frac{5}{2} & \text{οπότε η } y(x) \uparrow \\ \frac{dy}{dx} < 0 \;\; \text{όταν} \;\; x < \frac{5}{2} & \text{οπότε η } y(x) \downarrow \end{cases}$$

Επειδή $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 > 0$, η συνάρτηση είναι κυρτή.



Τοπικά και ολικά ακρότατα.

Έστω μία συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη στο πεδίο ορισμού της D.Τότε ένα εσωτερικό σημείο c του πεδίου D αποτελεί:

- Τοπικό μέγιστο εάν $f(x) \leq f(c)$ $\forall x$ σε κάποιο ανοικτό διάστημα του D που περιέχει το c .
- Τοπικό ελάχιστο εάν $f(x) \geq f(c)$ $\forall x$ σε κάποιο ανοικτό διάστημα του D που περιέχει το c.
- Όλικό μέγιστο εάν $f(x) \leq f(c)$ $\forall x \in D$.
- Όλικό ελάχιστο εάν $f(x) \geq f(c)$ $\forall x \in D$.

Το μικρότερο τοπικό ελάχιστο αποτελεί ολικό ελάχιστο και το μεγαλύτερο τοπικό μέγιστο αποτελεί ολικό μέγιστο. Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα παρουσιάζει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο στο διάστημα αυτό.

Πιθανά τοπικά ακρότατα αποτελούν τα **κρίσιμα σημεία** (σημεία μηδενισμού της 1^{ης} παραγώγου και σημεία στα οποία δεν ορίζεται η παράγωγος) και τα άκρα του πεδίου ορισμού της (ή των διαστημάτων που συνθέτουν το πεδίο ορισμού).

- Οπότε εάν $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c} = 0 \Rightarrow f(x)$ έχει **πιθανά** τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο.

Για τα κρίσιμα σημεία εξετάζουμε τις τιμές της παραγώγου δεξιά και αριστερά του σημείου αυτού. Ισχύει:

- $\left(\frac{dy}{dx} < 0, x < c\right) \wedge \left(\frac{dy}{dx} > 0, x > c\right) \Rightarrow f(c)$ τοπικό ελάχιστο.
- $\left(\frac{dy}{dx} > 0, x < c\right) \wedge \left(\frac{dy}{dx} < 0, x > c\right) \Rightarrow f(c)$ τοπικό μέγιστο.

Για τα σημεία που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος, ενώ οι τιμές της δεύτερης παραγώγου δεν μηδενίζεται, ισχύει:

- $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=c} > 0, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c} = 0 \Rightarrow f(c)$ τοπικό ελάχιστο.
- $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=c} < 0, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c} = 0 \Rightarrow f(c)$ τοπικό μέγιστο.

Γενικά, αν ισχύει $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c} = \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=c} = \ldots = \left.\frac{d^ny}{dx^n}\right|_{x=c} = 0$ και $\left.\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right|_{x=c} \neq 0$ τότε:

- Εάν *n* άρτιος συμπεραίνουμε ότι το c είναι σημείο καμπής.
- Εάν *n* περιττός ισχύει:
    - ❖ Εάν $\left.\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right|_{x=c} > 0$ τότε το c είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.
    - ❖ Εάν $\left.\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right|_{x=c} < 0$ τότε το c είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων ελαχίστου μεγίστου

- **Κατανόηση προβλήματος** (δεδομένα – ζητούμενα)
- **Κατασκευή μαθηματικού μοντέλου** (σχήμα, ορισμός συνάρτησης που μοντελοποιεί το πρόβλημα)

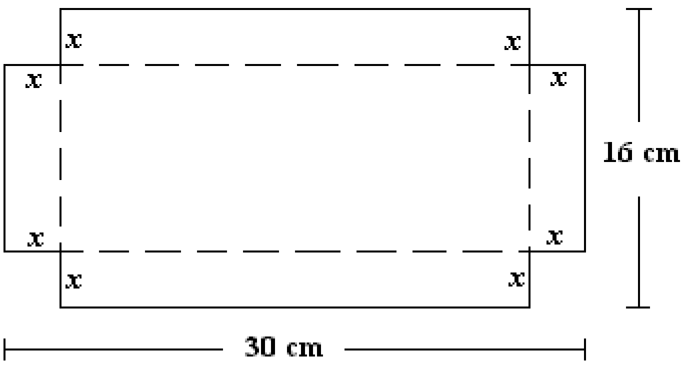
- **Προσδιορισμός πεδίου λύσεων** του προβλήματος σε σχέση με το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- **Προσδιορίζουμε τα κρίσιμα σημεία** και τα πιθανά ακρότατα.
- **Καθορίζουμε το είδος των ακρότατων** και αποδεχόμαστε αυτά που προσδιορίζονται από το πεδίο λύσης του προβλήματος.
- **Ερμηνεύουμε** τη λύση.

Παραδείγματα:

α) Για να κατασκευαστεί ένα ανοικτό κουτί (δηλ. χωρίς καπάκι) από ένα χαρτόνι διαστάσεων 16 cm με 30 cm κόβουμε ένα μικρό τετράγωνο κομμάτι από κάθε γωνία του. Ποιο θα πρέπει να είναι το μέγεθος του τετραγώνου που θα κόψουμε από κάθε γωνία έτσι ώστε το κουτί που θα φτιάξουμε να έχει όσο το δυνατό μεγαλύτερο όγκο;

Λύση

Αφού κόβουμε ένα μικρό τετράγωνο κομμάτι πλευράς x από κάθε γωνία του παραλληλογράμμου η κάθε πλευρά του θα είναι 30 – 2x και 16 – 2x αντίστοιχα.



Ο όγκος του κουτιού λοιπόν θα είναι $V=(16-2x)(30-2x)x=480x-92x^2+4x^3$.

Η μεταβλητή x όμως έχει κάποιους περιορισμούς. Δηλαδή:

1. Δεν μπορεί να είναι αρνητική
2. Επειδή το πλάτος του χαρτονιού είναι 16cm δεν μπορεί να ξεπερνά τα 8cm.

Έτσι, $0\le x\le 8$.

Βρίσκω τα κρίσιμα σημεία που είναι τα σημεία που μηδενίζουν την πρώτη παράγωγο:

$$\frac{dV}{dx}=480-184x+12x^2=4(3x^2-46x+120)$$

$\Delta=46^2-4\cdot 3\cdot 120=2116-1440=676=26^2$, οπότε ρίζες είναι οι $x_{1,2}=\dfrac{46\pm 26}{6}=\begin{cases} x=12 \\ x=\dfrac{10}{3}\end{cases}$

Οπότε για την πρώτη παράγωγο ισχύει: $\frac{dV}{dx} = 12(x-12)(x-\frac{10}{3})$. Πιθανά ακρότατα αποτελούν τα σημεία που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος, δηλαδή τα $x = 12$ ή $x = \frac{10}{3}$ και τα άκρα του διαστήματος $x = 0$ ή $x = 8$.

Το $x = 12$ απορρίπτεται ως μη αποδεκτή λύση.

Η δεύτερη παράγωγος μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το $x = \frac{10}{3}$ είναι τοπικό μέγιστο, διότι:

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=\frac{10}{3}} = (24x-184)\Big|_{x=\frac{10}{3}} = -104 < 0$$

Η τιμή του τοπικού μεγίστου είναι η $V\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{19600}{27} cm^3 \approx 725.925 cm^3$.

Επίσης, $V(0) = 0$ και $V(8) = 0\ cm^3$ (τι σημαίνει αυτό; σκέψου το ως κατασκευή) από όπου συμπεραίνουμε ότι η μόνη αποδεκτή λύση είναι η $x = \frac{10}{3}$.

β) **Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων** της μορφής $y = a\ x$.

Σε ένα πείραμα μελέτης της σχέσης μιας μεταβλητής y από την x, καταγράφονται οι αριθμοί

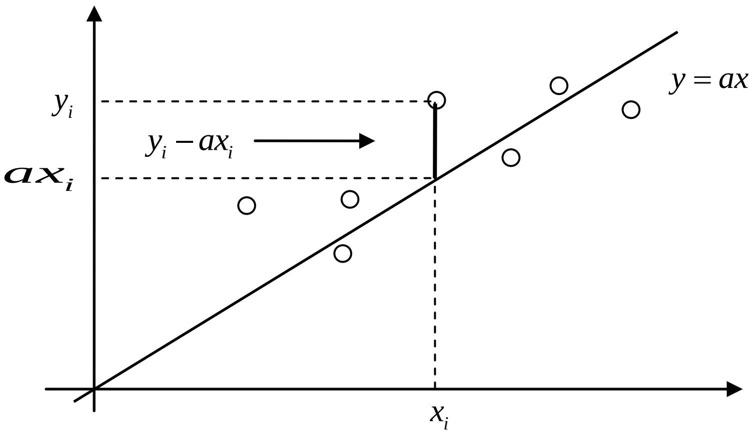
$$(x_1,y_1)=(1, 2.2),\ (x_2,y_2)= (2, 3.8),\ (x_3,y_3)= (3, 5.8),\ (x_4,y_4)= (4, 8.2)$$

και αναζητείται η ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων $(0,0)$ η οποία να περιγράφει καλύτερα τη γραφική τους παράσταση. Δηλαδή, αναζητούμε μία ευθεία με μορφή $y = ax$ που «περνά όσο το δυνατό πιο κοντά από τα δεδομένα».

Ένας τρόπος να γίνει αυτό είναι να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό σφάλμα των τετραγώνων των αποστάσεων $y_i - \alpha x_i$, δηλαδή των αποστάσεων που η ευθεία στο κάθε σημείο x_i αποτυγχάνει να προσεγγίσει το y_i (δείτε το παρακάτω σχήμα).

Δηλαδή, για το παράδειγμά μας, πρέπει να βρούμε την τιμή του α που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση σφάλματος :

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^{4}(y_i - \alpha x_i)^2 = (2.2-\alpha)^2 + (3.8-2\alpha)^2 + (5.8-3\alpha)^2 + (8.2-4\alpha)^2$$



Αφού ζητάμε το ελάχιστο της συνάρτησης σφάλματος παίρνουμε την παράγωγό της ως προς την άγνωστη παράμετρο α και βρίσκω τα σημεία που τη μηδενίζουν:

$$f'(a) = 2(2.2-a)(-1) + 2(3.8-2a)(-2) + 2(5.8-3a)(-3) + 2(8.2-4a)(-4) \Leftrightarrow$$

$$f'(a) = -4.4 + 2a - 15.2 + 8a - 34.8 + 18a - 65.6 + 32a \Leftrightarrow$$

$$f'(a) = 60a - 120$$

Οπότε $f'(a) = 0 \Leftrightarrow 60a - 120 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ πιθανό ακρότατο. Το $f''(a) = 60 \Leftrightarrow f''(2) = 60 > 0$ Οπότε το σημείο αυτό είναι σημείο ελαχίστου και ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση σφάλματος. Άρα η κλίση της γραμμικής προσέγγισης $y = \alpha x$ των δεδομένων που δίνει την ελάχιστη τιμή του σφάλματος είναι $\alpha = 2$ και η ζητούμενη ευθεία η $y=2x$.

γ) Να βρεθούν τα σημεία της καμπύλης $y = 1 - x^2$, που βρίσκονται σε ελάχιστη απόσταση από το σημείο O(0,0) του επιπέδου x,y.

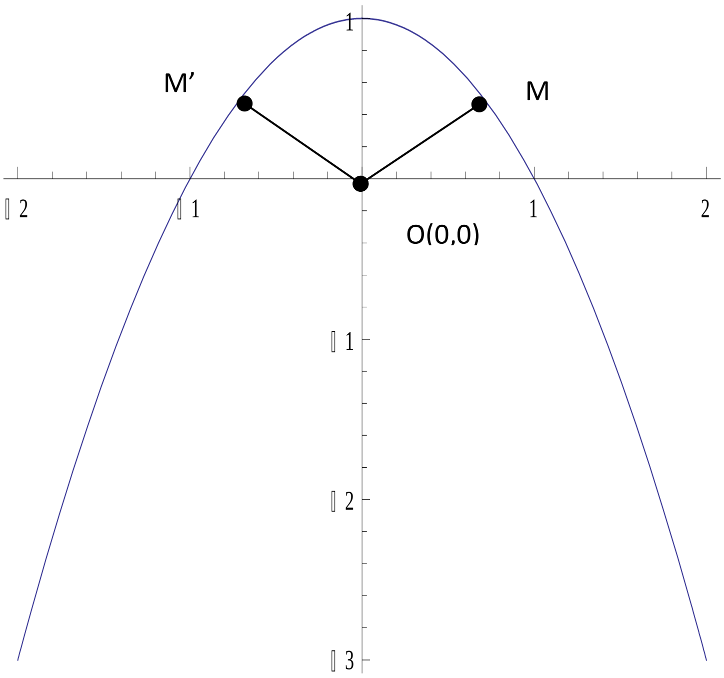
Λύση

Έστω $M(x, f(x))$

σημείο της καμπύλης $y = 1 - x^2$.

Η απόσταση *ΜΟ* είναι

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (1-x^2)^2} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$$



Η υπόριζη ποσότητα, είναι ένα διτετράγωνο δευτεροβάθμιο πολυώνυμο $(x^2)^2 - x^2 + 1$ με διακρίνουσα $\Delta=1\text{-}4=\text{-}3<0$ οπότε, δεν έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς και είναι πάντα θετική ποσότητα (ομόσημο με το πρόσημο του μεγιστοβαθμίου). Η πρώτη παράγωγος ισούται με

$$d'(x) = \frac{4x^3 - 2x}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}.$$

Και μηδενίζεται στις ρίζες του αριθμητή:

$$4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1) =$$

$$= 4x(x - \frac{\sqrt{2}}{2})(x + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0 \Rightarrow .$$

$$x = 0 \;\; \text{ή}\; x = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\; \text{ή}\; x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Εξετάζουμε το πρόσημο της πρώτης παραγώγου.

x	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad 0 \quad$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$			
$x+\frac{\sqrt{2}}{2}$	-	+	+	+
x	-	-	+	+
$x-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-	-	-	+
$d'(x)$	-	+	-	+
$y(x)$	$\frac{1}{2}$ $\quad 1 \quad$ $\frac{1}{2}$			

Από την εναλλαγή των πρόσημων της πρώτης παραγώγου συμπεραίνουμε ότι έχω τοπικά ελάχιστα για $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Οπότε τα ζητούμενα σημεία είναι $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ και $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$.

δ) Ένα σουπερμάρκετ θέλει να εφαρμόσει μια βέλτιστη πολιτική αποθέματος στην πώληση χυμών από πορτοκάλι για το επόμενο έτος. Ο υπεύθυνος πωλήσεων κάνει την εκτίμηση ότι 1200 κιβώτια χυμών θα πουληθούν σε σταθερό ρυθμό κατά την διάρκεια του έτους. Η διεύθυνση του σουπερμάρκετ σχεδιάζει κατά τη διάρκεια του έτους ένα αριθμό παραγγελιών (της ίδιας ποσότητας παραγγελίας κάθε φορά) για να αντιμετωπίσει την ζήτηση. Χρησιμοποιώντας το δεδομένο ότι

- το κόστος παραγγελίας είναι 75 € και
- το μέσο κόστος διατήρησης αποθέματος ενός κιβωτίου χυμών για ένα έτος είναι 4€ .

Καθορίστε τον αριθμό παραγγελιών που ελαχιστοποιεί το κόστος αποθέματος. Το κόστος αποθέματος υπολογίζεται ως το άθροισμα του κόστους παραγγελίας και του κόστους διατήρησης, ως εξής:

Ονομάστε x τον αριθμό παραγγελιών και y τον αριθμό των πακέτων που παραγγέλλουμε κάθε φορά και δείξτε ότι το συνολικό κόστος αποθέματος είναι $C(x)=75x + 4800/x$. Πως πρέπει να αλλάξει τις παραγγελίες του το σούπερμαρκετ αν οι πωλήσεις τετραπλασιαστούν, δηλαδή πουληθούν 4800 κιβώτια χυμών ενώ τα άλλα δεδομένα παραμένουν τα ίδια;

ΛΥΣΗ

Θέτουμε x τον αριθμό παραγγελιών που τοποθετούνται κατά την διάρκεια του χρόνου και y τον αριθμό των πακέτων που παραγγέλνουμε κάθε φορά. Ο αριθμός των πακέτων στο απόθεμα κάθε φορά κατά την διάρκεια μιας χρονικής περιόδου μειώνεται από y πακέτα σε 0 πακέτα. Επειδή το μέσο κόστος διατήρησης αποθέματος ενός κιβωτίου χυμών για ένα χρόνο είναι 4 € το συνολικό κόστος διατήρησης για όλα τα πακέτα θα ανέρχεται σε $4y$ € (δηλαδή σαν να έχουμε ποσότητα y πακέτων όλη την διάρκεια του χρόνου στο σούπερμαρκετ).

Αφού x παραγγελίες τοποθετούμε των y πακέτων κάθε μία ο συνολικός αριθμός πακέτων κατά την διάρκεια του χρόνου είναι xy. Άρα $xy=1200 \Rightarrow y=1200/x$.

Ισχύει ότι:

Κόστος αποθέματος = Κόστος παραγγελίας + Κόστος διατήρησης , δηλαδή

$$C(x) = 75x+4\,(1200/x)=75x+4800/x$$

Το κόστος γίνεται ελάχιστο ($C'(x)=0$) όταν $75-\dfrac{4800}{x^2}=0$, δηλαδή όταν ο αριθμός των παραγγελιών είναι x=8 κατά την διάρκεια του χρόνου και άρα παραγγέλνουμε 150 πακέτα κάθε φορά.

Για το επόμενο ερώτημα η μόνη αλλαγή στα προηγούμενα δεδομένα είναι ότι έχει τετραπλασιαστεί η ζήτηση δηλαδή $xy=4800$, άρα y=4800/x, τότε το κόστος $C(x)=75x+4\dfrac{4800}{x}$. Θέτοντας $C'(x)=0$ έχουμε $75-\dfrac{19200}{x^2}=0 \Rightarrow x=16$, άρα η βέλτιστη πολιτική είναι 16 παραγγελίες στην διάρκεια του χρόνου των 300 πακέτων ανά παραγγελία. Σημειώνουμε ότι αν και οι πωλήσεις τετραπλασιάσθηκαν η ποσότητα παραγγελίας θα πρέπει να διπλασιασθεί.

ε) Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με σταθερό εμβαδόν $E=c^2$, όπου $c>0$, να βρεθεί αυτό που έχει την ελάχιστη υποτείνουσα και στην συνέχεια να υπολογισθούν και οι άλλες πλευρές του.

<u>Λύση</u>

Αν x, y συμβολίζουν τα μήκη των δύο καθέτων πλευρών του τριγώνου, το εμβαδόν είναι $E=\dfrac{xy}{2}=c^2$, και η υποτείνουσα είναι $h=\sqrt{x^2+y^2}$. Λύνοντας την σχέση που δίνει το εμβαδόν ως προς y έχουμε $y=\dfrac{2c^2}{x}$. Αντικαθιστώντας στην σχέση για την υποτείνουσα έχουμε $h(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{4c^4}{x^2}}=\dfrac{\sqrt{x^4+4c^4}}{x}$, αφού οι ποσότητες x, y είναι θετικές. Για να ελαχιστοποιήσουμε την υποτείνουσα αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης $h'(x)=0$ αφού έχουμε παραγωγίσιμη συνάρτηση. Είναι

$$h'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{4c^4}{x^2}}}\left(x^2+\frac{4c^4}{x^2}\right)'=\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^4+4c^4}}\left(2x-2\frac{4c^4}{x^3}\right)=\frac{\left(x^4-4c^4\right)}{x^2\sqrt{x^4+4c^4}}$$

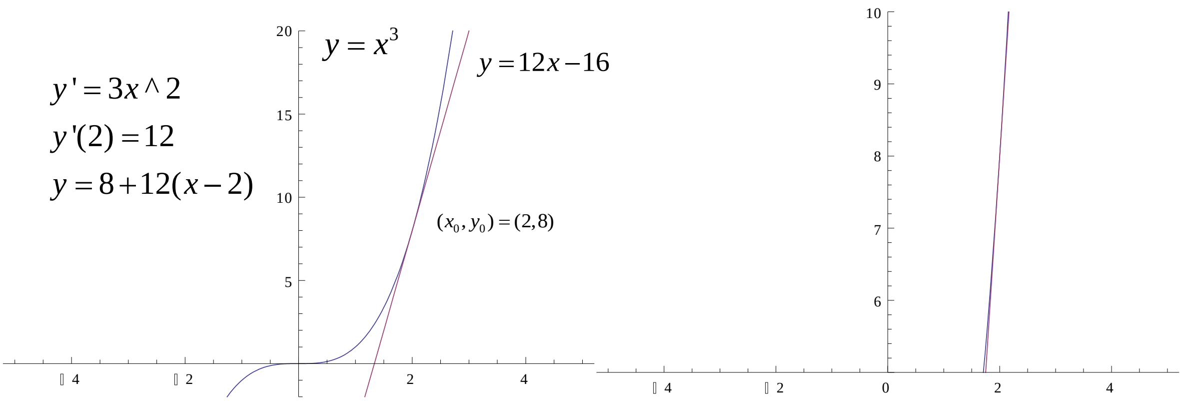
Ρίζες της πρώτης παραγώγου είναι οι $x=\pm\sqrt{2}c$, δεκτή γίνεται η θετική. Αντίστοιχη τιμή για το y είναι η $\sqrt{2}c$.

Για να εξασφαλίσουμε ελάχιστη τιμή εξετάζουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου.

$$h''(x)=\frac{4x^3x^2\sqrt{x^4+4c^4}-\left(x^4-4c^4\right)\left(x^2\sqrt{x^4+4c^4}\right)'}{x^4\left(x^4+4c^4\right)}.$$

Η παράσταση $\left(x^4-4c^4\right)\left(x^2\sqrt{x^4+4c^4}\right)'$ μηδενίζεται για $x=\sqrt{2}c$ και η παράσταση $h''(x)$ είναι θετική, οπότε για $x=\sqrt{2}c$, $y=\sqrt{2}c$ έχουμε την ελάχιστη τιμή της υποτείνουσας $h=\sqrt{2c^2+2c^2}=2c$.

4.3.4 Γραμμικοποίηση και Διαφορικό



Στο πρώτο από τα παραπάνω σχήματα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=x^3$ και της εφαπτόμενης ευθείας της στο σημείο $(2,8)$. Στο δεύτερο έχουμε μεγεθύνει την περιοχή του σημείου. Παρατηρούμε ότι όσο περισσότερο μεγεθύνουμε στην περιοχή του σημείο της παραγώγου, οι διαφορές της καμπύλης με την εφαπτόμενή της εξαλείφονται όλο και περισσότερο. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όσο μένουμε κοντά στο σημείο παραγώγισης η συνάρτησή μας θα μπορούσε να προσεγγιστεί (αρκετά καλά) από την εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο αυτό.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x=c$, τότε η συνάρτηση

$$L(x)=f(c)+f'(c)(x-c)$$

ονομάζεται **γραμμικοποίηση** της συνάρτησης f στην περιοχή του c.

Η συνάρτηση αυτή προσεγγίζει την συνάρτηση στο σημείο αυτό γραμμικά (δηλαδή με μία συνάρτηση ως προς x η οποία είναι ένα πολυώνυμο 1ου βαθμού):

$$f(x)\approx L(x)=f(c)+f'(c)(x-c)$$

Στο παράδειγμά μας έχουμε ότι στην περιοχή του $c=2$ έχουμε ότι $x^3 \approx 12x-16$.

Τα αποτελέσματα της προσέγγισης και το σφάλμα της στην περιοχή του 2 φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	x^3	$12x-16$	*Απόλυτη διαφορά*
2.05	8.61512	8.6	0.015125
2.01	8.120601	8.12	0.000601
2.005	8.060150125	8.06	0.000150125
2.001	8.0012006001	8.0012	0.000006010
2	8	8	0

Η γραμμικοποίηση:

- της $(1+x)^\kappa$, όπου κ πραγματικός, στο 0 είναι $1+\kappa x$, αφού $\left((1+x)^k\right)' = k(1+x)^{k-1}(1+x)' = k(1+x)^{k-1}$ οπότε η παράγωγος στο 0 είναι ίση με κ . Έχουμε δηλαδή,

$$(1+x)^\kappa \approx L(x)=f(0)+f'(0)(x-0)=1+\kappa x$$

- της $\sin(x)$, στο 0, αφού $(\sin(x))'=\cos(x)$, είναι

$$\sin(x)\approx L(x)=f(0)+f'(0)(x-0)=0+x= x$$

- της $\cos(x)$, στο 0, αφού $(\cos(x))'=-\sin(x)$, είναι

$$\cos(x)\approx L(x)=f(0)+f'(0)(x-0)=1+0\, x = 1$$

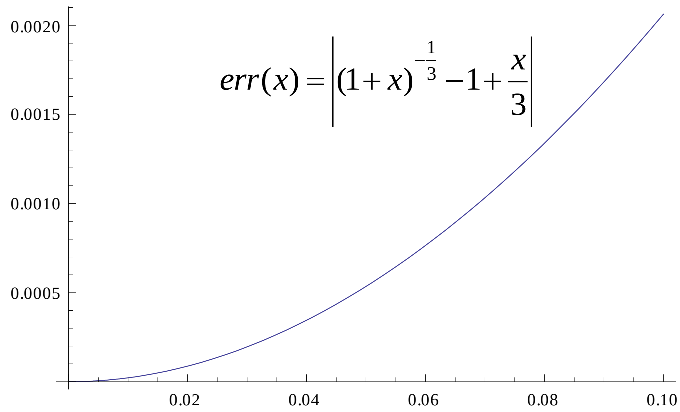
Παράδειγμα:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{3}}\approx 1+\left(-\frac{1}{3}\right)x=1-\frac{x}{3}$$

Τα αποτελέσματα της προσέγγισης και το σφάλμα της στην περιοχή του 0 φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$f(x)$	$L(x)$	*Απόλυτη διαφορά*
0.05	0.9838681468062	0.9833333333333	0.0005348134728 ($\approx 10^{-4}$)
0.01	0.9966887174773	0.9966666666667	0.0000220508106 ($\approx 10^{-5}$)
0.005	0.9983388673736	0.9983333333333	0.0000055340402 ($\approx 10^{-6}$)
0.001	0.9996668887162	0.9996666666667	0.0000002220495 ($\approx 10^{-7}$)
0	1	1	0

Μπορούμε να δούμε γραφικά το πώς αυξάνει το σφάλμα της προσέγγισης θεωρώντας την συνάρτηση $|f(x)- L(x)|$ και κάνοντας τη γραφική της παράσταση στο διάστημα $[0,0.1]$.



Παράδειγμα: Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση όπου x το $-x^2$ μπορούμε να προσεγγίσουμε στην περιοχή του 0 και την παρακάτω συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{3}} \approx 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)(-x^2) = 1 + \frac{1}{3}x^2$$

Τα αποτελέσματα της προσέγγισης και το σφάλμα της στην περιοχή του 0 φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	*f(x)*	*L(x)*	*Απόλυτη διαφορά*
0.05	1.000834725	1.00083332	0.0000013916 (≈10^{-6})
0.01	1.000033336	1.00003333	0.0000000022 (≈10^{-9})
0.005	1.000008333 …	1.000008333 …	0.000000000134 (≈10^{-10})
0.001	1.000000333 …	1.000000333 …	0.00000000000022 (≈10^{-13})
0	1	1	0

(οι παραπάνω υπολογισμοί έχουν γίνει με το MATHEMATICA)

Διαφορικό

Έστω ***y=f(x)*** διαφορίσιμη συνάρτηση. Το **διαφορικό *dx*** είναι μία ανεξάρτητη μεταβλητή και το **διαφορικό *dy*** είναι μία εξαρτημένη (από το ***x*** και το ***dx***) μεταβλητή που ισούται με

$$dy = f'(x)dx$$

Αν το ***dx≠0*** τότε το πηλίκο των διαφορικών ισούται με την παράγωγο:

$$\frac{\textit{διαφορικό } dy}{\textit{διαφορικό } dx} = f'(x) = \frac{dy}{dx} \text{ συμβολισμός παραγώγου}$$

Αυτό μας κάνει να «θεωρούμε» (ενώ δεν ισχύει στην πραγματικότητα κάτι τέτοιο) την παράγωγο ως πηλίκο των ***dx*** και ***dy.***

Κάθε ιδιότητα παραγώγισης έχει την αντίστοιχη διαφορική της μορφή:

$$d\left(cf\right)=cdf\,,c\in R$$

$$d\left(f\pm g\right)=df\pm dg$$

$$d\left(f\cdot g\right)=df\cdot g+f\cdot dg$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{df\cdot g-f\cdot dg}{g^{2}}$$

$$d(f(g))=f'(g(x))dg=\frac{df(g)}{dg}\cdot\frac{dg(x)}{dx}$$

Παραδείγματα:

Αν $y=x^2$ τότε $dy=2xdx$

Αν $y=\sin(2x)$ τότε $dy=\cos(2x)d(2x)=2\cos(2x)dx$

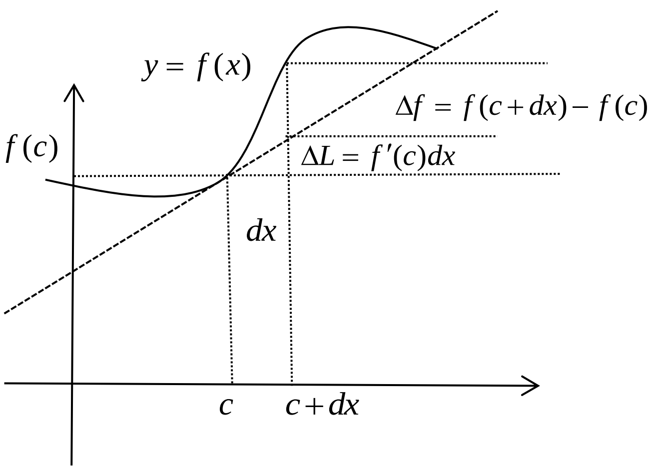
Αν $y=e^{\sin(2x)}$ τότε $dy=e^{\sin(2x)}d(\sin(2x))=2e^{\sin(2x)}\cos(2x)dx$

Αν $y=x^2e^{\sin(2x)}$ τότε $dy=d(x^2)e^{\sin(2x)}+x^2d(e^{\sin(2x)})=2xe^{\sin(2x)}dx+2x^2e^{\sin(2x)}\cos(2x)dx$

Επίσης

$$d\left(\frac{x^2}{x-1}\right)=\frac{(x-1)d(x^2)-x^2d(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)2xdx-x^2dx}{(x-1)^2}=\frac{x^2dx-2xdx}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}dx$$

Εάν γνωρίζουμε την τιμή *f(c)* μίας διαφορίσιμης συνάρτησης *f(x)* στο σημείο c και την παράγωγό της στο ίδιο σημείο *f ‘(c)* τότε μπορούμε να προσεγγίσουμε τη μεταβολή της τιμής της συνάρτησης *Δf*, από c στο $c+dx$, με τη χρήση της μεταβολής της γραμμικοποίησης *ΔL* της *f(x)* στο σημείο c, όταν το dx είναι σχετικά μικρό.



Δηλαδή,

$$f(c+dx)-f(c)=\Delta f \approx \Delta L = L(c+dx)-L(c)=\underbrace{f(c)+f'(c)[(c+dx)-c]}_{L(c+dx)}-\underbrace{f(c)}_{L(c)}=f'(c)dx$$

$$\Delta f \approx df = f'(c)dx$$

Έτσι η τιμή του διαφορικού df στο c, αποκτά μία γεωμετρική ερμηνεία, αυτή της **διαφορικής προσέγγισης της μεταβολής** της τιμής της συνάρτησης όταν το x μεταβάλλεται από το c στο $c+dx$.

Πίνακας τρόπων περιγραφής μεταβολής		
	Ακριβής τιμή	**Προσέγγιση**
Μεταβολή	$\Delta f = f(c+dx)-f(c)$	$df = f'(c)dx$
Σχετική μεταβολή	$\dfrac{\Delta f}{f(c)}$	$\dfrac{df}{f(c)}$
Ποσοστιαία μεταβολή	$\dfrac{\Delta f}{f(c)}\times 100$	$\dfrac{df}{f(c)}\times 100$

Παραδείγματα:

α) Η ακτίνα ενός κύκλου αυξάνεται από 3.0 σε 3.01 μέτρα. Εκτιμήστε την προκύπτουσα μεταβολή στο εμβαδό του κύκλου. Εκφράστε αυτήν την εκτίμηση ως ποσοστιαία μεταβολή.

Λύση

$$E(r)=\pi r^2 \Rightarrow dE = 2\pi r dr$$

Δεδομένου ότι $r=3, dr=0.1$ η εκτίμηση της μεταβολής του εμβαδού είναι

$$dE = 2\pi 3\cdot 0.01 = 0.06\pi \ \ \mathrm{m}^2$$

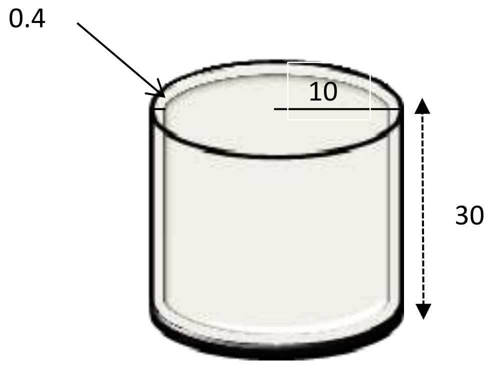
Η εκτίμηση της επί τοις εκατό ποσοστιαίας μεταβολής είναι

$$\frac{dE}{E(3)}\times 100\% = \frac{0.06\pi}{\pi 3^2}\times 100\% = 0.666\%$$

β) Εκτιμήστε πόσος όγκος περιέχεται σε κυλινδρικό κέλυφος ύψους 30 μέτρων ακτίνας 10 μέτρων και πάχους 0.4 μέτρων.

Λύση

Η εκτίμηση του όγκου του κυλινδρικού κελύφους ισούται με την εκτίμηση μεταβολής του όγκου του κυλίνδρου όταν η ακτίνα του μεταβάλλεται από την τιμή των 10 μέτρων κατά $dr=-0.4$ σε 9.6 μέτρα.



Ο όγκος του κυλίνδρου όταν είναι σταθερό το ύψος του και μπορεί να μεταβάλλεται η ακτίνα της βάσης είναι $V(r)=\pi r^2 h \Rightarrow dV = 2\pi h r dr$.

Οπότε για τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$$dV = -2\pi 10\cdot 30\cdot 0.4 = -240\pi = -753.6 \text{ m}^3$$

Συμπεραίνουμε ότι ο όγκος του κελύφους είναι περίπου 753.6 m^3.

γ) Με πόση περίπου ακρίβεια πρέπει να μετρηθεί η εσωτερική διάμετρος μίας κυλινδρικής δεξαμενής με σταθερό ύψος έτσι ώστε ο υπολογισμός της χωρητικότητάς της να έχει σφάλμα μικρότερο του 2%.

Λύση

Ο όγκος του κυλίνδρου όταν είναι σταθερό το ύψος του και μπορεί να μεταβάλλεται η διάμετρος δ της βάσης είναι $V(\delta)=\pi\frac{\delta^2}{4}h \Rightarrow dV = \frac{\pi h\delta}{2}d\delta$.

Το πρόβλημα ζητάει να ισχύει

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\times 100\right| \approx \left|\frac{dV}{V}\times 100\right| = \left|\frac{\frac{\pi h\delta}{2}d\delta}{\pi\frac{\delta^2}{4}h}\times 100\right| = \left|\frac{2}{\delta}d\delta\times 100\right| \le 2 \Leftrightarrow |d\delta| \le \frac{2\delta}{200} = 0.01\delta = 1\%\delta$$

Οπότε το περιθώριο σφάλματος της μέτρησης είναι 1%.

4.3.5 Ανάπτυγμα Taylor και εφαρμογές του

Αν η συνάρτηση *f* είναι απείρως παραγωγήσιμη με συνεχείς παραγώγους στην περιοχή ενός πραγματικού αριθμού α τότε η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως άπειρη σειρά

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

η οποία ονομάζεται σειρά **Taylor** της συνάρτησης με κέντρο το α.

Αν $\alpha=0$ τότε το ανάπτυγμα ονομάζεται και ανάπτυγμα σε σειρά Maclaurin.

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+....=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

Για παράδειγμα για την $f(x)=\sin(x)$ η σειρά Maclaurin είναι η ακόλουθη:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=\sin(x)\Rightarrow f(0)=\sin(0)=0 \\ f'(x)=\cos(x)\Rightarrow f'(0)=\cos(0)=1 \\ f^{(2)}(x)=-\sin(x)\Rightarrow f^{(2)}(0)=-\sin(0)=0 \\ f^{(3)}(x)=-\cos(x)\Rightarrow f^{(3)}(0)=-\cos(0)=-1 \\ f^{(4)}(x)=\sin(x)\Rightarrow f^{(4)}(0)=\sin(0)=0 \\ f^{(5)}(x)=\cos(x)\Rightarrow f^{(5)}(0)=\cos(0)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \sin(x)=0+\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

Για παράδειγμα για την $f(x)=\cos(x)$ η σειρά Maclaurin είναι η ακόλουθη:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=\cos(x)\Rightarrow f(0)=\cos(0)=1 \\ f'(x)=-\sin(x)\Rightarrow f'(0)=-\sin(0)=0 \\ f^{(2)}(x)=-\cos(x)\Rightarrow f^{(2)}(0)=-\cos(0)=-1 \\ f^{(3)}(x)=\sin(x)\Rightarrow f^{(3)}(0)=\sin(0)=0 \\ f^{(4)}(x)=\cos(x)\Rightarrow f^{(4)}(0)=\cos(0)=1 \\ f^{(5)}(x)=-\sin(x)\Rightarrow f^{(5)}(0)=-\sin(0)=0 \\ f^{(6)}(x)=-\cos(x)\Rightarrow f^{(6)}(0)=-\cos(0)=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow \cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\cdots=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$$

Για παράδειγμα για την $f(x)=e^x$ η σειρά Maclaurin είναι η ακόλουθη:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=e^x\Rightarrow f(0)=e^0=1 \\ f^{(k)}(x)=e^x\Rightarrow f^{(k)}(0)=e^0=1 \end{array}\right\}\Rightarrow e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Για παράδειγμα για την $f(x)=\ln(x)$ η σειρά Taylor με κέντρο το 1 είναι η ακόλουθη:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=\ln(x)\Rightarrow f(1)=\ln(1)=0 \\ f'(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}\Rightarrow f'(1)=1^{-1}=1 \\ f^{(2)}(x)=\left(x^{-1}\right)'=-x^{-2}\Rightarrow f^{(2)}(1)=-1 \\ f^{(3)}(x)=\left(-x^{-2}\right)'=2x^{-3}\Rightarrow f^{(3)}(1)=2 \\ f^{(4)}(x)=\left(2x^{-3}\right)'=-6x^{-4}\Rightarrow f^{(4)}(1)=-6 \\ f^{(5)}(x)=\left(-6x^{-4}\right)'=24x^{-5}\Rightarrow f^{(5)}(x)=12 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2!}+2\frac{(x-1)^3}{3!}-6\frac{(x-1)^4}{4!}+24\frac{(x-1)^5}{5!}\cdots=$$

$$\Rightarrow \ln(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^5}{5}\cdots$$

Παραδείγματα

α) Τα αναπτύγματα Taylor μπορούν να χρησιμοποιηθούν στον υπολογισμό ορίων ή ακόμη και για προσέγγιση τιμών ορισμένων ολοκληρωμάτων συναρτήσεων. Για να δούμε μία τέτοια εφαρμογή, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor με κέντρο το 1 (δηλαδή δυνάμεων του $x-1$) για την συνάρτηση $\ln x$ μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}$. Με αναλυτικό τρόπο στο χαρτί θα κάναμε τις ακόλουθες πράξεις:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\dots}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(1-\frac{(x-1)}{2}+\frac{(x-1)^2}{3}-\frac{(x-1)^3}{4}+\dots\right)=1$$

β) Χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα της εκθετικής και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων σε σειρές Taylor, αποδείξτε τον τύπο του Euler:

$$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Λύση

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα σε σειρά κέντρου μηδέν της εκθετικής συνάρτησης και αντικαθιστώντας όπου x το ix έχουμε:

$$e^{ix}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ix)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n x^n}{n!}.$$

Όμως, για τις δυνάμεις του i γνωρίζουμε ότι:

$$i^n=\begin{cases} i^{4k}=(i^4)^k=1^k=1, & \text{αν n=4k}\\ i^{4k+1}=(i^4)^k\cdot i=i, & \text{αν n=4k+1}\\ i^{4k+2}=(i^4)^k\cdot i^2=-1, & \text{αν n=4k+2}\\ i^{4k+3}=(i^4)^k\cdot i^3=-i, & \text{αν n=4k+3}\end{cases}=\begin{cases}(-1)^m, & \text{n=2m}\\ (-1)^m\cdot i, & \text{n=2m+1}\end{cases}$$

Επομένως, μπορούμε να χωρίσουμε τη σειρά της εκθετικής συνάρτησης ως εξής:

$$e^{ix}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ix)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n x^n}{n!}=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{i^{2m}x^{2m}}{(2m)!}+\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{i^{2m+1}x^{2m+1}}{(2m+1)!}=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}+i\cdot\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}=$$
$$=\cos(x)+i\sin(x)$$

Πολυώνυμα Taylor

Θεώρημα Taylor

Αν η συνάρτηση f είναι $(n+1)$ φορές παραγωγήσιμη με συνεχείς παραγώγους σε ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει έναν πραγματικό αριθμό α τότε η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως σειρά

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

για κάποιο $\xi \in (a,x)$.

Με τη χρήση του θεωρήματος αυτού μπορούμε να προσεγγίσουμε συναρτήσεις στην περιοχή του α με πολυώνυμα (Taylor ή MacLaurin) βαθμού n εάν αποκόψουμε τον τελευταίο όρο ο οποίες αποτελεί και το σφάλμα της προσέγγισης :

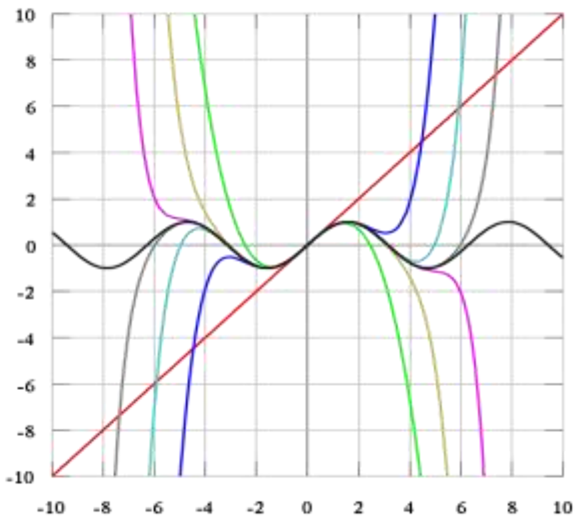
$$f(x) \approx f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

ή

$$f(x) \approx f(0) + \frac{x}{1!} f^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

Παρατηρήστε ότι το πολυώνυμο Taylor βαθμού 1 αποτελεί τη γραμμικοποίηση της συνάρτησης στην περιοχή του α.

Η προσέγγιση της *y=sin(x)* στο *0* με πολυώνυμα Taylor βαθμού 1,3,5,7,9,11,13 φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (πηγή Wikipedia):



Υπολογισμός σφάλματος

Το υπόλοιπο (σφάλμα) της πολυωνυμικής προσέγγισης n-βαθμού είναι :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(\mathrm{n}+1)!}(x-a)^{n+1}$$

για κάποιο $\xi \in (a,x)$.

Παραδείγματα

α) Συνεπώς στην προσέγγιση του *sin(x)* με πολυώνυμο βαθμού 2 στο 0, θα έχουμε ότι $P_2(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 = x$ και συνεπώς το σφάλμα θα είναι :

$$|R_2(x)| = \left| \frac{\left(\sin(x)\right)^{(3)}_{x=\xi}}{3!} x^3 \right| = \left| \frac{-\cos(\xi)}{3!} x^3 \right| \le \frac{|x^3|}{6}$$

Άρα για $|x| \le 0.1 \Rightarrow |R_2(x)| \le \frac{0.1^3}{6} = 0.00017$

β) Επίσης στην προσέγγιση του e^x με πολυώνυμο βαθμού 3 στο 0, θα έχουμε ότι $P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ και συνεπώς το σφάλμα θα είναι :

$$|R_3(x)| = \left| \frac{\left(e^x\right)^{(4)}_{x=\xi}}{4!} x^4 \right| = \left| \frac{e^\xi}{4!} x^4 \right|$$

Μας ενδιαφέρει να φράξουμε την ποσότητα αυτή όταν $|x| \le 0.1 \Leftrightarrow x^4 \le 10^{-4}$ οπότε η παραπάνω ποσότητα φράσσεται:

$$|R_3(x)| = \left| \frac{e^\xi}{4!} x^4 \right| = \frac{e^\xi}{4!} x^4 \le \frac{e^\xi}{4!} 10^{-4}$$

Εφόσον $\xi \in (a, x)$ και $|x| \le 0.1$, η ποσότητα e^ξ στο διάστημα [-0.1,0.1] παίρνει τη μικρότερη τιμή στο -0.1 και τη μεγαλύτερη στη 0.1 (μιας και η e^x είναι αύξουσα συνάρτηση), οπότε ισχύει:

$$|R_3(x)| = \left| \frac{e^\xi}{4!} x^4 \right| = \frac{e^\xi}{4!} x^4 \le \frac{e^\xi}{4!} 10^{-4} \le \frac{e^{0.1} 10^{-4}}{24} \approx 0.0000046049$$

γ) Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor γύρω από το x = 0 τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+1}$ υπολογίστε με ακρίβεια τουλάχιστον 6 ψηφίων την ποσότητα $\sqrt{1.01}$.

Λύση

$$f(0) = \sqrt{0+1} = 1, \; f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right)' = \left(\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(x+1)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \left(-\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}} \right)' = -\frac{1}{4}(-\frac{3}{2})(x+1)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f^{(3)}(0) = \frac{3}{8}$$

Η σειρά Taylor στο *x*=0 είναι

$$\sqrt{x+1} = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 + \ldots\ldots \Rightarrow$$

$$\sqrt{x+1} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}x - \frac{\frac{1}{4}}{2!}x^2 + \frac{\frac{3}{8}}{3!}x^3 + \ldots\ldots = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \ldots\ldots$$

$$\overset{x=0.01}{\Rightarrow} \sqrt{0,01+1} = 1 + \frac{1}{2}0.01 - \frac{1}{8}0.01^2 + \frac{1}{16}0.01^3 + \ldots\ldots \Rightarrow$$

$$\sqrt{1,01} \approx 1,004987$$

Σταματάμε στον τρίτο όρο του πολυωνύμου γιατί ο επόμενος όρος και κάθε επόμενος όρος είναι της μορφής

$$k0.01^a = k10^{-2a} \quad \text{όπου k<1 και } \alpha \geq 3$$

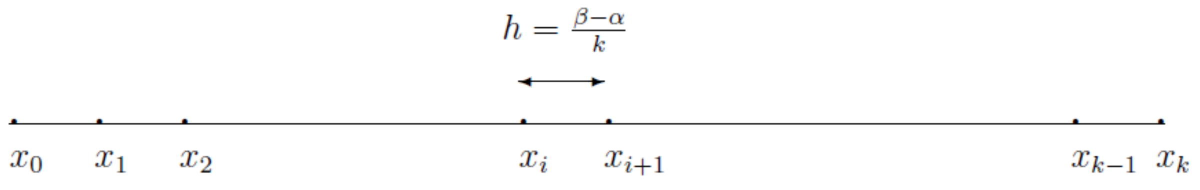
και επηρεάζει την προσέγγιση από το όγδοο ψηφίο και μετά. Συγκεκριμένα για τον 4ο όρο έχουμε

$$\frac{1}{16}0.01^3 = 6.25\times10^{-8}.$$

4.3.6 Προσεγγιστικός υπολογισμός παραγώγων.

Ο αναλυτικός (ακριβής) υπολογισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι σχετικά εύκολος και άμεσος με την εφαρμογή κανόνων παραγώγισης. Άλλωστε τα σύγχρονα μαθηματικά περιβάλλοντα (π.χ. Matlab, Mathematica) δίνουν την δυνατότητα να υπολογίσουμε με ακριβείς (συμβολικές) πράξεις τις παραγώγους μιας συνάρτησης. Ωστόσο, ο υπολογισμός της παραγώγου σε κάποιο σημείο μπορεί να αποτελεί μέρος μίας άλλης προσεγγιστικής διαδικασίας. Συνήθως, σε τέτοιες περιπτώσεις, ενσωματώνουμε στην προσεγγιστική μέθοδο προσεγγίσεις της παραγώγου.

Η προσέγγιση των παραγώγων διαφόρων τάξεων μίας συνάρτησης σε κάποιο σημείο γίνεται με τη χρήση των τιμών της συνάρτησης στο ίδιο και σε γειτονικά σημεία. Έστω ότι έχουμε μία συνάρτηση $f \in C[\alpha,\beta]$ και ότι δίνονται οι τιμές $f(x_i) = f_i,\ i=0,1,2,\ldots,k$ αυτής σε $k+1$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία του $[\alpha,\beta]$. Έστω ακόμη ότι και οι παράγωγοι υψηλότερης τάξης της στο διάστημα αυτό υπάρχουν και ότι είναι συνεχείς. Θεωρούμε επίσης, ότι η διαμέριση (χωρισμός του διαστήματος $[\alpha,\beta]$ σε υποδιαστήματα) αυτή έχει σταθερό πλάτος $h = x_{i+1} - x_i$.



Το ανάπτυγμα Taylor 1ης τάξης με κέντρο ένα σημείο x_i της διαμέρισης ισούται με

$$f(x) = f(x_i) + \frac{f'(x_i)}{1!}\left(x - x_i\right) + \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x - x_i\right)^2 .$$

Αποκόπτοντας τον όρο του σφάλματος έχουμε την προσέγγιση

$$f(x) \approx f(x_i) + \frac{f'(x_i)}{1!}\left(x - x_i\right)$$

αντικαθιστώντας όπου x το x_{i+1} και λύνοντας ως προς $f'(x_i)$ έχουμε την **προς τα εμπρός προσέγγιση** της 1ης παραγώγου από τον τύπο:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}.$$

Το απόλυτο σφάλμα της προσέγγισης είναι

$$E = \left| f'(x_i) - \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \right| = \frac{h}{2} f''(\xi)$$

όπου $\xi \in (x_i, x_{i+1})$. Εφόσον η δεύτερη παράγωγος σε αυτό το διάστημα είναι απόλυτα φραγμένη τότε και το σφάλμα της προσέγγισης φράσσεται. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σφάλμα έχει τάξη $\mathcal{O}(h)$.

Εάν αντίστοιχα, αντικαταστήσουμε όπου x το x_{i+1} και λύσουμε ως προς $f'(x_i)$ έχουμε την **προς τα πίσω προσέγγιση** της 1^{ης} παραγώγου από τον τύπο:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}.$$

Επίσης, ο τύπος προσέγγισης **τριών σημείων** της πρώτης παραγώγου είναι

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

του οποίου το σφάλμα έχει τάξη $\mathcal{O}(h^2)$, που σημαίνει ότι (όταν το $h < 1$) το σφάλμα προσέγγισης είναι μικρότερο.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = xe^x$ και τον ακόλουθο πίνακα τιμών της:

i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
x_i	1.8	1.9	2	2.1	2.2
f_i	10.889365	12.703199	14.778112	17.148957	19.855030

Η παράγωγος της συνάρτησης ισούται με $f'(x)=(x+1)e^x$ η οποία στο σημείο 2 ισούται με $f'(2)=22.167168$.

Η προσέγγιση της τιμής της παραγώγου με τον τύπο της προς τα εμπρός διαφοράς είναι

$$f'(2)\approx\frac{f(2.1)-f(2)}{0.1}=\frac{17.148957-14.77812}{0.1}=23.708370$$

και το απόλυτο σφάλμα 1.541201.

Για τον αντίστοιχο τύπο τριών σημείων έχουμε

$$f'(2)\approx\frac{f(2.1)-f(1.9)}{2\cdot 0.1}=\frac{17.148957-12.703199}{0.2}=22.22879$$

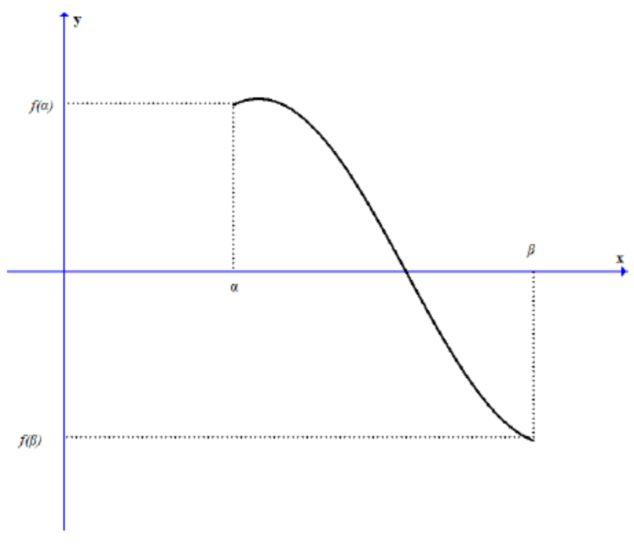
με απόλυτο σφάλμα 0.061622.

4.3.7 Προσεγγιστικός υπολογισμός λύσεων μη γραμμικών εξισώσεων.

Σε αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με μεθόδους για την εύρεση ριζών εξισώσεων της μορφής:

$$f(x)=0$$

όπου $f\in C[\alpha,\beta]$. Μία τέτοια εξίσωση μπορεί να έχει καμία, μία ή πολλές (πραγματικές ή μιγαδικές) ρίζες. Υποθέτουμε ότι έχουμε εξασφαλίσει την ύπαρξη τουλάχιστον μίας ρίζας και με κάποιον τρόπο (γραφικά ή διαφορετικά) έχουμε βρει μία περιοχή του πεδίου ορισμού της συνάρτησης στο οποίο υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα.
Υποθέτουμε ότι έχουμε εντοπίσει ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ στο οποίο υπάρχει τουλάχιστο μία ρίζα. Σύμφωνα με τα όσα γνωρίζουμε από την Μαθηματική Ανάλυση (Θεώρημα Θεώρημα Bolzano), για συνεχείς συναρτήσεις, μία ικανή συνθήκη για να ισχύει αυτό είναι η σχέση $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$. Θεωρούμε ότι αυτή η συνθήκη ισχύει και χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι η εξίσωση έχει μία μόνο πραγματική ρίζα r στο $[\alpha,\beta]$.



Θεώρημα Bolzano

Οι περισσότερες εξισώσεις της μορφής $f(x)=0$ δεν μπορούν να λυθούν με αναλυτικές (ακριβείς) μαθηματικές διαδικασίες. Έτσι, προσεγγιστικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται για την εύρεση των ριζών.

Η **μέθοδος Newton** είναι μία από τις πιο ικανές και δημοφιλείς επαναληπτικές μεθόδους για την προσέγγιση μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x)=0$. Γενικά, αν x_n είναι η τρέχουσα προσέγγιση, τότε η επόμενη προσέγγιση δίνεται από τον επαναληπτικό τύπο:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0,1,2,...$$

Η Newton προκύπτει από το το ανάπτυγμα Taylor 1ης τάξης με κέντρο ένα σημείο $\hat{x}$ το οποίο ισούται με

$$f(x) = f(\hat{x}) + \frac{f'(\hat{x})}{1!}(x-\hat{x}) + \frac{f''(\xi(x))}{2!}(x-\hat{x})^2$$

όπου $\xi(x) \in [x, \hat{x}]$. Εάν το $\hat{x}$ είναι μία προσέγγιση της ρίζας p κοντά σε αυτή για το οποίο $f'(\hat{x}) \neq 0$, τότε

$$0 = f(p) = f(\hat{x}) + \frac{f'(\hat{x})}{1!}(p-\hat{x}) + \frac{f''(\xi(p))}{2!}(p-\hat{x})^2.$$

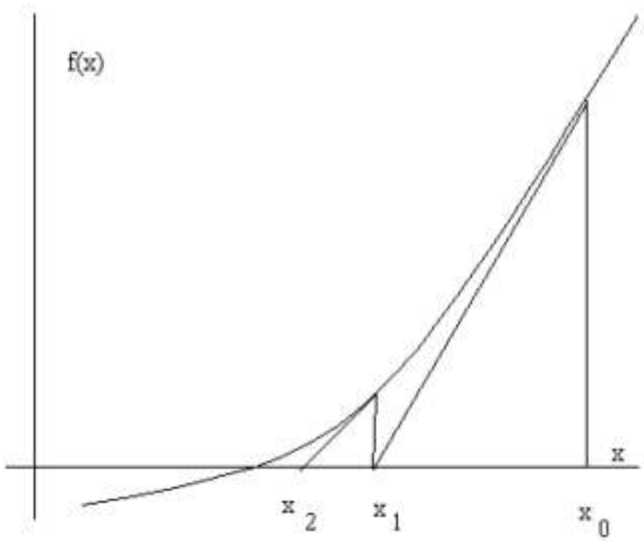
Αποκόπτοντας τον όρο του σφάλματος έχουμε την προσέγγιση

$$0 \approx f(\hat{x}) + \frac{f'(\hat{x})}{1!}(p-\hat{x})$$

και λύνοντας ως προς p έχουμε

$$p \approx \hat{x} - \frac{f(\hat{x})}{f'(\hat{x})}.$$

Το ακόλουθο σχήμα δείχνει μία γεωμετρική εικόνα της επαναληπτικής διαδικασίας την οποία ορίζει η μέθοδος.



Η επαναληπτική διαδικασία που ορίζεται από τα παραπάνω τερματίζεται στην πράξη όταν ικανοποιηθεί κάποιο κριτήριο διακοπής. Τα κριτήρια αυτά μπορεί να αφορούν κάποια **μέτρα του σφάλματος** ή έναν **μέγιστο αριθμό των επαναλήψεων** της διαδικασίας. Εφόσον συνήθως δεν γνωρίζουμε την ρίζα, όπως έχουμε αναφέρει, τα βασικά μέτρα σφάλματος βασίζονται στην **επακρίβεια,** δηλαδή την απόλυτη διαφορά δύο διαδοχικών επαναλήψεων, ή στο πόσο αποτυγχάνει η μέθοδος να ικανοποιήσει το ζητούμενο $f(x)=0$. Έτσι τέτοια κριτήρια τερματισμού της επαναληπτικής διαδικασίας είναι

$$|x_k - x_{k-1}| < tol, \qquad \frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} < tol\,(x_k \neq 0), \qquad |f(x_k)| < tol$$

όπου tol μία ανοχή η οποία καθορίζεται από αυτόν που λύνει το πρόβλημα. Για την επιτάχυνση της διαδικασίας μπορεί να συνδυαστούν και ένα από τα δύο πρώτα κριτήρια (συνήθως το δεύτερο) με το τρίτο.

Παράδειγμα: Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Newton για την εύρεση της ρίζας της εξίσωσης $f(x)=4x^2-3=0$ παίρνοντας ως αρχική τιμή $x_0=0.5$ και έχοντας ως κριτήριο διακοπής η επακρίβεια να είναι μικρότερη από την παράμετρο ανοχής $tol=10^{-4}$. Είναι φανερό ότι η ρίζα είναι η $\sqrt{3}/2=0.8660254\ldots$. Η επαναληπτική διαδικασία είναι η ακόλουθη:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{4x_k^2-3}{8x_k} = \frac{4x_k^2+3}{8x_k}.$$

Υπολογίζουμε $x_1 = \dfrac{4\cdot x_0^2+3}{8\cdot x_0} = \dfrac{4\cdot 0.5^2+3}{8\cdot 0.5} = 1$

Εφόσον $|x_1 - x_0| = |1-0.5| = 0.5 > tol = 0.0001$ η διαδικασία συνεχίζεται.

Υπολογίζουμε $x_2 = \dfrac{4\cdot x_1^2+3}{8\cdot x_1} = \dfrac{4\cdot 1^2+3}{8\cdot 1} = 0.875$

Εφόσον $|x_2 - x_1| = |0.875-1| = 0.125 > tol = 0.0001$ η διαδικασία συνεχίζεται.

Υπολογίζουμε $x_3 = \dfrac{4\cdot x_2^2+3}{8\cdot x_2} = \dfrac{4\cdot 0.875^2+3}{8\cdot 0.875} = 0.866071$

Εφόσον $|x_3 - x_2| = |0.866071-0.875| = 0.008928 > tol = 0.0001$ η διαδικασία συνεχίζεται.

Υπολογίζουμε $x_4 = \dfrac{4\cdot x_3^2+3}{8\cdot x_3} = \dfrac{4\cdot 0.866071^2+3}{8\cdot 0.866071} = 0.866025$

Εφόσον $|x_4 - x_3| = |0.866025-0.866071| = 0.000046 < tol = 0.0001$ η διαδικασία διακόπτεται. Η προσεγγιστική τιμή της ρίζας 0.866025 επιτεύχθηκε σε μόλις τέσσερις επαναλήψεις με βάση την παράμετρο ανοχής που έχουμε θεωρήσει. Την όλη διαδικασία μπορούμε να την δούμε πιο παραστατικά στο ακόλουθο πίνακα.

k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$	tol
0	0.5		0.0001
1	1	0.5	0.0001
2	0.875	0.125	0.0001
3	0.866071	0.008928	0.0001
4	0.866025	0.000046	0.0001

Ασκήσεις:

1. Να παραγωγισθούν οι συναρτήσεις:

(i) $f(x)=e^{\tan(x)}$, **(ii)** $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)$, **(iii)** $f(x)=(1+\sin(2x))^{-1/2}$

Λύση

i) $f(x)' =(\tan(x))' e^{\tan(x)} = \dfrac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}$

ii) $$f(x)' = \frac{1}{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)' = \frac{e^x+1}{e^x-1}\left(\frac{(e^x-1)'(e^x+1)-(e^x-1)(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}\right)$$
$$=\frac{e^x+1}{e^x-1}\left(\frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}\right)=-\frac{2e^x}{(e^x-1)(e^x+1)}.$$

iii) $$f(x)' =-\frac{1}{2}(1+\sin(2x))^{-\frac{1}{2}-1}(1+\sin(2x))' =$$
$$=-\frac{1}{2}(1+\sin(2x))^{-\frac{3}{2}}\cos(2x)(2x)' = -(1+\sin(2x))^{-\frac{3}{2}}\cos(2x).$$

2. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

α) $y=\sin\left(\sqrt{1+\cos(x)}\right)$ **β)** $y=(2-x-3x^3)(7+x^5)$

γ) $y=\dfrac{4x^2+1}{x^3-2}$ **.**

Λύση

α) $y'=\cos\left(\sqrt{1+\cos(x)}\right)\left(\sqrt{1+\cos(x)}\right)' =$

$$=\cos\left(\sqrt{1+\cos(x)}\right)\frac{(1+\cos(x))'}{2\sqrt{1+\cos(x)}}=-\frac{\sin(x)\cos\left(\sqrt{1+\cos(x)}\right)}{2\sqrt{1+\cos(x)}}$$

β) $y'=(2-x-3x^3)'(7+x^5)+(2-x-3x^3)(7+x^5)'=$

$=(-1-9x^2)(7+x^5)+5(2-x-3x^3)x^4 =$
$=-7-63x^2-x^5-9x^7+10x^4-5x^5-15x^7=-24x^7-6x^5+10x^4-63x^2-7$

γ) $$y'=\frac{(4x^2+1)'(x^3-2)-(4x^2+1)(x^3-2)'}{(x^3-2)^2}=\frac{8x(x^3-2)-3(4x^2+1)x^2}{(x^3-2)^2}=-\frac{4x^4+3x^2+16x}{(x^3-2)^2}.$$

3. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

α) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ **β)** $y=e^{\sin(x^3)}$

ΛΥΣΗ

α) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ Γράφω τη συνάρτηση ως:

$y=(x+(x+x^{1/2})^{1/2})^{1/2}$

$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,

$$\left((x+x^{1/2})^{1/2}\right)'=\frac{1}{2}(x+x^{1/2})^{-1/2}(x+x^{1/2})'=(x+x^{1/2})^{-1/2}(1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}\frac{(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$y'=\left((x+(x+x^{1/2})^{1/2})^{1/2}\right)'=\frac{1}{2}(x+(x+x^{1/2})^{1/2})^{-1/2}(x+(x+x^{1/2})^{1/2})'=$$

$$=\frac{1}{2}(x+(x+x^{1/2})^{1/2})^{-1/2}(1+\left((x+x^{1/2})^{1/2}\right)')=\frac{1}{2}\frac{\left(1+\frac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

β) $y=e^{\sin(x^3)}$ $y'=\left(e^{\sin(x^3)}\right)'=e^{\sin(x^3)}(\sin(x^3))'=e^{\sin(x^3)}\cos(x^3)(x^3)'=3x^2\cos(x^3)e^{\sin(x^3)}$

4. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

i) $y=\left(3\sqrt{x}+6\right)\left(2x^3-\frac{1}{x}\right)$ ii) $y=\frac{\left(x^2+1\right)\cos(x)}{3-x\tan(x)}$,

iii) $y=\cos^3\left(\frac{x}{x+1}\right)$ iv) $y=\ln\left(\cos^2(x)+1\right)$

Λύση

i) Αφού $y=\left(3\sqrt{x}+6\right)\left(2x^3-\frac{1}{x}\right)$**,** έχουμε:

$$\frac{dy}{dx}=\left(2x^3-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)+\left(3\sqrt{x}+6\right)\left(6x^2+\frac{1}{x^2}\right)=$$
$$=21x^{5/2}+\frac{3}{2x^{3/2}}+36x^2+6x^{-2}$$

ii) Παραγωγίζουμε την $y=\dfrac{\left(x^2+1\right)\cos(x)}{3-x\tan(x)}$ και απλοποιούμε όσο είναι δυνατόν:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(3-x\tan(x))\left[2x\cos(x)-\sin(x)\left(x^2+1\right)\right]+\cos(x)\left(x^2+1\right)\left[\tan(x)+\dfrac{x}{\cos^2(x)}\right]}{\left(3-x\tan(x)\right)^2}=$$
$$=\frac{6x\cos^2(x)-(2x^2+1)\sin(2x)+x(x^2+1)(\sin^2(x)+1)}{\left(3-x\tan(x)\right)^2\cos(x)}$$

Εναλλακτικά παραγωγίζουμε χρησιμοποιώντας την λογαριθμική παραγώγιση:

$$y=\frac{\left(x^2+1\right)\cos(x)}{3-x\tan(x)}\Leftrightarrow \ln(y)=\ln(x^2+1)+\ln(\cos(x))-\ln(3-x\tan(x))\Leftrightarrow$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}+\frac{\tan(x)+\dfrac{x}{\cos^2(x)}}{3-x\tan(x)}\Leftrightarrow \frac{y'}{y}=\frac{2x}{x^2+1}-\tan(x)+\frac{\sin(x)\cos(x)+x}{\cos^2(x)(3-x\tan(x))}\Leftrightarrow$$
$$y'=\frac{\left(x^2+1\right)\cos(x)}{3-x\tan(x)}\left(\frac{2x}{x^2+1}-\tan(x)+\frac{\sin(x)\cos(x)+x}{\cos^2(x)(3-x\tan(x))}\right)$$

Αυτή η έκφραση είναι ισοδύναμη με αυτήν που βρήκαμε παραπάνω διότι

$$\Leftrightarrow y'=\frac{2x\cos(x)}{(3-x\tan(x))}-\frac{\left(x^2+1\right)\sin(x)}{(3-x\tan(x))}+\frac{\left(x^2+1\right)\sin(x)\cos(x)+\left(x^2+1\right)x}{\cos(x)(3-x\tan(x))^2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y'=\frac{2x\cos^2(x)(3-x\tan(x))-\left(x^2+1\right)\sin(x)\cos(x)(3-x\tan(x))+\left(x^2+1\right)\sin(x)\cos(x)+\left(x^2+1\right)x}{\cos(x)(3-x\tan(x))^2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y'=\frac{6x\cos^2(x)-2x^2\sin(x)\cos(x)-3\left(x^2+1\right)\sin(x)\cos(x)+\left(x^2+1\right)x\sin^2(x)+\left(x^2+1\right)\sin(x)\cos(x)+\left(x^2+1\right)x}{\cos(x)(3-x\tan(x))^2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y'=\frac{6x\cos^2(x)-\left(2x^2+1\right)\sin(2x)+x\left(x^2+1\right)(\sin^2(x)+1)}{\cos(x)(3-x\tan(x))^2}$$

iii) Παραγωγίζοντας την $y=\cos^3\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ και απλοποιώντας έχουμε:

$$\frac{dy}{dx}=3\cos^2\left(\frac{x}{x+1}\right)\left(-\sin\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)\frac{(x+1)-x}{\left(x+1\right)^2}=\frac{-3}{\left(x+1\right)^2}\sin\left(\frac{x}{x+1}\right)\cos^2\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

iv) Παραγωγίζοντας την $y=\ln\left(\cos^2(x)+1\right)$ και απλοποιώντας βρίσκουμε:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2(x)+1}2\cos(x)\left(-\sin(x)\right)=\frac{-2\cos(x)\sin(x)}{\cos^2(x)+1}=\frac{-\sin(2x)}{\cos^2(x)+1}$$

5. Αν $x^2-y^2=1$ δείξτε ότι $y''=-1/y^3$ όπου $y'=dy/dx$ δηλώνει την παράγωγο της συνάρτησης *y(x)* ως προς x.

Λύση

$$x^2-y^2=1 \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2-y^2)=\frac{d}{dx}(1) \Leftrightarrow 2x\frac{d}{dx}\left(x\right)-2y\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(1)$$

$$\Leftrightarrow 2x-2y\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$$

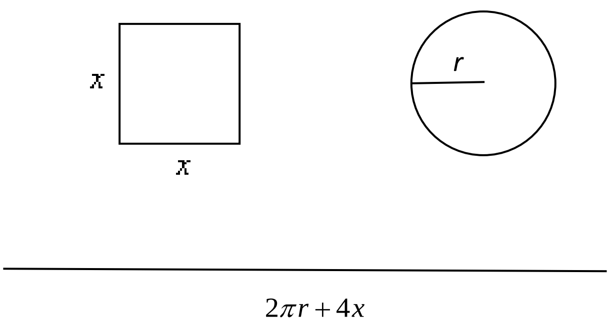
οπότε παραγωγίζοντας και πάλι ως προς x παίρνουμε

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dx}(x)y-x\frac{dy}{dx}}{y^2} \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y-x\frac{x}{y}}{y^2} \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y^2-x^2}{y^3} \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{x^2-y^2}{y^3} \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{y^3} \Leftrightarrow y''=-1/y^3$$

6. Σύρμα μήκους Λ πρόκειται να κοπεί σε δύο κομμάτια, έτσι ώστε το ένα να το λυγίσουμε και να σχηματίσουμε έναν κύκλο, το δε άλλο να σχηματίσουμε ένα τετράγωνο. Πως θα πρέπει να κόψουμε το σύρμα έτσι ώστε το άθροισμά των περικλειομένων περιοχών να έχει ελάχιστο εμβαδόν ; Πότε γίνεται αυτό το εμβαδόν μέγιστο;

Λύση Έστω η ακτίνα του κύκλου *r* και η πλευρά του τετραγώνου x.



Άρα το μήκος *Λ* θα είναι $\Lambda=2\pi r+4x$

Παραγωγίζοντας έχουμε $\frac{d\Lambda}{dr} = 2\pi + 4\frac{dx}{dr}$ και αφού $\frac{d\Lambda}{dr} = 0$ (Λ = σταθερό) .

Συμπεραίνουμε ότι $\frac{dx}{dr} = -\frac{\pi}{2}$

Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα των εμβαδών $A = \pi r^2 + x^2$

Παραγωγίζουμε και έχουμε $\frac{dA}{dr} = 2\pi r + 2x\frac{dx}{dr}$ και αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση έχουμε $\frac{dA}{dr} = \pi(2r - x)$.

Θέτοντας την παράγωγο ίση με μηδέν έχουμε $\frac{dA}{dr} = \pi(2r - x) = 0 \Leftrightarrow x = 2r$

Αντικαθιστώντας στην $\Lambda = 2\pi r + 4x$ έχουμε $\Lambda = 2\pi r + 8r$ οπότε $r = \frac{\Lambda}{2(\pi + 4)}$ ή $x = \frac{\Lambda}{\pi + 4}$.

Οπότε $\frac{dA}{dr} = 0$ όταν $x = \frac{\Lambda}{\pi + 4}$ και $r = \frac{\Lambda}{2(\pi + 4)}$.

Τώρα $\frac{d^2 A}{dr^2} = \pi(2 - \frac{dx}{dr}) = \pi(2 + \frac{\pi}{2}) > 0$.

Έπεται λοιπόν ότι η συνάρτησή μας έχει ελάχιστο για τις παραπάνω τιμές του x και r .

Για μέγιστο εμβαδόν $0 \le 2\pi r \le \Lambda$. Είναι φανερό ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης *A(r)* είναι $\left[0, \frac{\Lambda}{2\pi}\right]$.

Άρα το μέγιστο θα είναι σε ένα από τα δύο άκρα.

$r = 0$, $x = \frac{\Lambda}{4}$ *και* $A = \frac{1}{16}\Lambda^2$

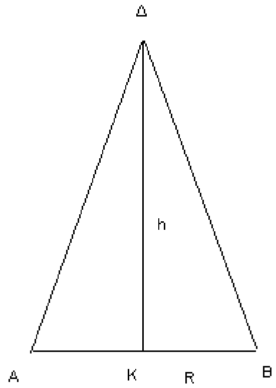
$r = \frac{\Lambda}{2\pi}$, $x = 0$ *και* $A = \frac{1}{4\pi}\Lambda^2$.

Επομένως η μέγιστη τιμή το εμβαδού επιτυγχάνεται όταν $r = \frac{\Lambda}{2\pi}$, $x = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το σύρμα δεν θα κοπεί καθόλου αλλά θα χρησιμοποιηθεί για το σχηματισμό ενός κύκλου.

7. Ένας κατασκευαστής κώνων με κομφετί, θέλει να γεμίσει κώνους με κυκλική βάση ακτίνας R και ύψος h, με μια ποσότητα κομφετί όγκου $V = \pi R^2 h / 3 = \pi / 3$ σε κάθε κώνο. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις R, h του κώνου ώστε να ελαχιστοποιείται η εξωτερική του επιφάνεια $S = \pi R\sqrt{h^2 + R^2}$, αν ο κώνος είναι ανοικτός (δηλαδή δεν υπολογίζουμε την κυκλική βάση);

Λύση

$S=\pi R\sqrt{h^2+R^2}$ και εμβαδόν βάσης $=\pi R^2$



Από τη σχέση

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h=\frac{\pi}{3}\Rightarrow R^2 h=1\Rightarrow R=\frac{1}{\sqrt{h}}$$

Αν ο κώνος είναι ανοιχτός, η συνάρτηση που δίνει το εμβαδό

της παράπλευρης επιφάνειας του κώνου είναι:

$$E(h)=\pi\frac{1}{\sqrt{h}}\sqrt{h^2+\frac{1}{h}}=\frac{\pi}{h}\sqrt{1+h^3}$$

Για να βρούμε την τιμή του h όπου η συνάρτηση αυτή έχει ακρότατο παίρνουμε την παράγωγό της και τη θέτουμε ίση με το μηδέν:

$$E'(h)=\pi\frac{\frac{3h^2}{2\sqrt{1+h^3}}h-\sqrt{1+h^3}}{h^2}=\pi\frac{3h^3-2(1+h^3)}{2h^2\sqrt{1+h^3}}=\pi\frac{h^3-2}{2h^2\sqrt{1+h^3}}=0 \quad\Leftrightarrow h^3=2\text{ ,}$$

από όπου αμέσως προκύπτει $h=(2)^{1/3}$ και $R=(h)^{-1/2}=(2)^{-1/6}$.

Το ότι το ακρότατο αυτό είναι τοπικό ελάχιστο διαπιστώνεται παίρνοντας τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης *E(h):*

$$E''(h)=\frac{\pi}{2}\frac{3h^2(h^2\sqrt{1+h^3})-(h^3-2)(h^2\sqrt{1+h^3})'}{h^4(1+h^3)}=\frac{\pi}{2}\frac{3h^4\sqrt{1+h^3}-(h^3-2)(2h\sqrt{1+h^3}+h^2\frac{3h^2}{2\sqrt{1+h^3}})}{h^4(1+h^3)}=$$

$$=\frac{\pi}{4}\frac{6h^4(1+h^3)-(h^3-2)(4h(1+h^3)+3h^4)}{h^4(1+h^3)^{3/2}}=\frac{\pi}{4}\frac{6h^4+6h^7-(h^3-2)(4h+7h^4)}{h^4(1+h^3)^{3/2}}=$$

$$=\frac{\pi}{4}\frac{6h^3+6h^6-(h^3-2)(4+7h^3)}{h^3(1+h^3)^{3/2}}=\frac{\pi}{4}\frac{6h^3+6h^6-4h^3+8-7h^6+14h^3}{h^3(1+h^3)^{3/2}}=\frac{\pi}{4h^3(1+h^3)^{3/2}}(16h^3+8-h^6)$$

και παρατηρώντας ότι είναι θετική για $h=(2)^{1/3}$

8. Υπολογίστε τις διαστάσεις τετραγωνικής ανοικτής πισίνας με πλευρά x και (σταθερό) βάθος y που έχει συνολικό όγκο 32 m^3, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος επένδυσης με πλακάκια του βυθού και των εσωτερικών τοιχωμάτων.

Λύση

Ο όγκος της πισίνας ισούται με $V=x^2y=32$ Οπότε $y=\frac{32}{x^2}$.

Η συνολική επιφάνεια ισούται με $S = x^2 + 4xy = x^2 + 4x\frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}$.

Για να βρούμε τα πιθανά ελάχιστο της συνάρτησης S, στο διάστημα $(0,+\infty)$όπου έχει νόημα το φυσικό πρόβλημα, παραγωγίζουμε και λύνουμε ως προς x

$S' = 2x - \frac{128}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x = 4$.

Η δεύτερη παράγωγος $S'' = 2 + \frac{256}{x^3}$ είναι θετική για $x = 4$, οπότε έχουμε ελάχιστο.

9. Ένα κλειστό κυλινδρικό δοχείο με κυκλική βάση έχει χωρητικότητα 64 cm^3. Βρείτε τις διαστάσεις του ώστε το ποσό του μετάλλου που χρειάζεται για τα τοιχώματά του να είναι ελάχιστο.

Λύση

Για να ελαχιστοποιήσουμε το ποσό του μετάλλου αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε την επιφάνεια του κυλινδρικού δοχείου.

Έστω r, h, V, E η ακτίνα της βάσης, το ύψος, ο όγκος και το εμβαδό της επιφάνειας του δοχείου αντίστοιχα.

Έχουμε:

$$V = \pi r^2 h \Leftrightarrow \pi r^2 h = 64 \Leftrightarrow h = \frac{64}{\pi r^2}$$

$$E = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r\frac{64}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{128}{r} + 2\pi r^2, r > 0$$

Το κρίσιμο σημείο της συνάρτησης του εμβαδού είναι:

$$E^{/}(r) = 0 \Leftrightarrow -\frac{128}{r^2} + 4\pi r = 0 \Leftrightarrow \frac{-128 + 4\pi r^3}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 4(\pi r^3 - 32) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$$

Θα εξετάσουμε τώρα, μελετώντας την παράγωγο 2^{ης} τάξης, αν το κρίσιμο σημείο που βρήκαμε είναι θέση ολικού ελαχίστου.

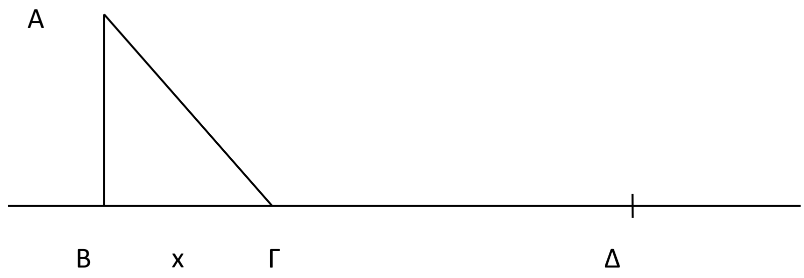
$$E^{//}(r) = (-128r^{-2})^{/} + (4\pi r)^{/} = 256r^{-3} + 4\pi > 0, \forall r > 0$$

Επομένως $r = 2\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ είναι θέση ολικού ελαχίστου. Για την τιμή αυτή της ακτίνας το ύψος είναι $h = 64\pi^{-1}r^{-2} = 64\pi^{-1}(\frac{32}{\pi})^{\frac{1}{3}}]^{-2} = 2.32\pi^{-1}.32^{-\frac{2}{3}}\pi^{\frac{2}{3}} = 2.32^{\frac{1}{3}}.\pi^{-\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{\frac{32}{\pi}} = 2r$.

10. Ένας άνδρας βρίσκεται σε μία βάρκα στη θάλασσα (σε ένα σημείο Α) η οποία απέχει 1 χλμ. από το πιο κοντινό σημείο Β μιας ευθύγραμμης ακτής. Σκοπός του είναι να φτάσει στο συντομότερο δυνατό χρόνο στο σημείο Δ της ακτής, το οποίο απέχει από το Β 3 χλμ. Σε ποιο σημείο της ακτής πρέπει να αποβιβαστεί αν κωπηλατεί με 2 χλμ/ώρα ενώ βαδίζει με 4 χλμ/ώρα ;

(Υποθέτουμε ότι η κίνηση τόσο στη θάλασσα όσο και στη στεριά είναι ευθύγραμμη ομαλή όπου ταχύτητα = διάστημα / χρόνος)

Λύση



Καταρχήν τόσο η τροχιά της βάρκας στη θάλασσα όσο και του πεζού στην ακτή πρέπει να είναι ευθεία ώστε να είναι η μικρότερη δυνατή. Έστω ότι αποβιβάζεται στο σημείο Γ της ακτής και $|\mathrm{B\Gamma}| = x$. Τότε έχουμε $|\mathrm{A\Gamma}| = \sqrt{1+x^2}$, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ αφού |AB|=1 από την υπόθεση Επομένως, $|\Gamma\Delta| = 3 - x$.

Ο χρόνος που χρειάζεται ο άνθρωπος για να καλύψει κωπηλατώντας την τροχιά ΑΓ είναι $T_{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2}$ ενώ για να περπατήσει την απόσταση ΓΔ $T_{\Gamma\Delta} = \frac{3-x}{4}$. Οπότε ο συνολικός απαιτούμενος χρόνος δίνεται από τη συνάρτηση $T(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{3-x}{4},\ 0 \le \mathrm{x} \le 3$.

Πρέπει να βρούμε την τιμή του *x* ώστε η συνάρτηση *T(x)* να γίνει ελάχιστη.

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο:

$$T'(x) = \frac{2x}{4\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{4} = \frac{2x - \sqrt{1+x^2}}{4\sqrt{1+x^2}},$$

Οι ρίζες της $T'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \sqrt{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0$ είναι πιθανά ακρότατα.

Η δευτεροβάθμια αυτή εξίσωση έχει ρίζες $x_1 = -\sqrt{3}/3$ και $x_2 = \sqrt{3}/3$. Από τις οποίες γίνεται αποδεκτή η θετική x_2 (αφού εκφράζει μήκος).

Η δεύτερη παράγωγος της είναι :

$$T''(x)=\left(\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{4}\right)'=\frac{1}{2}\frac{x'\sqrt{1+x^2}-x\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}{(1+x^2)}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x^2}-x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)}=\frac{1}{2}\frac{\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)}=\frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{1+x^2}},\ 0\le x\le 3,$$

και εφόσον $T''(\sqrt{3}/3)=3\sqrt{3}/16>0$ η τιμή $\sqrt{3}/3$ αποτελεί τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης του χρόνου.

Για να δούμε αν το σημείο αυτό είναι ολικό ελάχιστο, θα πρέπει να ελέγξουμε και τις τιμές της T(x) στα άκρα του πεδίου ορισμού της. Πράγματι, και οι δύο τιμές T(0)=1.25, T(3)=1.581 είναι μεγαλύτερες από το $T(\sqrt{3}/3)\cong 1.183$, άρα στο $x_2=\sqrt{3}/3$ η υπό μελέτη συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Επομένως ο κωπηλάτης πρέπει να αποβιβαστεί στο σημείο Γ σε απόσταση $|\mathrm{B\Gamma}|=\sqrt{3}/3\approx 0.5774km$.

11. Ένα ορθογώνιο φύλλο χαρτιού που χρησιμοποιείται για την κατασκευή αφίσας έχει εμβαδόν 180 cm^2. Τα περιθώριά του πάνω και του κάτω μέρους του χαρτιού είναι 7.5 cm ενώ τα πλευρικά περιθώρια 5 cm. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του χαρτιού ώστε η τυπωμένη επιφάνεια είναι μέγιστη ;

Λύση

Έστω x το μήκος της αφίσας και y το ύψος του σε *cm*. Τότε θα ισχύει ότι $xy=180$, άρα $y=180/x$. Αν λάβουμε υπόψη μας τα περιθώρια που δίνονται στην εκφώνηση, η τυπωμένη επιφάνεια θα έχει αντίστοιχες διαστάσεις :

Μήκος = $x-(5+5)=x-10$,

Ύψος = $\frac{180}{x}-(7.5+7.5)=\frac{180}{x}-15$

Ζητάμε την μεγιστοποίηση της τυπωμένης επιφάνειας, άρα της συνάρτησης :

$$f(x)=(x-10)(\frac{180}{x}-15)=180-15x-\frac{1800}{x}+150=330-15x-\frac{1800}{x},\ x\in(0,+\infty).$$

Η παράγωγός της είναι :

$$f'(x)=\left(330-15x-\frac{1800}{x}\right)'=-15+\frac{1800}{x^2}$$

η οποία μηδενίζεται όταν

$$-15+\frac{1800}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2=\frac{1800}{15}\Leftrightarrow x^2=120\Leftrightarrow x=\sqrt{120},$$

αφού το x είναι σε κάθε περίπτωση θετικό ως μήκος.

Για $x<\sqrt{120}$, η $f'(x)$ γίνεται θετική και η συνάρτηση $f(x)$ αύξουσα, ενώ για $x>\sqrt{120}$, έχουμε $f'(x)<0$ και την $f(x)$ φθίνουσα. Συνεπώς, στην θέση αυτή η *f(x)* παρουσιάζει ολικό μέγιστο. Έτσι οι ζητούμενες διαστάσεις του χαρτιού είναι :

Μήκος = x = $\sqrt{120}$,

Ύψος = y = 180/$\sqrt{120}$

12. Ένα εργοστάσιο μπορεί να κατασκευάσει x εκατοντάδες λάστιχα τύπου Α και y εκατοντάδες λάστιχα τύπου Β την ημέρα όπου $0\le x\le 4$ και $y=\dfrac{40-10x}{5-x}$. Το κέρδος ανά λάστιχο τύπου Α είναι διπλάσιο από το κέρδος ανά λάστιχο τύπου Β. Ποιος είναι ο ιδανικός αριθμός παραγωγής *(x,y)* ώστε να μεγιστοποιείται το συνολικό κέρδος;

Λύση

Εάν το κέρδος ανά λάστιχο τύπου Β είναι p, τότε το κέρδος ανά λάστιχο τύπου Α είναι $2p$ και η συνάρτηση κέρδους γίνεται:

$$P(x)=2px+py=2px+p\frac{40-10x}{5-x}=p\frac{10x-2x^2+40-10x}{5-x}=2p\frac{20-x^2}{5-x}$$

Τα πιθανά ακρότατα μηδενίζουν την παράγωγο ή είναι σημεία στα οποία δεν ορίζεται η παράγωγος ή είναι άκρα του διαστήματος.

Όμως, $\mathrm{P}'(\mathrm{x})=2p\dfrac{-2x\left(5-x\right)+(20-x^2)}{\left(5-x\right)^2}=2p\dfrac{x^2-10x+20}{\left(5-x\right)^2}=2p\dfrac{\left(x-5+\sqrt{5}\right)\left(x-5-\sqrt{5}\right)}{\left(5-x\right)^2}$ οπότε

πιθανά ακρότατα είναι τα σημεία είναι τα $5-\sqrt{5},\ 5+\sqrt{5}$.

Αφού $0\le x\le 4$ το μόνο σημείο που μας ενδιαφέρει είναι το $5-\sqrt{5}$. Παρατηρούμε ότι η παράγωγος είναι θετική για $0<x<5-\sqrt{5}$ (οπότε και η συνάρτηση κόστους είναι αύξουσα) και αρνητική (οπότε και η συνάρτηση κόστους είναι φθίνουσα) για $5-\sqrt{5}<x<4$ Άρα, στο σημείο $x=5-\sqrt{5}$ έχουμε τοπικό μέγιστο με $P(5-\sqrt{5})=4p\ (5-\sqrt{5})\ \approx 11.0557p$

Στα άκρα του διαστήματος έχουμε: $P(0)=8p$ και $P(4)=8p$.

Συμπεραίνουμε έτσι ότι το σημείο $\left(5-\sqrt{5}, 4p\ (5-\sqrt{5})\right)$ είναι ολικό μέγιστο και η ζητούμενη λύση είναι *x=2.76* και *y=5.53* εκατοντάδες λάστιχα.

13. Χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα των εμπλεκόμενων συναρτήσεων σε σειρές Maclaurin υπολογίστε τα όρια:

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}$ **(ii)** $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}$

Λύση:

(ι) Το ανάπτυγμα Maclaurin του αριθμητή είναι:

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - ...$$

και άρα το όριο γίνεται

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(x^2 - \frac{x^6}{3!} + ..) = 1$$

(ιι) Το ανάπτυγμα Maclaurin του αριθμητή και του παρονομαστή είναι:

$$e^x - e^{-x} = 2x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} + \cdots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots$$

και το όριο γίνεται

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} + \cdots}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots} = 2$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα αποκτάται διαιρώντας αριθμητή και παρανομαστή με x, και αντικαθιστώντας όπου x το 0.

14. Να υπολογισθεί το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ $\mu\varepsilon$ $f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ αφού να αναπτυχθεί η $f(x)$ σε σειρά Taylor γύρω απο το x = 0.

Λύση

Η ανάπτυξη κατά Taylor χρησιμοποιούμε την σειρά Taylor της εκθετικής

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, οπότε $e^x - 1 - x = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)!}$ και διαιρώντας έχουμε

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)!}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)!}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)!}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + ...\right) = \frac{1}{2}$$

15. Αναπτύσσοντας κατάλληλα τις εμπλεκόμενες συναρτήσεις σε σειρές Taylor, υπολογίστε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^2\cdot\ln(1+\frac{1}{x})\right)$.

Λύση

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^2\cdot\ln(1+\frac{1}{x})\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^2\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\frac{1}{x})^{n+1}}{n+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)x^{n-1}}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{3x}-\frac{1}{4x^2}+...)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3x}+\frac{1}{4x^2}+...\right)=\frac{1}{2}-0+0+...=\frac{1}{2}$$

16 Υποθέτουμε ότι ο πληθυσμός ενός είδους τη χρονική στιγμή t δίνεται από την τιμή μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης π(t). Γνωρίζουμε ότι:

- Την χρονική στιγμή που αρχίζουμε να μελετάμε την εξέλιξή του ο πληθυσμός είναι ίσος με $π_0$ και
- Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού ανά πληθυσμιακή μονάδα, δηλαδή το πηλίκο $\frac{\pi'(t)}{\pi(t)}$**,** είναι σταθερός και ίσος με -1/3.

Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω, η εξέλιξη του πληθυσμού στο χρόνο περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση :

$$\pi'(t)=-\frac{1}{3}\pi(t),\qquad \pi(t_0)=\pi_0\,,$$

(α) Δείξτε ότι η λύση της εξίσωσης αυτής είναι μία εκθετική συνάρτηση της μορφής $\pi(t)=c\cdot e^{-\frac{1}{3}t}$, όπου c σταθερά που εξαρτάται από την αρχική συνθήκη του προβλήματος (προσδιορίστε την εξάρτηση αυτή).

(β) Αν δίνεται ότι την χρονική στιγμή $t_0=0$ ο πληθυσμός είχε την τιμή $π(t_0)=10$, δώστε μια προσέγγιση ακρίβειας 3 δεκαδικών ψηφίων για την τιμή του πληθυσμού την χρονική στιγμή t = 6.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης σε σειρά Taylor, καθώς επίσης και το γεγονός ότι: Αν προσεγγίζουμε μία συνάρτηση από το μερικό άθροισμα $\sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n$, μίας εναλλάσσουσας σειράς, δηλαδή σειράς με μορφή $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n\ ,\ a_n>0$**,** τότε το σφάλμα της προσέγγισης δεν υπερβαίνει (κατ' απόλυτη τιμή) τον πρώτο όρο που αγνοούμε, δηλαδή τον όρο a_{k+1}.

Λύση

(α) Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση $\pi(t) = c \cdot e^{-\frac{1}{3}t}$ στην αρχική εξίσωση εύκολα διαπιστώνουμε ότι την επαληθεύει:

$$\pi'(t) = \left(c \cdot e^{-\frac{1}{3}t} \right)' = c \cdot (\frac{-1}{3}) \cdot e^{-\frac{1}{3}t} = \frac{-1}{3} \cdot \left(c \cdot e^{-\frac{1}{3}t} \right) = \frac{-1}{3} \cdot \pi(t)$$

Για να επαληθεύσουμε τώρα την αρχική συνθήκη $\pi(\mathrm{t}_0) = \pi_0$ πρέπει

$$c \cdot e^{-\frac{1}{3}t_0} = \pi_0 \Leftrightarrow c = \pi_0 \cdot e^{\frac{1}{3}t_0}$$

(β) Ισχύει ότι π(0)=10. Επομένως, $c = 10 \cdot e^0 = 10$ και η συνάρτηση που περιγράφει την εξέλιξη του πληθυσμού είναι $\pi(t) = 10 \cdot e^{-\frac{1}{3}t}$. Την χρονική στιγμή t=6 θα έχουμε

$$\pi(6) = 10 \cdot e^{-\frac{6}{3}} = 10 \cdot e^{-2}.$$

Αρκεί επομένως να προσδιορίσουμε την τιμή του e^{-2} με ακρίβεια των 4 δεκαδικών ψηφίων.

Από το ανάπτυγμα της εκθετικής σε σειρά Taylor κέντρου 0 έχουμε:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}.$$

Σύμφωνα με την υπόδειξη αν κρατήσουμε n-όρους σε αυτό το ανάπτυγμα θα έχουμε σφάλμα κατ' απόλυτη τιμή μικρότερο του $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$. Αν λοιπόν θέλουμε ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων θα πρέπει $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-4}$ το οποίο επιτυγχάνεται για n≥10.

Κρατώντας έτσι 10 όρους έχουμε:

$$1 - \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} - \frac{2^7}{7!} + \frac{2^8}{8!} - \frac{2^9}{9!} + \frac{2^{10}}{10!} = 0.1353791$$

έχοντας πράγματι προσεγγίσει το e^{-2} με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων αφού $e^{-2} \cong 0.1353352$.

Επομένως η ζητούμενη τιμή είναι $\pi(6) = 10 \cdot e^{-2} = 1.353$ με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

17. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης μίας πραγματικής μεταβλητής της οποίας ο τύπος δίνεται από το ακόλουθο γινόμενο πινάκων:

$$f(x)=\begin{bmatrix} x & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Λύση

$$f(x)=\begin{bmatrix} x & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2x+4 \\ x+2 \\ 12 \end{bmatrix}=2x^2+4x+4x+8+12=2x^2+8x+20$$

Για να βρω τα κρίσιμα σημεία λύνω την εξίσωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x+8=0 \Leftrightarrow x=-2$.
Για να χαρακτηρίσω το συγκεκριμένο ακρότατο υπολογίζω $f'(-2)=4>0$ οπότε συμπεραίνω ότι το $x=-2$ είναι ελάχιστο με $f(-2)=12$.

17. Για τον ακόλουθο πίνακα τιμών μίας συνάρτησης, χρησιμοποιείστε τον κατάλληλο τύπο προς τα εμπρός, προς τα πίσω και τριών σημείων για να υπολογίσετε προσεγγίσεις της παραγώγου της συνάρτησης στα σημεία αυτά.

i	0	1	2	3
x_i	1.1	1.2	1.3	1.4
f_i	9.0250	11.0232	13.4637	19.4446

Λύση

Για το $x=1.1$ προσέγγιση της τιμής της παραγώγου με τον τύπο της προς τα εμπρός είναι

$$f'(1.1)\approx\frac{f(1.2)-f(1.1)}{0.1}=\frac{11.0232-9.0250}{0.1}=19.9820$$

Για το $x=1.2$ με αντίστοιχο τύπο τριών σημείων έχουμε

$$f'(1.2)\approx\frac{f(1.3)-f(1.1)}{2\cdot 0.1}=\frac{13.4637-9.0250}{0.2}=22.1936$$

Για το $x=1.3$ με αντίστοιχο τύπο τριών σημείων έχουμε

$$f'(1.3)\approx\frac{f(1.4)-f(1.2)}{2\cdot 0.1}=\frac{19.4446-11.0232}{0.2}=27.1073$$

Για το $x=1.4$ προσέγγιση της τιμής της παραγώγου με τον τύπο της προς τα πίσω είναι

$$f'(1.4)\approx\frac{f(1.4)-f(1.3)}{0.1}=\frac{19.4446-13.4637}{0.1}=59.8090.$$

17. Λύστε την εξίσωση

$$x - 0.8 - 0.2sin(x) = 0$$

με τη μέθοδο Newton. Χρησιμοποιήστε $x_0 = 0$ και διακόψετε τη διαδικασία όταν $|x_{k+1} - x_k| < tol$ όπου $tol = 10^{-3}$.

Λύση

Θεωρούμε $f(x) = x - 0.8 - 0.2sin(x) = 0$ οπότε $f'(x) = 1 - 0.2cos(x)$ και

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k - 0.8 - 0.2sin(x_k)}{1 - 0.2cos(x_k)}.$$

Υπολογίζουμε $x_1 = x_0 - \frac{x_0 - 0.8 - 0.2sin(x_0)}{1 - 0.2cos(x_0)} = 0 - \frac{-0.8}{1 - 0.2} = 1$

Εφόσον $|x_1 - x_0| = |1 - 0| = 1 > tol = 0.001$ η διαδικασία συνεχίζεται.

Υπολογίζουμε $x_2 = x_1 - \frac{x_1 - 0.8 - 0.2sin(x_1)}{1 - 0.2cos(x_1)} = 1 - \frac{1 - 0.8 - 0.2sin(1)}{1 - 0.2cos(1)} = 0.9645$

Εφόσον $|x_2 - x_1| = |0.9645 - 1| = 0.0355 > tol = 0.001$ η διαδικασία συνεχίζεται.

Υπολογίζουμε $x_3 = x_2 - \frac{x_2 - 0.8 - 0.2sin(x_2)}{1 - 0.2cos(x_2)} = 0.9645 - \frac{0.9645 - 0.8 - 0.2sin(0.9645)}{1 - 0.2cos(0.9645)} = 0.9643$

Εφόσον $|x_3 - x_2| = |0.9643 - 0.9645| = 0.0002 < tol = 0.001$ η διαδικασία διακόπτεται.

Οπότε η προσεγγιστική τιμή της ρίζας σε αυτό το διάστημα είναι η $x_3 = 0.9643$. Την όλη διαδικασία μπορούμε να την δούμε πιο παραστατικά στο ακόλουθο πίνακα.

k	x_k	$\|x_k - x_{k-1}\|$	tol
0	0		0.001
1	1	1	0.001
2	0.9645	0.0355	0.001
3	0.9643	0.0002	0.001