Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα

Ορισμός: Έστω $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Ένα διάνυσμα $\underline{u} \in \mathbf{R}^n$ λέγεται ιδιοδιάνυσμα του A αν υπάρχει αριθμός $\lambda \in \mathbf{R}$ τέτοιος ώστε $A\underline{u} = \lambda\underline{u}$. Αν $\underline{u} \neq \underline{0}$ τότε ο λ είναι μοναδικά προσδιορισμένος και λέγεται ιδιοτιμή του A που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα $\underline{u}$. Πολλές φορές λέμε ότι το $\underline{u}$ είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Από τον ορισμό για να είναι ένα διάνυσμα $\underline{u} \neq \underline{0}$ ιδιοδιάνυσμα θα πρέπει να πληρείται η σχέση

$$A\underline{u} = \lambda\underline{u} \qquad (1)$$

ή ισοδύναμα

$$A\underline{u} - \lambda\underline{u} = \underline{0} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\underline{u} = \underline{0} \Leftrightarrow$$

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad (2)$$

Η συνάρτηση $|A - \lambda I|$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n και καλείται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα

(Αν ο $A - \lambda I$ είναι αντιστρέψιμος τότε εύκολα συνεπάγεται ότι $\underline{u} = \underline{0}$)

Παράδειγμα 1. Έστω ο διαγώνιος πίνακας

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

με $a_{11} \neq a_{22} \neq a_{33} \neq a_{11}$

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα υπολογίζουμε τις λύσεις της εξίσωσης (2)

$$|D - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= a_{11} \\ \lambda_2 &= a_{22} \\ \lambda_3 &= a_{33} \end{aligned}\right\}$$

Για την πρώτη ιδιοτιμή λύνουμε την εξίσωση $D\underline{u} = \lambda_1 \underline{u}$ για να βρούμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

$$D\underline{u} = \lambda_1 \underline{u} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{22}y_1 \\ a_{33}z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{11}y_1 \\ a_{11}z_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ομοίως βρίσκουμε

$$\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι τα ιδιοδιανύσματα για κάθε ιδιοτιμή δεν είναι μοναδικά αλλά οικογένειες διανυσμάτων. Συνήθως επιλέγουμε έναν εκπρόσωπο από κάθε οικογένεια. Π.χ. λέγεται συχνά ότι το $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην $1^η$ ιδιοτιμή, εννοώντας όλη την οικογένεια $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$

Παρατηρούμε επίσης ότι στους διαγώνιους πίνακες οι ιδιοτιμές είναι τα στοιχεία της διαγωνίου. Το ίδιο συμβαίνει και στους τριγωνικούς πίνακες. Ο υπολογισμός ιδιοτιμών στους υπόλοιπους πίνακες ακολουθεί την ίδια διαδικασία.

Παράδειγμα 2

Έστω $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\left| A - \lambda I \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 2)^2 (\lambda + 2) = 0$$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε μία διπλή ιδιοτιμή την $\lambda_1 = 2$ και μία απλή την $\lambda_2 = -2$

Για τα ιδιοδιανύσματα έχουμε

Για την διπλή ιδιοτιμή:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2u_3 \\ 2u_2 \\ 2u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_1 \\ 2u_2 \\ 2u_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u_1 = u_3 \Rightarrow \underline{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

έχουμε δηλαδή έναν ιδιοχώρο διάστασης 2

Για την απλή ιδιοτιμή:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2u_3 \\ 2u_2 \\ 2u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2u_1 \\ -2u_2 \\ -2u_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} u_1 = -u_3 \\ u_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{u} = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Διαγωνίσιμοι πίνακες

Αν ένας πίνακας $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ έχει n ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν πίνακα που θα έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A $S = \begin{bmatrix} \underline{u}_1 & \underline{u}_2 & \cdots & \underline{u}_n \end{bmatrix}$. Τότε θα έχουμε

$$AS = A\begin{bmatrix} \underline{u}_1 & \underline{u}_2 & \cdots & \underline{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\underline{u}_1 & A\underline{u}_2 & \cdots & A\underline{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\underline{u}_1 & \lambda_2\underline{u}_2 & \cdots & \lambda_n\underline{u}_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{u}_1 & \underline{u}_2 & \cdots & \underline{u}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{u}_1 & \underline{u}_2 & \cdots & \underline{u}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{u}_1 & \underline{u}_2 & \cdots & \underline{u}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = S \cdot \Lambda$$

όπου Λ είναι διαγώνιος πίνακας με την διαγώνιό του να αποτελείται από τις ιδιοτιμές του A.

Ο πίνακας $S=\left[\underline{u}_1 \quad \underline{u}_2 \quad \cdots \quad \underline{u}_n\right]$ είναι αντιστρέψιμος αφού υποθέσαμε ότι τα ιδιοδιανύσμα είναι ανεξάρτητα και επομένως μπορούμε να καταλήξουμε στη σχέση:

$S^{-1}AS=\Lambda$

Ο Λ καλείται διαγώνια μορφή του A.

Παρατηρήσεις

1. Προϋπόθεση για την διαγωνοποίηση είναι η ύπαρξη n ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων.
2. Διαφορετικές ιδιοτιμές παράγουν ανεξάρτητα διανύσματα (Το αντίστροφο δεν ισχύει).
3. Αν ένας πίνακας δεν έχει πολλαπλές ιδιοτιμές τότε διαγωνοποιείται (Το αντίστροφο δεν ισχύει).
4. Ο πίνακας διαγωνοποίησης S δεν είναι μοναδικός. (Αν υπάρχουν είναι άπειροι!)

Η 3η παρατήρηση είναι άμεσο συμπέρασμα της 2ης. Για την απόδειξη της 2ης ας υποθέσουμε ότι δύο διαφορετικές ιδιοτιμές λ_1,λ_2 παράγουν τα $\underline{u}_1,\underline{u}_2$ ιδιοδιανύσματα αντίστοιχα. Αν τα $\underline{u}_1,\underline{u}_2$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε θα υπάρχουν $\left(k_1,k_2\right)\neq\left(0,0\right)$ ώστε

$$k_1\underline{u}_1+k_2\underline{u}_2=\underline{0}$$
$$\Rightarrow A\left(k_1\underline{u}_1+k_2\underline{u}_2\right)=\underline{0}\Rightarrow k_1A\underline{u}_1+k_2A\underline{u}_2=k_1\lambda_1\underline{u}_1+k_2\lambda_2\underline{u}_2=0$$
$$\Rightarrow \lambda_1k_1\underline{u}_1+\lambda_2k_2\underline{u}_2=0\Rightarrow \lambda_1\left(-k_2\underline{u}_2\right)+\lambda_2k_2\underline{u}_2=0\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2$$

που είναι Άτοπο.