

Ορίζουσες

Η Ορίζουσα ενός τετραγωνικού $n \times n$ πίνακα A (συμβολίζεται $\det(A)$ ή $|A|$) είναι ένας μοναδικός αριθμός που έχει τις παρακάτω ιδιότητες

✦ Αν ο πίνακας A έχει δύο γραμμές ή στήλες ίσες ή ανάλογες, έχει ορίζουσα ίση με 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 2 & y \\ 3 & 3 & z \end{vmatrix} = 0$$

✦ Αν ένας $n \times n$ πίνακας έχει μία στήλη ή μία γραμμή που αποτελείται μόνο από μηδενικά στοιχεία, έχει ορίζουσα ίση με 0.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = 0$$

✦ Ένας τριγωνικός πίνακας έχει ορίζουσα ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.

$$\begin{vmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

✦ Αν οι γραμμές ή οι στήλες ενός $n \times n$ πίνακα A δεν είναι όλες γραμμικά ανεξάρτητες τότε έχει ορίζουσα 0. **Τότε ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος.** Ισχύει και το αντίστροφο.

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & (ax_{11} + bx_{12}) \\ x_{21} & x_{22} & (ax_{21} + bx_{22}) \\ x_{31} & x_{32} & (ax_{31} + bx_{32}) \end{vmatrix} = 0$$

✦ Αν σε έναν $n \times n$ πίνακα εφαρμόσουμε στοιχειώδεις πράξεις γραμμών ή στηλών (εκτός από εναλλαγές) ο πίνακας που προκύπτει έχει την ίδια ορίζουσα με τον αρχικό.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$$

✦ Αν εναλλάξουμε δύο διαδοχικές γραμμές ή στήλες ενός $n \times n$ πίνακα, ο πίνακας που προκύπτει έχει την αντίθετη ορίζουσα από τον αρχικό.

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_{12} & x_{11} & x_{13} \\ x_{22} & x_{21} & x_{23} \\ x_{32} & x_{31} & x_{33} \end{vmatrix}$$

✦ Η ορίζουσα του γινομένου δύο πινάκων $n \times n$ ισούται με το γινόμενο των επιμέρους οριζουσών

$$|AB| = |A||B|$$

✦ Η ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα ισούται με την ορίζουσα του αναστρόφου του.

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix}$$

✦ Δύο όμοιοι πίνακες έχουν ίδια ορίζουσα.

Ορίζουσα πίνακα 2×2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Ορίζουσα πίνακα $n \times n$, $n > 2$

Ας θεωρήσουμε έναν πίνακα $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

για κάθε στοιχείο a_{ij} του πίνακα υπάρχει ένας αριθμός A_{ij} που προκύπτει αν στην ορίζουσα του πίνακα διαγράψουμε την i γραμμή και την j στήλη στις οποίες βρίσκεται το στοιχείο και πολλαπλασιάσουμε με $(-1)^{i+j}$. Ο A_{ij} ονομάζεται αλγεβρικό συμπλήρωμα του a_{ij} . Π.χ.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, B_{12} = - \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = -36 + 42 = 6, B_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = -12$$

Με βάση τα παραπάνω αποδεικνύονται οι ακόλουθες σχέσεις:

ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά την i γραμμή

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (1)$$

ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά την j στήλη

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (2)$$

Υπολογισμός αντιστρόφου πίνακα $n \times n$ με χρήση οριζουσών.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$