

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

$$\int f'(x) dx = f(x) + c$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
2. $\int af(x) dx = a \int f(x) dx$
3. $\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$ (Παραγοντική Ολοκλήρωση)

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση (αλλαγή μεταβλητής)

Όταν το ολοκλήρωμα περιέχει μία σύνθετη συνάρτηση, δηλαδή είναι της μορφής $\int f(g(x)) dx$

1. Θέτουμε $g(x) = u(x)$
2. Υπολογίζουμε το νέο διαφορικό για το οποίο ισχύει $u' = g'(x) \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = g'(x) \Leftrightarrow du = g'(x) dx$
3. Αντικαθιστούμε u, du στο ολοκλήρωμα και λύνουμε
4. Στο τελικό αποτέλεσμα αντικαθιστούμε όπου u με την ποσότητα x που αντιστοιχεί.

Παράδειγμα 1

$$I_2 = \int xe^{x^2} dx$$

$$\text{Θέτω } u(x) = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2x dx$$

Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$I = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = I = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

Παράδειγμα 2

$$I_2 = \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

Εδώ έχουμε μια ιδιόμορφη ρητή συνάρτηση με παρονομαστή που δεν παραγοντοποιείται περαιτέρω γιατί έχει μιγαδικές ρίζες. Ένα συχνό λάθος είναι η αντικατάσταση $u = 1 + x^2$.

$$\text{Η ΣΩΣΤΗ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ: } x = \tan u \quad (1)$$

Οπότε

$$x' = \frac{1}{\cos^2 u} \Rightarrow \frac{dx}{du} = \frac{1}{\cos^2 u} \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos^2 u} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow I = \int \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}} \cdot \frac{du}{\cos^2 u} = \int \frac{1}{\frac{\cos^2 u + \sin^2 u}{\cos^2 u}} \cdot \frac{du}{\cos^2 u} = \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 u}} \cdot \frac{du}{\cos^2 u} =$$

$$\int du = \arctan(x) + C$$

Η συνάρτηση τόξο-εφαπτομένης του x , $\arctan(x)$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της εφαπτομένης στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Ομοίως υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

με την αντικατάσταση
 $x = \sin x$

Παραγοντική Ολοκλήρωση

Από τις ιδιότητες των παραγώγων θυμόμαστε ότι

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x)$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση έχουμε τον τύπο της παραγοντικής ολοκλήρωσης:

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Παραγοντική Ολοκλήρωση χρησιμοποιούμε όταν η μία από τις δύο συναρτήσεις είναι εκθετική ή τριγωνομετρική (ημίτονο ή συνημίτονο) ή πολυωνυμική. Τότε αυτή την συνάρτηση την γράφουμε ως παράγωγο άλλης συναρτησης και εφαρμόζουμε τον τύπο όσες φορές χρειαστεί για να επιλυθεί το ολοκλήρωμα

Παράδειγμα 3

$$\begin{aligned} I_3 &= \int x^2 \sin(2x) dx = \int x^2 \left[-\frac{1}{2} \cos(2x)\right]' dx = \\ &= -\frac{1}{2}x^2 \cos(2x) + \frac{1}{2} \int (x^2)' \cos(2x) dx = -\frac{1}{2}x^2 \cos(2x) + \frac{1}{2} \int 2x \cos(2x) dx = \\ &= -\frac{1}{2}x^2 \cos(2x) + \int x \cos(2x) dx \end{aligned}$$

Επαναλαμβάνοντας άλλη μία φορά την παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε:

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{1}{2}x^2 \cos(2x) + \int x \left[\frac{1}{2} \sin(2x)\right]' dx = \\ &= -\frac{1}{2}x^2 \cos(2x) + \frac{1}{2}x \sin(2x) - \frac{1}{2} \int x' \sin(2x) dx = \\ &= -\frac{1}{2}x^2 \cos(2x) + \frac{1}{2}x \sin(2x) - \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx = \\ &= -\frac{1}{2}x^2 \cos(2x) + \frac{1}{2}x \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + C \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4

$$\begin{aligned} I_4 &= \int x (\lg x)^2 dx = \int x (\ln x)^2 dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' (\ln x)^2 dx = \\ &= \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \int \frac{x^2}{2} \left[(\ln x)^2\right]' dx = \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \int \frac{x^2}{2} \left[2(\ln x) \frac{1}{x}\right] dx = \\ &= \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \int x (\ln x) dx = \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' (\ln x) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \frac{x^2}{2} (\ln x) + \int \left(\frac{x^2}{2}\right) (\ln x)' dx = \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \frac{x^2}{2} (\ln x) + \int \left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \frac{x^2}{2} (\ln x) + \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \frac{x^2}{2} (\ln x) + \frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Όταν έχουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int \frac{n(x)}{d(x)} dx$ όπου n, d είναι πολυώνυμα με τον βαθμό του $d(x)$ να είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του $n(x)$ έχουμε δύο περιπτώσεις

- $d'(x) = n(x) \Rightarrow \int \frac{n(x)}{d(x)} dx = \int \frac{d'(x)}{d(x)} dx = \ln |d(x)| + C$. Παράδειγμα 5

$$I_5 = \int \frac{2x+3}{x^2+3x+7} dx = \int \frac{(x^2+3x+7)'}{x^2+3x+7} dx = \ln |x^2 + 3x + 7| + C$$

- $d'(x) \neq n(x)$ Στην περίπτωση αυτή προσπαθούμε να αναλύσουμε τον παρονομαστή σε παράγοντες και να “σπάσουμε” την ρητή συνάρτηση σε απλούστερα κλάσματα Παράδειγμα 6

$$I_6 = \int \frac{2x+1}{x^2+x+2} dx = \int \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} dx$$

Αναζητούμε απλούστερες συναρτήσεις με παρονομαστές $(x+2)$ και $(x-1)$.

Έτσι γράφουμε:

$$\frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{(A+B)x+(-A+2B)}{(x+2)(x-1)} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A+B=2 \\ -A+2B=1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} A=1 \\ B=1 \end{array} \right\}$$

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I_6 = \int \frac{1}{x+2} dx + \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x+2| + \ln|x-1| + C$$

Ιδιαίτερη προσοχή θέλει όταν ένας παράγοντας είναι δευτέρου βαθμού και δεν αναλύεται περισσότερο (όταν έχει δηλαδή μιγαδικές ρίζες) ή αν κάποιος παράγοντας είναι υψωμένος σε κάποια δύναμη (έχει πολλαπλότητα). Ο αριθμητής πρέπει να είναι κατά σε βαθμό μία μονάδα μικρότερος από τον παρονομαστή

Παράδειγμα 7

$$I_7 = \int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)} dx$$

Τότε το κλάσμα αναλύεται ως εξής:

$$\frac{x-1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{x-1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{K}{x-1} + \frac{Bx}{x^2+1} + \frac{C}{x^2+1}$$

διαλέγουμε έναν από τους δύο τρόπους και συνεχίζουμε όπως παραπάνω για την επίλυση του ολοκληρώματος Παράδειγμα 8

$$I_8 = \int \frac{x^2+3x+3}{(x-2)^2(x+1)} dx$$

Τότε το κλάσμα αναλύεται ως εξής:

$$\frac{x^2+3x+3}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+1}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{x^2+3x+3}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{Kx}{(x-2)^2} + \frac{\Lambda}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

διαλέγουμε έναν από τους δύο τρόπους και συνεχίζουμε κατά τα γνωστά!