Κεφάλαιο 0 Μιγαδικοί Αριθμοί

0.1 Βασικοί ορισμοί και πράξεις

Είναι γνωστό ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός που επαληθεύει την εξίσωση $x^2 = -1$. Η ανάγκη επίλυσης τέτοιων εξισώσεων οδηγεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Το σύνολο (ή σώμα) $\mathbb{C}$ **των μιγαδικών αριθμών** είναι ένα σύνολο που περιέχει τα στοιχεία σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Εκτός από αυτούς στο $\mathbb{C}$ ανήκει επίσης ένα στοιχείο i τέτοιο ώστε $i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}$. Αυτό το στοιχείο λέγεται φανταστική μονάδα. Επιπλέον, κάθε στοιχείο του $\mathbb{C}$ έχει μοναδική παράσταση της μορφής $a+bi$ όπου $a,b \in \mathbb{R}$.

Έστω $z = a+bi \in \mathbb{C}$ όπου $a,b \in \mathbb{R}$. Ο πραγματικός αριθμός a ονομάζεται το **πραγματικό μέρος** του z και συμβολίζεται με $\operatorname{Re}(z)$. Ο πραγματικός αριθμός b ονομάζεται το **φανταστικό μέρος** του z και συμβολίζεται με $\operatorname{Im}(z)$.

Αν για παράδειγμα $z = \frac{1}{2} + 3i$, τότε $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}, \operatorname{Im}(z) = 3.$

Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με $z = a+bi$ και $w = c+di$, όπου $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$z = w \Leftrightarrow a = c \text{ και } b = d .$$

Ένας μιγαδικός αριθμός είναι πραγματικός αν και μόνο αν το φανταστικό μέρος του είναι ίσο με μηδέν:

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 .$$

Επίσης,

$$z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0, \operatorname{Re}(z) = 0 .$$

Ξέρουμε ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$, όπου $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$, έχει υποχρεωτικά δύο ρίζες. Αυτές οι ρίζες είναι πραγματικοί αριθμοί και αν μόνο αν η διακρίνουσά του τριωνύμου $ax^2 + bx + c$ είναι μη αρνητική, δηλαδή $b^2 - 4ac \geq 0.$ Σε μία τέτοια περίπτωση γνωρίζουμε (το διδασκόμαστε στο Γυμνάσιο) ότι ισχύει:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) = 0 \text{ όπου } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Όμως, κάθε τέτοια εξίσωση έχει ρίζες ανεξάρτητα από το πρόσημο της διακρίνουσας. Αν $b^2 - 4ac < 0$, τότε οι ρίζες αυτές γράφουμε:

$$b^2 - 4ac = -\left|b^2 - 4ac\right| = i^2 \left|b^2 - 4ac\right|$$

Οπότε οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{\left|b^2 - 4ac\right|}}{2a} .$$

Για παράδειγμα, οι ρίζες της $x^2 + 2x + 3 = 0$ είναι $x_{1,2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{8}}{2} = -1 \pm i\sqrt{2}.$

Αριθμητικές πράξεις στο σώμα των Μιγαδικών Αριθμών

Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με $z = a + bi$ και $w = c + di.$

- **Πρόσθεση:** Ορίζουμε το άθροισμα (διαφορά) $z + w$ ως εξής
$$z \pm w = (a \pm c) + (b \pm d)i\ .$$
- **Πολλαπλασιασμός μιγαδικού με πραγματικό:** Ορίζουμε το γινόμενο xz, όπου $x \in \mathbb{R}$, ως εξής
$$xz = xa + xbi\ .$$
- Ο **αντίθετος μιγαδικού αριθμού:** Ορίζουμε τον αντίθετο γινόμενο $-z$ ως το γινόμενο $(-1)\cdot z$, δηλαδή $-z = -a - bi$. Ισχύει $\mathrm{z} + (-\mathrm{z}) = 0$.
- **Αφαίρεση μιγαδικών:** Ορίζουμε το διαφορά $z - w$ ως το άθροισμα με τον αντίθετο $z + (-w)$ οπότε ισχύει
$$z - w = (a - c) + (b - d)i\ .$$
- **Πολλαπλασιασμός μιγαδικών:** Ορίζουμε το γινόμενο zw ως εξής
$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i\ .$$
- ο **αντίστροφος μιγαδικών** του $z = a + bi$ και συμβολίζεται με $z^{-1} = \left(a + bi\right)^{-1}$ ή $\dfrac{1}{a + bi}$ και θα είναι ο μιγαδικός αριθμός $\dfrac{a}{a^2 + b^2} + \dfrac{-b}{a^2 + b^2} i$. Ισχύει $\mathrm{zz}^{-1} = (a + bi)\left(a + bi\right)^{-1} = 1$.
- Η **διαίρεση μιγαδικών** ορίζεται ως πολλαπλασιασμός με τον αντίστροφο $\dfrac{z}{w} = zw^{-1}$.

Παραδείγματα:

Αν $z = \sqrt{2} - 5i$ και $w = 1 + 3i$, τότε

$$z + w = (\sqrt{2} + 1) + (-5 + 3)i = (\sqrt{2} + 1) + (-2)i$$

$$\sqrt{2}z = \sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 5i\right) = \sqrt{2}^2 + 5\sqrt{2}i = 2 + 5\sqrt{2}i$$

$$-z = -\left(\sqrt{2} - 5i\right) = -\sqrt{2} + 5i$$

$$z - w = (\sqrt{2} - 1) + (-5 - 3)i = (\sqrt{2} - 1) + (-8)i = (\sqrt{2} - 1) - 8i$$

$$zw = (\sqrt{2} + 5\cdot 3) + (3\sqrt{2} - 5)i = (\sqrt{2} + 15) + (3\sqrt{2} - 5)i\ .$$

Ο αντίστροφος του $1 - 2i$ είναι ο $\dfrac{1}{1^2 + (-2)^2} + \dfrac{-(-2)}{1^2 + (-2)^2} i = \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5} i$.

Για να γράψουμε το μιγαδικό αριθμό $\dfrac{2 - 3i}{1 + i}$ στη μορφή $a + bi$ παρατηρούμε ότι ο αντίστροφος του $1 + i$ είναι ο $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} i$ και άρα

$$\frac{2-3i}{1+i}=(2-3i)\frac{1}{1+i}=(2-3i)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i\,.$$

Μέτρο Μιγαδικού Αριθμού $z=a+bi$ **είναι ο πραγματικός μη αρνητικός αριθμός** $\sqrt{a^2+b^2}$ **και συμβολίζεται με** $|z|$**.**

Το μέτρο μιγαδικών αριθμών ικανοποιεί ιδιότητες ανάλογες με αυτές της απόλυτης τιμής. *Έστω* $z,w\in\mathbb{C}$*. Τότε*

1. $|z|=|-z|$
2. $|xz|=|x||z|,\ \ x\in\mathbb{R}$
3. $|zw|=|z||w|$
4. *αν* $w\neq 0$*, τότε* $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$
5. $|z+w|\le|z|+|w|$ **(τριγωνική ανισότητα)**

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ιδιότητες μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\left|\mathrm{z}^{-1}\right|=\frac{1}{|\mathrm{z}|}.$$

Πράγματι, $\mathrm{z}\cdot\mathrm{z}^{-1}=1\Leftrightarrow\left|\mathrm{z}\cdot\mathrm{z}^{-1}\right|=|1|\Leftrightarrow|\mathrm{z}|\cdot\left|\mathrm{z}^{-1}\right|=1\Leftrightarrow\left|\mathrm{z}^{-1}\right|=\dfrac{1}{|\mathrm{z}|}.$

Παραδείγματα:

Το μέτρο του $1-2i$ είναι $|1-2i|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$ και του $-3=-3+0i$ είναι $|-3|=\sqrt{(-3)^2+0^2}=3$. Επίσης $|-3i|=\sqrt{0^2+(-3)^2}=\sqrt{3^2}=3.$

Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $\dfrac{1+2i}{(2+3i)(1-i)}$

$$\left|\frac{1+2i}{(2+3i)(1-i)}\right|=\frac{|1+2i|}{|(2+3i)(1-i)|}=$$
$$=\frac{|1+2i|}{|(2+3i)||(1-i)|}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{5}{26}}.$$

Επίσης όταν $z_1=2-3i$ και $|z_2|=2$, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει:

$$|2z_1+3z_2|<14.$$

Χρησιμοποιώντας την **τριγωνική ανισότητα** έχουμε

$$|2z_1+3z_2|\le|2z_1|+|3z_2|=2|z_1|+3|z_2|=$$
$$=2\sqrt{13}+6<2\cdot 4+6=14.$$

Ο συζυγής του μιγαδικού αριθμού $z=a+bi$ είναι ο $a-bi$ και συμβολίζεται με $\bar{z}$.

Για παράδειγμα, έχουμε $\overline{2+3i}=2-3i$ και $\overline{2-3i}=2+3i$. Επίσης $\bar{5}=\overline{5+0i}=5$ και $\overline{7i}=-7i.$

Έστω $z,w\in\mathbb{C}$ με $z=a+bi$ και $w=c+di$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1 $z+\bar{z}=2a\in\mathbb{R}$

2 $z\bar{z}=a^2+b^2=|z|^2$

3 $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$

4 $\overline{zw}=\bar{z}\,\bar{w}$

5 *αν* $w\neq 0$, *τότε* $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

Παραδείγματα

i) Θα δείξουμε ότι όταν $z\in\mathbb{C}$ με $|z|=1,$ τότε ισχύει:

$$\overline{\left(\frac{z}{2+z}\right)}=\frac{1}{1+2z}\ .$$

Πράγματι,

$$|z|=1\Leftrightarrow z\bar{z}=1\Leftrightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}\ .$$

Οπότε

$$\overline{\left(\frac{z}{2+z}\right)}=\frac{\bar{z}}{\overline{2+z}}=\frac{\bar{z}}{2+\bar{z}}=\frac{\frac{1}{z}}{2+\frac{1}{z}}=\frac{\frac{1}{z}}{\frac{2z+1}{z}}=\frac{1}{1+2z}\ .$$

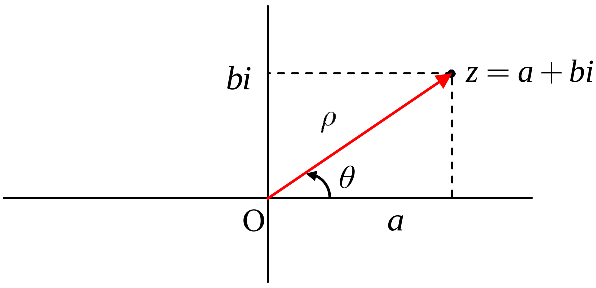
ii) Έστω $z\in\mathbb{C},\ z\neq 1,$τέτοιο ώστε $\left|\dfrac{z-4}{z-1}\right|=2.$ Να βρεθεί το μέτρο του z .

$$\left|\frac{z-4}{z-1}\right|=2\Rightarrow\left|\frac{z-4}{z-1}\right|^2=4\Rightarrow\frac{z-4}{z-1}\overline{\left(\frac{z-4}{z-1}\right)}=4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{z\bar{z}-4z-4\bar{z}+16}{z\bar{z}-z-\bar{z}+1}=4\Rightarrow z\bar{z}-4z-4\bar{z}+16=4\left(z\bar{z}-z-\bar{z}+1\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow z\bar{z}=4\Rightarrow|z|^2=4\Rightarrow|z|=2.$$

0.2 Τριγωνομετρική Μορφή Μιγαδικού Αριθμού

Ας θεωρήσουμε το **μιγαδικό επίπεδο**, δηλαδή ένα επίπεδο με ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων όπου στον άξονα xx' θα απεικονίζονται οι πραγματικοί αριθμοί, και στον άξονα yy' οι φανταστικοί, δηλαδή όλοι οι αριθμοί της μορφής bi. Σε ένα τέτοιο επίπεδο μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά κάθε μιγαδικό αριθμό $z = a + bi$ με ένα σημείο Μ με συντεταγμένες (a, b)

Έστω θ η γωνία που σχηματίζεται αν κινηθούμε με φορά αντίθετη της κίνησης των δεικτών ρολογιού από τον ημιάξονα Ox στο OM όπως φαίνεται στο σχήμα[1].



Τότε έχουμε $a = |OM|\cos\theta$ και $b = |OM|\sin\theta$. Συνεπώς

$$z = a + bi = |OM|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Η παράσταση $|OM|(\cos + i\sin\theta)$ ονομάζεται η **τριγωνομετρική μορφή** του $a + bi$. Παρατηρούμε ότι το $|OM| = \rho$ είναι το μέτρο του $a + bi$. Η δε γωνία θ ονομάζεται το **όρισμα** του $a + bi$. Συνεπώς η τριγωνομετρική μορφή είναι

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

όπου $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ και θ είναι το όρισμα του $a + bi$.

Το όρισμα του $a + bi$ προσδιορίζεται από τις σχέσεις

$$a = \rho\cos\theta,\ b = \rho\sin\theta,\ 0 \le \theta < 2\pi .$$

Διαιρώντας τους δύο αυτούς τύπους συμπεραίνουμε ότι

$$\tan\theta = b/a \Rightarrow \theta = \arctan(b/a), \quad 0 \le \theta < 2\pi .$$

Τέλος ισχύει και ο **τύπος του Euler:**

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

από τον οποίο έχουμε ότι

$$z = a + bi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$$

[1] Εννοούμε ότι $0 \le \theta < 2\pi$.

Παράδειγμα

Για να βρούμε την τριγωνομετρική μορφή του $-\sqrt{3}+i$, βρίσκουμε πρώτα το μέτρο του

$$\rho = \left|-\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2.$$

Για να βρούμε το όρισμα έχουμε $a=\rho\cos\theta,\ b=\rho\sin\theta$ δηλαδή $\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2},\ \sin\theta = \frac{1}{2}$. Από τις σχέσεις αυτές συμπεραίνουμε ότι $\cos\theta = \cos\frac{5\pi}{6},\ \sin\theta = \frac{5\pi}{6}$ και άρα $\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$. Επειδή $0 \le \theta < 2\pi$ έχουμε $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Άρα η τριγωνομετρική μορφή είναι $2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Η τριγωνομετρική μορφή μας βοηθά στον **πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση μιγαδικών αριθμών**. Έστω $z_1 = \rho_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$ και $z_2 = \rho_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$.

Τότε, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler εύκολα μπορούμε να δούμε ότι:

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1}\rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} = \rho_1\rho_2\left(\cos\left(\theta_1+\theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)$$

επίσης, παρόμοια δείχνουμε ότι, εάν $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos\left(\theta_1-\theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\right).$$

Θεώρημα (De Moivre) Έστω $z = \rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$. Τότε για κάθε φυσικό αριθμό n έχουμε

$$z^n = \rho^n\left(\cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)\right).$$

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι απλή με τη χρήση του τύπο του Euler.

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί στη μορφή $a+bi$ ο μιγαδικός αριθμός $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{2005}$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι η τριγωνομετρική μορφή του $-\sqrt{3}+i$ είναι $-\sqrt{3}+i = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του De Moivre έχουμε

$$\left(-\sqrt{3}+i\right)^{2005} = 2^{2005}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)^{2005} =$$

$$= 2^{2005}\left(\cos\left(2005\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(2005\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

Επειδή $2005\frac{5\pi}{6} = \frac{10025\pi}{6} = \frac{10020\pi + 5\pi}{6} = 1670\pi + \frac{5\pi}{6} = 2\cdot 835\cdot\pi + \frac{5\pi}{6}$ έχουμε ότι $\cos(2005\frac{5\pi}{6}) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right),\ \sin(2005\frac{5\pi}{6}) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

Άρα παίρνουμε

$$\left(-\sqrt{3}+i\right)^{2005} = 2^{2005}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2^{2005}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2^{2004}(-\sqrt{3}+i).$$

Θεώρημα του De Moivre και Εξισώσεις

Έστω $a\in\mathbb{C}, a\neq 0.$ Η εξίσωση $z^n = a$ έχει n διακεκριμένες λύσεις που δίνονται από τον τύπο

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k = 0,1,\ldots,n-1,$$

όπου ρ είναι το μέτρο του a και θ είναι το όρισμά του.

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση $z^4 = -\sqrt{3}+i$.

Είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα ότι $-\sqrt{3}+i = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$,

δηλαδή $\rho = 2$ και $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Άρα οι ζητούμενες λύσεις είναι οι

$$z_k = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{6}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{6}+2k\pi}{4}\right),\quad k = 0,1,2,3.$$

Αντικαθιστώντας διαδοχικά $k = 0,1,2,3$ βλέπουμε ότι οι λύσεις είναι

$$z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{24} + i\sin\frac{5\pi}{24}\right) = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{5\pi}{24}}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{24} + i\sin\frac{17\pi}{24}\right) = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{17\pi}{24}}$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{29\pi}{24} + i\sin\frac{29\pi}{24}\right) = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{29\pi}{24}}$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{41\pi}{24} + i\sin\frac{41\pi}{24}\right) = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{41\pi}{24}}.$$

Οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης στο μιγαδικό επίπεδο σχηματίζουν ένα τετράγωνο που εγγράφεται σε ένα κύκλο με αρχή το (0,0) και ακτίνα $\sqrt[4]{2}$:

Μία εφαρμογή χρήσιμη για Ηλεκτρονικούς.

Ένα μέγεθος $y(x)$ μεταβάλλεται αρμονικά προς x όταν

$$y(x) = A\cos(\omega x + \theta) \text{ (ή αντίστοιχα } y(x) = A\sin(\omega x + \theta))$$

όπου A το πλάτος, ω η κυκλική συχνότητα και θ η φάση.

Τότε μπορούμε να ορίσουμε την αντίστοιχη μιγαδική εξίσωση $\tilde{y}(x) = Ae^{i(\omega x+\theta)}$.

Τότε ισχύει:

Το αποτέλεσμα μίας γραμμικής πράξης (π.χ. πρόσθεση, αφαίρεση, παραγώγιση) δύο μεγεθών που μεταβάλλονται αρμονικά με την ίδια κυκλική συχνότητα είναι μέγεθος που μεταβάλλεται αρμονικά και ισούται με το πραγματικό (ή το μιγαδικό μέρος εάν πρόκειται για ημιτονοειδή μεγέθη) του αποτελέσματος της γραμμικής πράξης όταν εφαρμόζεται στα αντίστοιχα μιγαδικά μεγέθη.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η εξίσωση κίνησης σώματος που εκτελεί ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις με εξισώσεις $y_1(t) = \cos(t)$ και $y_2(t) = \cos(t - \frac{4\pi}{3})$.

Επειδή οι αρμονικές αυτές συναρτήσεις έχουν την ίδια κυκλική συχνότητα $\omega = 1$ χρησιμοποιώντας τις μιγαδικές τους εξισώσεις $\tilde{y}_1(t) = e^{it}$ και $\tilde{y}_2(t) = e^{i(t-\frac{4\pi}{3})}$ περιγράφουμε τη συνισταμένη κίνηση με την μιγαδική εξίσωση

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_1(t) + \tilde{y}_2(t) = e^{it} + e^{i(t-\frac{4\pi}{3})} = e^{it}(1 + e^{-\frac{4\pi}{3}i}) = e^{it}(1 + (\cos(-\frac{4\pi}{3}) + i\sin(-\frac{4\pi}{3}))) =$$

$$= e^{it}(1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = e^{it}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = e^{it}e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i(t+\frac{\pi}{3})} = \cos(t + \frac{\pi}{3}) + i\sin(t + \frac{\pi}{3})$$

Στους παραπάνω υπολογισμούς χρησιμοποιήσαμε τα ακόλουθα:

$\cos(-\frac{4\pi}{3}) = \cos(\frac{4\pi}{3})$, $\sin(-\frac{4\pi}{3}) = -\sin(\frac{4\pi}{3})$, $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos(\frac{4\pi}{3}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$, $\sin(\frac{4\pi}{3}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Οπότε η εξίσωση της κίνησης του σώματος ισούται με το πραγματικό μέρος της παραπάνω συνάρτησης

$$y(t) = \cos(t + \frac{\pi}{3}).$$

Πράγματι, από τον τριγωνομετρικό τύπο

$$\cos(\omega) + \cos(\phi) = 2\cos\left(\frac{\omega + \phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega - \phi}{2}\right)$$

έχουμε

$$\cos(t)+\cos(t-\frac{4\pi}{3})=2\cos(\frac{2t-\frac{4\pi}{3}}{2})\cos(\frac{2\pi}{3})=-\cos(t-\frac{2\pi}{3})=\cos(\pi+t-\frac{2\pi}{3})=$$
$$=\cos(t+\frac{\pi}{3})$$

αφού ισχύει $-\cos(\omega)=\cos(\pi+\omega)$.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος που προκύπτει από τη συμβολή (άθροισμα) των κυμάτων με εξισώσεις $y_1(t)=4\sin(5t-\frac{\pi}{3})$ και $y_2(t)=3\sin(5t+\frac{\pi}{6})$.

Επειδή οι τα κύματα αυτά έχουν την ίδια κυκλική συχνότητα $\omega=5$ χρησιμοποιώντας τις μιγαδικές τους εξισώσεις $\tilde{y}_1(t)=4e^{i(5t-\frac{\pi}{3})}$ και $\tilde{y}_2(t)=3e^{i(5t+\frac{\pi}{6})}$ περιγράφουμε τη συμβολή τους με την μιγαδική εξίσωση

$$\tilde{y}(t)=\tilde{y}_1(t)+\tilde{y}_2(t)=4e^{i(5t-\frac{\pi}{3})}+3e^{i5(t+\frac{\pi}{6})}=e^{i5t}(4e^{-i\frac{\pi}{3}}+3e^{i\frac{\pi}{6}})=$$
$$=e^{i5t}(4(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3}))+3(\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6}))=$$
$$=e^{i5t}(4(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})+3(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})=e^{i5t}(\frac{4+3\sqrt{3}}{2}+i\frac{3-4\sqrt{3}}{2})$$

Θα βρούμε το μέτρο και το όρισμα του $\frac{4+3\sqrt{3}}{2}+i\frac{3-4\sqrt{3}}{2}$. Το μέτρο ισούται με $\sqrt{(\frac{4+3\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{3-4\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{16+27+24\sqrt{3}+9+48-24\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{100}}{2}=5$

και το όρισμά του είναι

$$\theta=\arctan(\frac{\frac{3-4\sqrt{3}}{2}}{\frac{4+3\sqrt{3}}{2}})=\arctan(\frac{3-4\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}})=\arctan(-0.427)=-0.404$$ οπότε

$$\tilde{y}(t)=e^{i5t}5(\cos(-0.404)+i\sin(-0.404))=5e^{i5t}e^{i(-0.404)}=5e^{i(5t-0.404)}=$$
$$=5(\cos(5t-0.404)+i\sin(5t-0.404))$$

Οπότε η εξίσωση της κίνησης του σώματος ισούται με το φανταστικό μέρος της παραπάνω συνάρτησης

$$y(t)=5\sin(5t-0.404).$$

Λυμένες ασκήσεις

1. Να κάνετε τις πράξεις

(α) $(-2+3i)-(-i-5)+(2i-3)$

(β) $(4i+1)(-3+2i)$

(γ) $3i(-1+i)(-i+2)$

Λύση:

(α) $(-2+3i)-(-i-5)+(2i-3)=-2+5-3+3i+i+2i=6i$

(β) $(4i+1)(-3+2i)=-12i-3+8i^2+2i=-10i-3-8=-11-10i$

(γ) $3i(-1+i)(-i+2)=(-3i+3i^2)(2-i)=(-3-3i)(2-i)=-6-6i+3i+3i^2=$

$=-6-3-3i=-9-3i$

2. Να γράψετε στη μορφή $a+bi$ (όπου τα *a* και *b* είναι πραγματικοί) τους μιγαδικούς

(α) $\dfrac{2+i}{1-i}$

(β) $\dfrac{2+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

Λύση:

(α) $\dfrac{2+i}{1-i}=\dfrac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2+3i-1}{1-i^2}=\dfrac{1+3i}{1+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$

(β) $\dfrac{2+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\dfrac{(2+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}=\dfrac{2-3+3i\sqrt{3}}{1-3i^2}=-\dfrac{1}{4}+i\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

3. Να βρεθεί ο $\bar{z}$, όταν

(α) $z=-2+3i$

(β) $z=i$

(γ) $z=-7$

Λύση:

(α) $\overline{-2+3i}=-2-3i$

(β) $\bar{i}=-i$

(γ) $\overline{-7}=-7$

4. Να βρεθούν τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών:

i , $1+i$, $\dfrac{1-i}{1-2i}$, $(1+3i)^2$, $(1+2i)(1-2i)^2$.

Λύση:

$|i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$,

$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$,

$\left|\dfrac{1-i}{1-2i}\right| = \dfrac{|1-i|}{|1-2i|} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$,

$|(1+3\mathrm{i})^2| = |(1+3\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})| = |1+3\mathrm{i}||1+3\mathrm{i}| = |1+3\mathrm{i}|^2 = (\sqrt{1^2+3^2})^2 = 10$,

$|(1+2i)(1-2i)^2| = |1+2i||1-2i|^2 = = \sqrt{1^2+2^2}\ (\sqrt{1^2+(-2)^2})^2 = \sqrt{5}\cdot 5 = 5\sqrt{5}$.

5. Δίνεται η εξίσωση:

$$az^3+3z^2+2z+3=0$$

Αν γνωρίζουμε ότι μία ρίζα της είναι η $z_1=-i$, προσδιορίστε την παράμετρο α και βρείτε τις υπόλοιπες ρίζες της z_2,z_3.

Λύση:

Ισχύουν

$$z_1=-i$$
$$z_1^{\ 2}=-1$$
$$z_1^{\ 3}=i$$

οπότε η εξίσωση γίνεται: $ai-3-2i+3=0 \Leftrightarrow (a-2)i=0 \Leftrightarrow a=2$

Τώρα η εξίσωση είναι η $\quad 2z^3+3z^2+2z+3=0 \Leftrightarrow z^2(2z+3)+(2z+3)=0$

$$(z^2+1)(2z+3)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} z=i \\ z=-i \\ z=-3/2 \end{array}\right. .$$

6. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του De Moivre, υπολογίστε το

$A=\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{60}}{(4i)^{30}}$

Λύση:

$$A=\frac{(1+i\sqrt{3})^{60}}{(4i)^{30}}=\frac{2^{60}(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^{60}}{4^{30}i^{30}}=\frac{2^{60}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})^{60}}{(2^2)^{30}(i^2)^{15}}=\frac{2^{60}(\cos\frac{60\pi}{3}+i\sin\frac{60\pi}{3})}{2^{60}(-1)^{15}}=$$

$$=\frac{\cos(10(2\pi))+i\sin(10(2\pi))}{-1}=\frac{1}{-1}=-1.$$

7. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=1+i$.

(α) Να βρεθεί το μέτρο, το όρισμα και ο αντίστροφος του z.

(β) Να δοθεί η τριγωνομετρική μορφή του z και να υπολογισθεί η δύναμη z^{2007}

Λύση:

α) Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z είναι: $\rho = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Το πρωτεύον όρισμα θ του z ορίζεται από τις σχέσεις:

$$cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και } sin\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ με } 0 \le \theta < 2\pi, \text{ οπότε } \theta = \frac{\pi}{4}$$

Ο αντίστροφος του z δίνεται από τη σχέση

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1-i}{|z|^2} = \frac{1-i}{\rho^2} = \frac{1-i}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

β) Η τριγωνομετρική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού είναι $z = \rho(cos\theta + isin\theta)$

οπότε η τριγωνομετρική μορφή του δοθέντα μιγαδικού αριθμού z είναι

$$z = \rho(cos\theta + isin\theta) = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα De Moivre η δύναμη του μιγαδικού αριθμού z είναι:

$$z^{2007} = \rho^{2007}(\cos(2007\theta) + isin(2007\theta)) =$$

$$= (\sqrt{2})^{2007}\left(\cos\left(2007\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2007\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= (\sqrt{2})^{2007}\left(\cos\left(501\pi + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(501\pi + \frac{3\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= (\sqrt{2})^{2007}\left(\cos\left(2 \times 250\pi + \pi + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(2 \times 250\pi + \pi + \frac{3\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= (\sqrt{2})^{2007}\left(\cos\left(\pi + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{3\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= (\sqrt{2})^{2007}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = (\sqrt{2})^{2007}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^{2008}}{2} - i\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2008}}{2} = \frac{2^{1004}}{2} - i\frac{2^{1004}}{2} = 2^{1003} - 2^{1003}i$$

8. α) Να γραφεί ο μιγαδικός αριθμός $z = 1 + i\sqrt{3}$ στην τριγωνομετρική μορφή και να υπολογιστεί η δύναμη z^4.

β) Να λυθεί η εξίσωση $z^7 = 1 + i\sqrt{3}$.

Λύση

α) Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z είναι: $\rho = |z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Το πρωτεύον όρισμα θ του z ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{1}{2} \text{ και } \sin\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ με } 0 \le \theta < 2\pi. \text{ Οπότε } \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Άρα η τριγωνομετρική μορφή του z είναι η $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Σύμφωνα με το θεώρημα De Moivre (η κ δύναμη του μιγαδικού αριθμού $z=\rho\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ είναι $z^{\kappa}=\rho^{\kappa}\left(\cos(\kappa\theta)+i\sin(\kappa\theta)\right)$. Συνεπώς η τέταρτη δύναμη του δοθέντος μιγαδικού αριθμού είναι:

$$(1+i\sqrt{3})^4 = 2^4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^4 = 16\left(\cos\left(4\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(4\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 16\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8-i8\sqrt{3} .$$

β) Έστω $a\in\mathbb{C}, a\neq 0.$ Η εξίσωση $z^n=a$ έχει n διακεκριμένες λύσεις οι οποίες είναι οι n-οστές ρίζες του μιγαδικού αριθμού a και δίνονται από τον τύπο

$$z_{\kappa}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2\kappa\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2\kappa\pi}{n}\right),\quad \kappa=0,1,\ldots,n-1,$$

όπου ρ είναι το μέτρο του a και θ το όρισμά του.

Έτσι, οι ρίζες της εξίσωσης $z^7 = 1+i\sqrt{3}$ είναι οι έβδομες ρίζες του μιγαδικού αριθμού $1+i\sqrt{3}$, οι οποίες είναι 7 διαφορετικοί μιγαδικοί αριθμοί και δίνονται από τον τύπο:

$$z_{\kappa}=\sqrt[7]{2}\left(\cos\frac{2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}}{7}+i\sin\frac{2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}}{7}\right),\quad \kappa=0,1,\ldots,6 .$$

Οπότε, για $\kappa=0,1,\ldots,6$, παίρνουμε διαδοχικά:

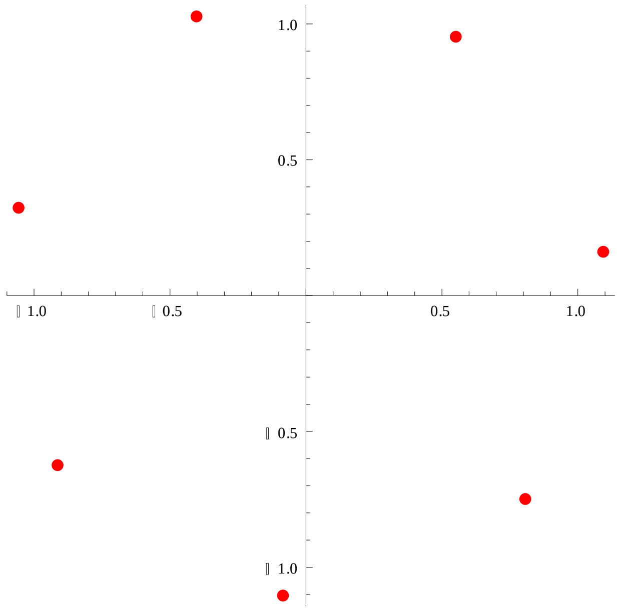
$$z_0=\sqrt[7]{2}\left(\cos\frac{2\cdot 0\cdot\pi+\frac{\pi}{3}}{7}+i\sin\frac{2\cdot 0\cdot\pi+\frac{\pi}{3}}{7}\right)=\sqrt[7]{2}\left(\cos\frac{\pi}{21}+i\sin\frac{\pi}{21}\right),$$

$$z_1=\sqrt[7]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{21}+i\sin\frac{7\pi}{21}\right),\quad z_2=\sqrt[7]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{21}+i\sin\frac{13\pi}{21}\right),$$

$$z_3=\sqrt[7]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{21}+i\sin\frac{19\pi}{21}\right), z_4=\sqrt[7]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{21}+i\sin\frac{25\pi}{21}\right),$$

$$z_5=\sqrt[7]{2}\left(\cos\frac{31\pi}{21}+i\sin\frac{31\pi}{21}\right),\quad \text{και}\quad z_6=\sqrt[7]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{21}+i\sin\frac{37\pi}{21}\right).$$

Οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης στο μιγαδικό επίπεδο σχηματίζουν ένα κανονικό επτάγωνο που εγγράφεται σε ένα κύκλο με αρχή το (0,0) και ακτίνα $\sqrt[7]{2}$:



9. Αφού γράψετε τον μιγαδικό αριθμό $z=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ στην τριγωνομετρική του μορφή υπολογίστε το z^8.

Λύση

Παρατηρούμε ότι το μέτρο του $z=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ είναι

$\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}}=1$. Αν θ είναι το πρωτεύον όρισμα του z, τότε έχουμε $0\leq\theta<2\pi$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα $\theta=\frac{7\pi}{4}$ και η τριγωνομετρική μορφή του z είναι $z=\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του De Moivre, έχουμε

$$z^8=\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)^8=\cos\left(8\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(8\frac{7\pi}{4}\right)=\cos(14\pi)+i\sin(14\pi)=$$

$$=\cos(2\cdot 7\pi)+i\sin(2\cdot 7\pi)=\cos(14\pi)+i\sin(14\pi)=1+0=1$$

10. Αφού γράψετε τον μιγαδικό αριθμό $z=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ στην τριγωνομετρική του μορφή δείξτε ότι $z^9-z=0$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι το μέτρο του $z=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ είναι $\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}}=1$. Αν θ είναι το πρωτεύον όρισμα του z, τότε έχουμε $0\le\theta<2\pi$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα $\theta=\frac{7\pi}{4}$ και η τριγωνομετρική μορφή του z είναι $z=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}$.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του De Moivre, έχουμε

$$z^9=\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)^9=\cos\left(9\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(9\frac{7\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{63\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{63\pi}{4}\right)=$$

$$=\cos\left(15\pi+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(15\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(14\pi+\pi+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(14\pi+\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=$$

$$=\cos(2\cdot 7\pi+\pi+\frac{3\pi}{4})+i\sin(2\cdot 7\pi+\pi+\frac{3\pi}{4})=\cos(14\pi+\frac{7\pi}{4})+i\sin(14\pi+\frac{7\pi}{4})=$$

$$=\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Από όπου είναι φανερό ότι $z^9=z\Leftrightarrow z^9-z=0$.

11. Μα βρεθούν οι τιμές του $z\in\mathbb{R}$ για τις οποίες μηδενίζεται (οι ρίζες ή μηδενικά της) ή δεν ορίζεται (οι πόλοι της) η ακόλουθη μιγαδική παράσταση

$$F(z)=\frac{(z-2)(z+3)}{(z+1)(z^2+i)}$$

(μπορεί να θεωρηθεί και ως μιγαδική συνάρτηση). Να σχεδιάσετε τους πόλους και τις ρίζες στο μιγαδικό επίπεδό και να τους γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή.

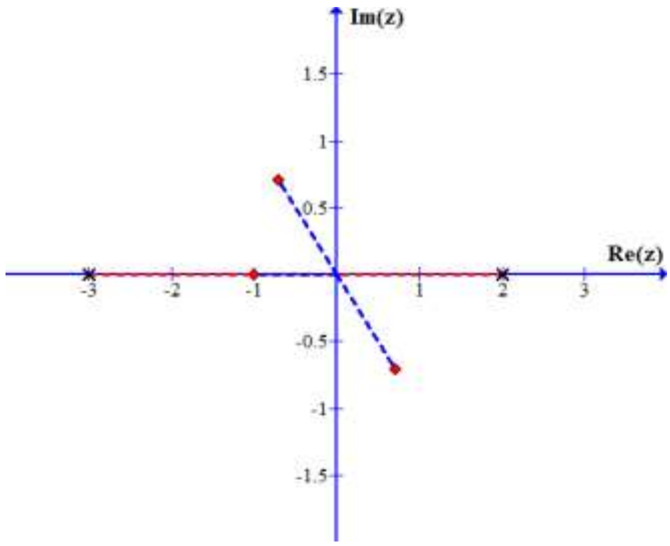
Λύση

Φανερά ρίζες είναι οι $z=2=2(\cos(0)+i\cos(0)), z=-3=3(\cos(\pi)+i\cos(\pi))$ και πόλοι το $z=-1=\cos(\pi)+i\cos(\pi)$ και οι δύο ρίζες της εξίσωσης $z^2+i=0\Leftrightarrow z^2=-i$.

Το μέτρο του $-i$ είναι $|-i|=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$ και ψάχνω για γωνία για την οποία ισχύει $\cos(\theta)=0,\sin(\theta)=-1$. Από τον τριγωνομετρικό κύκλο βρίσκω ότι η γωνία είναι η $\theta=\frac{3\pi}{2}$ οπότε η εξίσωση είναι η $z^2=\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι

$$z_\kappa=\sqrt{1}\left(\cos\left(\frac{2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2}}{2}\right)+i\sin\left(\frac{2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2}}{2}\right)\right),\ \ \kappa=0,1,$$ δηλαδή οι

$$z_0 = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$z_1 = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



12. Αφού γράψετε τον μιγαδικό αριθμό $z = -1 - i$ στην τριγωνομετρική του μορφή, χρησιμοποιώντας τους κατάλληλους γνωστούς τύπους, υπολογίστε την όγδοη δύναμή του και τις τετραγωνικές του ρίζες στην τριγωνομετρική τους μορφή. (Δηλαδή, λύστε την εξίσωση $w^2 = -1 - i$)

Λύση

Παρατηρούμε ότι το μέτρο του $z = -1 - i$ είναι $\sqrt{-1^{2} + -1^{2}} = \sqrt{2}$. Οπότε ο αριθμός γράφεται ως $z = -1 - i = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$. Αν θ είναι το πρωτεύον όρισμα του z, τότε έχουμε $0 \le \theta < 2\pi$, $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα $\theta = \frac{5\pi}{4}$ και η τριγωνομετρική μορφή του z είναι
$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του De Moivre, έχουμε:

$$z^8 = \sqrt{2}^8\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)^8 = 16\left(\cos\left(8\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(8\frac{5\pi}{4}\right)\right) = 16\ \cos(10\pi) + i\sin(10\pi)\ =$$
$$= 16\ \cos(2\cdot 5\pi) + i\sin(2\cdot 5\pi)\ = 16$$

Οι ρίζες της εξίσωσης $w^2 = -1 - i$ είναι οι τετραγωνικές ρίζες του μιγαδικού αριθμού $-1 - i$, οι οποίες είναι 2 διαφορετικοί μιγαδικοί αριθμοί και δίνονται από τον τύπο:

$$w_\kappa = \sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4}}{2} + i\sin\frac{2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4}}{2} \right), \quad \kappa = 0,1.$$

Οπότε, για $\kappa = 0,1$ παίρνουμε διαδοχικά:

$$w_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8} \right),$$

$$w_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2\pi + \frac{5\pi}{4}}{2} + i\sin\frac{2\pi + \frac{5\pi}{4}}{2} \right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8} \right)$$

13. Αφού γράψετε τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = 1 + i\sqrt{3},\ z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ στην τριγωνομετρική τους μορφή, υπολογίστε το $z = z_1^5 + z_2$ και γράψτε το στη μορφή $a + bi$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι το μέτρο του $z = 1 + i\sqrt{3}$ είναι

$\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ οπότε $z = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

Αν θ είναι το πρωτεύον όρισμα του z, τότε έχουμε $0 \le \theta < 2\pi$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ και $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα $\theta = \frac{\pi}{3}$ και η τριγωνομετρική μορφή του z είναι

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \right).$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του De Moivre, έχουμε

$$z_1^5 = 2^5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \right)^5 = 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} \right)$$

Παρατηρούμε ότι το μέτρο του $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ είναι

$\sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ οπότε $z_2 = 2\left(\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$ Αν θ είναι το πρωτεύον όρισμα του z, τότε έχουμε $0 \le \theta < 2\pi$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ και $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Άρα $\theta = \frac{5\pi}{3}$ και η τριγωνομετρική μορφή του z είναι $z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} \right)$.

Οπότε

$$z = z_1^5 + z_2 = 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} \right) + 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} \right) = 34\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} \right) =$$

$$= 34\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 17 - 17\sqrt{3}i$$

14. Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π1,Π2 ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος A=0.2m κάθετα στην ελαστική επιφάνεια ενός υγρού, παράγοντας κύματα με μήκος κύματος λ=0.6m Οι πηγές αρχίζουν να ταλαντώνονται τη χρονική στιγμή t=0 με θετική ταχύτητα u=0.4 m/sec. Υλικό σημείο (Σ) της επιφάνειας απέχει κατά r_1=7.6m από την πηγή Π1 και κατά r_2=4.8m από την πηγή Π2. Το (Σ) αρχίζει να ταλαντώνεται μετά από κάποια χρονική στιγμή και απομακρύνεται από το αρχικό σημείο ισορροπίας του. Η απομάκρυνση του σημείου (Σ) που οφείλεται σε κάθε κύμα χωριστά υπολογίζεται κάθε στιγμή από τις εξισώσεις

$$y_i = A\sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_i}{\lambda}\right)\right), \ \text{i=1,2}$$

με περίοδο του κύματος που δίνεται από τη σχέση $T = \lambda/u$. Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας η απομάκρυνση του αρχικού σημείου (Σ) κάθε χρονική στιγμή t είναι ισούται με τη συμβολή (αλγεβρικό άθροισμα) των απομακρύνσεων $y_i, \ \text{i=1,2}$.

Υπολογίστε την εξίσωση της απομάκρυνσης του (Σ) Χρησιμοποιώντας τις μιγαδικές εξισώσεις των $y_i, \ \text{i=1,2}$ υπολογίστε τη συνάρτηση (ταλάντωση) που περιγράφει τελικά την κίνηση του υλικού σημείου (Σ). Ποιο θα είναι το μέγιστο το μέγιστο ύψος κύματος της ταλάντωσης του (Σ).

Λύση

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε A=0.2m, λ=0.6m, u=0.4 m/sec, r_1=7.6m, r_2= 4.8m και T=0.6/0.4=1.5sec. Οπότε οι τα δύο κύματα (ταλαντώσεις) έχουν εξισώσεις

$$y_1 = A\sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)\right) = 0.2\sin\left(2\pi\left(\frac{t}{1.5} - \frac{7.6}{0.6}\right)\right) = 0.2\sin\left(\frac{4\pi}{3}t - \frac{76}{3}\pi\right)$$

και $y_2 = A\sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)\right) = 0.2\sin\left(2\pi\left(\frac{t}{1.5} - \frac{4.8}{0.6}\right)\right) = 0.2\sin\left(\frac{4\pi}{3}t - \frac{48}{3}\pi\right)$

Επειδή οι τα κύματα αυτά έχουν την ίδια κυκλική συχνότητα $\omega = \dfrac{4\pi}{3}$ χρησιμοποιώντας τις μιγαδικές τους εξισώσεις $\tilde{y}_1(t) = 0.2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}t - \frac{76}{3}\pi\right)}$ και $\tilde{y}_2(t) = 0.2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}t - \frac{48}{3}\pi\right)}$ περιγράφουμε τη συμβολή τους με την μιγαδική εξίσωση

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_1(t) + \tilde{y}_2(t) = 0.2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}t - \frac{76}{3}\pi\right)} + 0.2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}t - \frac{48}{3}\pi\right)} = 0.2e^{i\frac{4\pi}{3}t}(e^{-i\frac{76}{3}\pi} + 3e^{-i\frac{28}{3}\pi}) =$$

$$= 0.2e^{i\frac{4\pi}{3}t}((\cos(-\frac{76}{3}\pi) + i\sin(-\frac{76}{3}\pi)) + (\cos(-\frac{48}{3}\pi) + i\sin(-\frac{48}{3}\pi))) =$$

$$= 0.2e^{i\frac{4\pi}{3}t}((\cos(\frac{76}{3}\pi) + \cos(\frac{48}{3}\pi)) - i(\sin(\frac{76}{3}\pi) + \sin(\frac{48}{3}\pi)))$$

$$\cos(\frac{76}{3}\pi) + \cos(\frac{48}{3}\pi) = \cos(24\pi + \frac{4\pi}{3}) + \cos(16\pi) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Αφού $\cos(\frac{4}{3}\pi)=\cos(\pi+\frac{\pi}{3})=-\cos(\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}$ και $\cos(16\pi)=1$.

$$\sin(\frac{76}{3}\pi)+\sin(\frac{48}{3}\pi)=\sin(24\pi+\frac{4\pi}{3})+\sin(16\pi)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Αφού $\sin(\frac{4}{3}\pi)=\sin(\pi+\frac{\pi}{3})=-\sin(\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Οπότε

$$\tilde{y}(t)=\tilde{y}_1(t)+\tilde{y}_2(t)=0.2e^{i\frac{4\pi}{3}t}(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=0.2e^{i\frac{4\pi}{3}t}(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3}))=$$
$$=0.2e^{i\frac{4\pi}{3}t}e^{i\frac{\pi}{3}}=0.2e^{i(\frac{4\pi}{3}t+\frac{\pi}{3})}=0.2(\cos(\frac{4}{3}\pi t+\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{4}{3}\pi t+\frac{\pi}{3}))$$

Οπότε η εξίσωση της κίνησης του σώματος ισούται με το φανταστικό μέρος της παραπάνω συνάρτησης

$$y(t)=0.2\sin(\frac{4}{3}\pi t+\frac{\pi}{3}).$$

Το μέγιστο το μέγιστο ύψος κύματος της ταλάντωσης του (Σ) είναι το πλάτος της παραπάνω συνάρτησης που είναι 0.2.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στο σύγγραμμα που διανέμεται και στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος. Το περιεχόμενο του αρχείου απλά αποτελεί περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα για δική του χρήση και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί και να μην αναπαραχθεί και διανεμηθεί για άλλο σκοπό.