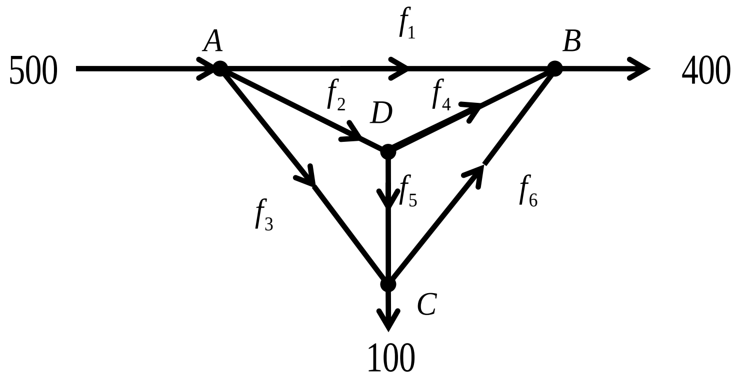
Κεφάλαιο 1 Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

1.1 Παραδείγματα από εφαρμογές

Παράδειγμα : Σε ένα δίκτυο (αγωγών ή σωλήνων ή δρόμων) ισχύει ο κανόνας των **κόμβων** όπου το **άθροισμα των εισερχόμενων ροών** θα πρέπει να είναι **ίσο** με το **άθροισμα των εξερχόμενων**.



Οπότε για το παραπάνω δίκτυο ισχύει:

$$
\begin{array}{ll}
A & 500 = f_1 + f_2 + f_3 \\
B & f_1 + f_4 + f_6 = 400 \\
C & f_3 + f_5 = f_6 + 100 \\
D & f_2 = f_4 + f_5
\end{array}
$$

το οποίο είναι ένα σύστημα 4 γραμμικών εξισώσεων με έξι αγνώστους f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6. Η λύση του θα οδηγήσει σε μία απειρία λύσεων όπου οι 3 από αυτούς τους αγνώστους θα εξαρτώνται από την επιλογή των τριών άλλων:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= 400 - f_4 - f_6 \\
f_2 &= f_4 + f_5 \\
f_3 &= 100 - f_5 + f_6
\end{aligned}
$$

όπου τα f_4, f_5, f_6 παίζουν το ρόλο των παραμέτρων.

Σε αρμονία με το φυσικό πρόβλημα, η επιλογή των παραμέτρων μπορεί να υπόκειται σε περιορισμούς που πηγάζουν από τη φυσική του προβλήματος όπως ότι τα f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 είναι θετικά. Αυτό μας οδηγεί στους περιορισμούς :

$$
\begin{aligned}
f_4 + f_6 &\le 400 \\
f_5 - f_6 &\le 100
\end{aligned}
$$

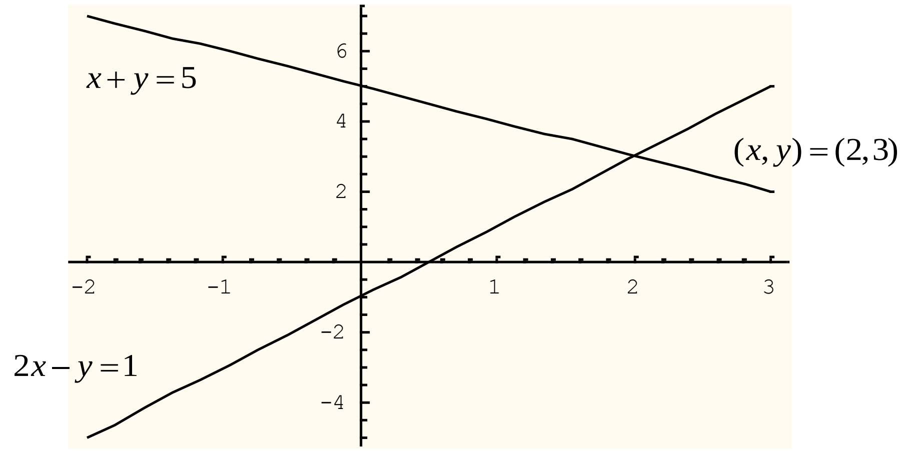
1.2 Η γεωμετρία των συστημάτων γραμμικών εξισώσεων

Έστω το σύστημα:

$$
\begin{aligned}
2x - y &= 1 \\
x + y &= 5
\end{aligned}
$$

Αλγεβρικά λύνοντας τη μία εξίσωση ως προς τον ένα άγνωστο και αντικαθιστώντας στην άλλη μπορούμε εύκολα να βρούμε τη λύση του $(x, y) = (2,3)$.

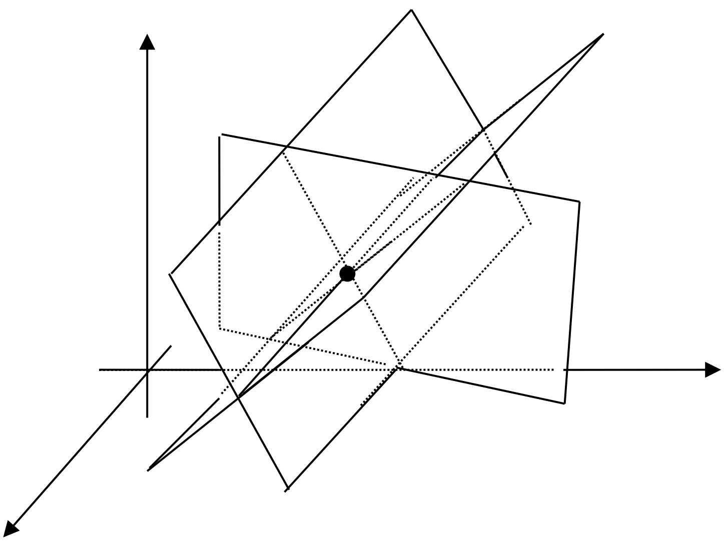
Μπορούμε να δούμε γεωμετρικά το σύστημα όπου κάθε εξίσωση (γραμμή) αντιστοιχεί σε μία ευθεία του επιπέδου. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο γραμμών αποτελούν τη λύση.



Σε ένα σύστημα 3×3

$$\begin{aligned} &2x+y+z=5\\ &4z-6y=-2\\ &-2x+7y+2z=9 \end{aligned}$$

κάθε γραμμή (εξίσωση) αναπαριστάται στο χώρο ως ένα επίπεδο και η λύση είναι το σημείο τομής των τριών επιπέδων.



1.3 Συστήματα γραμμικών εξισώσεων με ιδιομορφίες

Όταν ένα σύστημα έχει μία ή περισσότερες λύσεις ονομάζεται **συμβιβαστό** ενώ όταν δεν έχει λύση ονομάζεται **ασυμβίβαστο**.

Έστω το σύστημα:

$$u+v+w=6$$
$$2u+3w=1$$
$$3u+v+4w=6$$

Εάν προσθέσω κατά μέλη την πρώτη και τη δεύτερη εξίσωση και αφαιρέσω την τρίτη οδηγούμαι στη σχέση 1=0. Το σύστημα είναι ασυμβίβαστο και στο χώρο τα τρία επίπεδα δεν έχουν ένα κοινό σημείο.

Εάν αλλάξω λίγο το σύστημα

$$u+v+w=6$$
$$2u+3w=1$$
$$3u+v+4w=7$$

και προσθέσω κατά μέλη την πρώτη και τη δεύτερη εξίσωση και αφαιρέσω την τρίτη οδηγούμαι στη σχέση 0=0. Το σύστημα είναι συμβιβαστό έχει άπειρες λύσεις και στο χώρο τα τρία επίπεδα τέμνονται σε μία ευθεία ή ταυτίζονται.

Μία ιδιαίτερη περίπτωση είναι το **ομογενές σύστημα** (στο δεξιό μέλος έχουμε μηδέν):

$$u+v+w=0$$
$$2u+3w=0$$
$$3u+v+4w=0$$

Ένα τέτοιο σύστημα είναι πάντα συμβιβαστό μιας και η μηδενική λύση πάντα το ικανοποιεί. **Μπορεί όμως η λύση αυτή να μην είναι μοναδική αλλά να έχουμε άπειρες λύσεις**,

1.4 Η μέθοδος απαλοιφής Gauss

Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα n εξισώσεων με m αγνώστους:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1m}x_m=b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2m}x_m=b_2\\
&...\\
&a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nm}x_m=b_n
\end{aligned}$$

Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1m} & b_1\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2m} & b_2\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3m} & b_3\\
. & . & . & & & & & .\\
. & . & . & & & & & .\\
. & . & . & & & & & .\\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nm} & b_n
\end{array}\right]$$

Ένας (τέτοιος) πίνακας ονομάζεται **κλιμακωτός** όταν

Α) οι μηδενικές γραμμές αν υπάρχουν βρίσκονται μετά τις μη μηδενικές στο τέλος (κάτω μέρος) του πίνακα.

Β) Το **οδηγό στοιχείο** κάθε γραμμής (πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της) βρίσκεται τουλάχιστον μία θέση δεξιότερα από τον οδηγό της προηγούμενης.

$$\begin{bmatrix} * & * & * & . & . & . & * & * \\ 0 & * & * & . & . & . & * & * \\ \vdots & 0 & * & . & . & . & * & * \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Στη βιβλιογραφία ο κλιμακωτός πίνακας ονομάζεται και ως **γ-κλιμακωτός** και σε κάποιους ορισμούς ζητείται το οδηγό στοιχείο να είναι 1.

Ένας πίνακας ονομάζεται **ανοιγμένος κλιμακωτός (ή σ-κλιμακωτός)** όταν

Α) είναι κλιμακωτός.

Β) κάθε οδηγό στοιχείο γραμμής είναι ίσο με 1.

Γ) κάθε στήλη που περιέχει οδηγό στοιχείο γραμμής έχει όλα τα άλλα στοιχεία της μηδενικά.

Για παράδειγμα, οι πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

δεν είναι κλιμακωτοί.

Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ είναι κλιμακωτός.

Αυτός δεν είναι ανηγμένος κλιμακωτός, γιατί το στοιχείο που βρίσκεται πάνω από το 1 της δεύτερης γραμμής δεν είναι 0.

Ο $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ είναι ανηγμένος κλιμακωτός. Από τους πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ο πρώτος και τρίτος είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί, ενώ ο δεύτερος είναι κλιμακωτός αλλά όχι ανηγμένος κλιμακωτός.

Σε έναν πίνακα μπορούμε να εφαρμόσουμε **γραμμοπράξεις πινάκων** (στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών).

- Εναλλαγή δύο γραμμών. ($Γ_i \leftarrow\rightarrow Γ_j$)

- Πολλαπλασιασμό μίας γραμμής με ένα μη μηδενικό αριθμό κ. ($Γ_i \rightarrow κ\, Γ_i$)
- Αντικατάσταση μίας γραμμής με το άθροισμα αυτής της γραμμής και ενός πολλαπλάσιου μίας άλλης. ($Γ_i \rightarrow Γ_i + k\, Γ_j$)

Δύο πίνακες ονομάζονται **γραμμοϊσοδύναμοι** όταν ο ένας προέρχεται από τον άλλο εφαρμόζοντας γραμμοπράξεις. **Τα συστήματα που αντιστοιχούν σε γραμμοισοδύναμους πίνακες είναι ισοδύναμα (έχουν τις ίδιες λύσεις).**

Κατά την επίλυση γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο του Gauss εφαρμόζουμε στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος **γραμμοπράξεις πινάκων** ώστε να τον μετατρέψουμε σε κάποιον κλιμακωτό πίνακα.

Ας δούμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} &2u+v+w=5\\ &4u-6v=-2\\ &-2u+7v+2w=9 \end{aligned}$$

Το οποίο έχει επαυξημένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5\\ 4 & -6 & 0 & -2\\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right]$$

Εφαρμόζουμε τις γραμμοπράξεις

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5\\ 4 & -6 & 0 & -2\\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[Γ_3 \to Γ_3+Γ_1]{Γ_2 \to Γ_2-2Γ_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5\\ 0 & -8 & -2 & -12\\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow{Γ_3 \to Γ_3+Γ_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5\\ 0 & -8 & -2 & -12\\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Ο τελευταίος πίνακας αντιστοιχεί με το ακόλουθο, ισοδύναμο προς το αρχικό, σύστημα:

$$\begin{aligned} &2u+v+w=5\\ &-8v-2w=-12\\ &w=2 \end{aligned}$$

Η λύση αυτού του συστήματος είναι εύκολη, μιας και η τελευταία εξίσωση μας δίνει άμεσα τη τιμή της w. Αντικαθιστώντας τη λύση αυτή στη δεύτερη εξίσωση μπορούμε να βρούμε τη τιμή της λύσης του δεύτερου αγνώστου v. Τώρα, είναι απλό να αντικαταστήσουμε τις τιμές που έχουμε βρει στην πρώτη εξίσωση μπορούμε να βρούμε τελικά την τιμή της λύσης του τελευταίου αγνώστου u.

$$\begin{aligned} &w=2\\ &-8v=-12+2w=-12+4 \Leftrightarrow v=1\\ &2u=5-v-w=5-1-2=2 \Leftrightarrow u=1 \end{aligned}$$

Η αναδρομική αυτή διαδικασία ονομάζεται προς τα πίσω αντικατάσταση και μπορεί να εφαρμοστεί όταν ο επαυξημένος πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή.

Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του Gauss ξεκινάμε από την πρώτη γραμμή του επαυξημένου πίνακα. Το **οδηγό στοιχείο της γραμμής**, δηλαδή πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της, θα πρέπει να είναι στην πρώτη στήλη. Εάν δεν συμβαίνει αυτό κάνουμε εναλλαγή γραμμών ώστε να εμφανίζεται μη μηδενικό στοιχείο στη θέση της πρώτης γραμμής και πρώτη στήλης. Στη συνέχεια κάνοντας τις επιτρεπτές γραμμοπράξεις μηδενίζουμε τα στοιχεία του επαυξημένου πίνακα που βρίσκονται στην πρώτη στήλη κάτω από το οδηγό στοιχείο της πρώτης γραμμής.

Συνεχίζουμε στη δεύτερη γραμμή όπου εντοπίζουμε το οδηγό στοιχείο της. Εάν αυτό βρίσκεται στη δεύτερη στήλη (το πρώτο στοιχείο της το έχουμε ήδη μηδενίσει) εργαζόμαστε με γραμμοπράξεις ώστε να κάνουμε όλα τα στοιχεία που βρίσκονται στην ίδια στήλη με το οδηγό στοιχείο και κάτω από αυτό μηδενικά. Και συνεχίζουμε στην επόμενη γραμμή.

Εάν όμως για τη δεύτερη γραμμή το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο βρίσκεται σε άλλη στήλη (π.χ. τρίτη, τέταρτη) εξετάζουμε εάν στα υπόλοιπα στοιχεία της δεύτερης στήλης προς τα κάτω συμπεριλαμβάνεται κάποιο μη μηδενικό. Στην περίπτωση αυτή με κατάλληλη εναλλαγή γραμμών το κάνουμε οδηγό στοιχείο της δεύτερης γραμμής. Στο ακόλουθο παράδειγμα θα πρέπει να εναλλάξουμε τη δεύτερη με την τρίτη γραμμή.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 6 & 8 & 3 \end{array}\right]$$

Έτσι συνεχίζουμε με τη διαδικασία γραμμοπράξεων ώστε να μηδενίσουμε (εάν υπάρχουν) και τα άλλα μη μηδενικά στοιχεία της στήλης κάτω από αυτό το νέο οδηγό στοιχείο. Υπάρχει περίπτωση με τις γραμμοπράξεις που κάναμε με το οδηγό στοιχείο της πρώτης γραμμής να έχουν μηδενιστεί το δεύτερο στοιχείο της δεύτερης στήλης και τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από αυτά (και ίσως και το τρίτο στοιχείο της δεύτερης στήλης και τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από αυτά κ.λ.π.) . Σε μία τέτοια περίπτωση αναζητούμε στη δεύτερη γραμμή το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο στη στήλη του οποίου κάτω από αυτό δεν υπάρχουν μόνο μηδενικά στοιχεία. Θεωρούμε αυτό ως οδηγό στοιχείο της γραμμής και μηδενίζουμε με γραμμοπράξεις τα στοιχεία του πίνακα που βρίσκονται στην ίδια στήλη με αυτό και κάτω από αυτό. Στο ακόλουθο παράδειγμα θα πρέπει να θεωρήσουμε ως οδηγό στοιχείο της δεύτερης γραμμής το 1 πού βρίσκεται στη δεύτερη γραμμή αλλά στην τρίτη στήλη.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right]$$

Τη διαδικασία που κάναμε με τη δεύτερη γραμμή την επαναλαμβάνουμε και για τις επόμενες. Έτσι δημιουργούμε βήμα-βήμα τον ζητούμενο κλιμακωτό πίνακα.

Όπως έχουμε αναφέρει τα συστήματα που αντιστοιχούν σε γραμμοισοδύναμους πίνακες είναι ισοδύναμα (έχουν τις ίδιες λύσεις) και σε κάθε φάση της διαδικασίας με τις γραμμοπράξεις δημιουργούμε έναν γραμμοισοδύναμο με τον προηγούμενο πίνακα. Οπότε, το σύστημα που αντιστοιχεί στον επαυξημένο πίνακα σε κάθε φάση της διαδικασίας Gauss έχει τις ίδιες λύσεις με το αρχικό μας σύστημα.

1.5 Τεχνικές στη διαδικασία Gauss και συστήματα με ιδιομορφίες

Στη διαδικασία της απαλοιφής Gauss διευκολύνει τις πράξεις μας εάν το οδηγό στοιχείο που θα χρησιμοποιήσουμε για να μηδενίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης κάτω από αυτό είναι μονάδα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 5 & * \\ 1 & 1 & 1 & * \\ 4 & 6 & 8 & * \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & * \\ 2 & 2 & 5 & * \\ 4 & 6 & 8 & * \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 4\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & * \\ 0 & 0 & 3 & * \\ 0 & 2 & 4 & * \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & * \\ 0 & 2 & 4 & * \\ 0 & 0 & 3 & * \end{array}\right]$$

Η πρώτη εναλλαγή των γραμμών μας οδήγησε στο να έχουμε μονάδα ως οδηγό στοιχείο. Επίσης για να ξεπεράσουμε το πρόβλημα μηδενικού οδηγού στοιχείου χρησιμοποιούμε πάλι εναλλαγή γραμμών, όπως βλέπουμε στη δεύτερη εναλλαγή που κάναμε. (Τα * μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός).

Στην περίπτωση που με την εναλλαγή γραμμών δεν είναι δυνατό να έχουμε οδηγό στοιχείο μονάδα τότε διαιρούμε με τον κατάλληλο αριθμό όλα τα στοιχεία της γραμμής με την οποία εργαζόμαστε ώστε να δημιουργηθεί μονάδα στη θέση του οδηγού στοιχείου. Για παράδειγμα:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & * \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & * \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2/4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & * \\ 0 & 1 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 6 & 8 & * \end{array}\right]$$

Πολλές φορές καλούμαστε να λύσουμε συστήματα στα οποία εμφανίζονται μία ή περισσότερες παράμετροι. Θα πρέπει να διερευνήσουμε για ποιες τιμές της ή των παραμέτρων το σύστημα έχει μία, άπειρες ή καμία λύση. Εάν το οδηγό στοιχείο με το οποίο εργαζόμαστε εξαρτάται από την παράμετρο μπορούμε να παρακάμψουμε τη κατάσταση αυτή με την κατάλληλη εναλλαγή γραμμών, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & * \\ 0 & a-4 & 1 & * \\ 0 & 6 & 8 & * \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2/4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & * \\ 0 & 6 & 8 & * \\ 0 & a-4 & 1 & * \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2/6} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & * \\ 0 & 1 & 4/3 & * \\ 0 & a-4 & 1 & * \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - (a-4)\Gamma_2} \ldots.$$

Στην περίπτωση που επιλέξουμε να κάνουμε μονάδα το συγκεκριμένο οδηγό στοιχείο διαιρώντας με την έκφραση που περιέχει την παράμετρο θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι το οδηγός στοιχείο δεν είναι μηδενικό και να συνεχίσουμε.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & * \\ 0 & a-4 & 1 & * \\ 0 & 6 & 8 & * \end{array}\right] \xrightarrow[a \neq 4]{\Gamma_2 \to \Gamma_2/(a-4)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & * \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{a-4} & * \\ 0 & 6 & 8 & * \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 6\Gamma_2} \ldots.$$

Στη συνέχεια θα πρέπει να εξετάσουμε το ισοδύναμο σύστημα για τις τιμές της παραμέτρου που μηδενίζει το οδηγός στοιχείο δηλαδή εδώ για $a = 4$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 6 & 8 & * \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \ldots\ldots$$

Επίσης στην ακόλουθη περίπτωση:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & * \\ 2 & 2 & 5 & * \\ 4 & 4 & 8 & * \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 4\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & * \\ 0 & 0 & 3 & * \\ 0 & 0 & 4 & * \end{array}\right]$$

μπορούμε να οδηγηθούμε σε **συστήματα με άπειρες** λύσεις π.χ.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&4\\0&0&3&6\\0&0&4&8\end{array}\right]\xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3/4]{\Gamma_2\to\Gamma_2/3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&4\\0&0&1&2\\0&0&1&2\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&4\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

αφού το ισοδύναμο σύστημα είναι το

$$\begin{aligned}&x+y+z=4\\&z=2\end{aligned}$$

από όπου έχουμε ότι $z=2$ και $x=4-y-2=2-y$. Η κάθε επιλογή της τιμής του y μας δίνει μία νέα λύση του συστήματος, οπότε αφού έχουμε άπειρες επιλογές θα έχουμε άπειρο αριθμό λύσεων.

ή μπορούμε να έχουμε **ασυμβίβαστα συστήματα** π.χ.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&4\\0&0&3&6\\0&0&4&9\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2/3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&4\\0&0&1&2\\0&0&4&9\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-4\Gamma_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&4\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{array}\right]$$

αφού το ισοδύναμο σύστημα είναι το

$$\begin{aligned}&x+y+z=4\\&z=2\\&0z=1\end{aligned}$$

από όπου έχουμε ότι $0z=1$, το οποίο δεν μπορεί να ισχύσει για κανένα z.

Λυμένες Ασκήσεις στα Συστήματα:

1. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned}&x+2y-3z=4\\&x+3y+z=11\\&2x+5y-4z=13\end{aligned}$$

Λύση

Ο επαυξημένος πίνακας είναι

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&4\\1&3&1&11\\2&5&-4&13\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_2->\Gamma_2-\Gamma_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&4\\0&1&4&7\\2&5&-4&13\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_3->\Gamma_3-2\Gamma_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&4\\0&1&4&7\\0&1&2&5\end{array}\right]$$

Αφού μηδενίσαμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης που ευρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο, συνεχίζουμε με τα στοιχεία της δεύτερης στήλης.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&4\\0&1&4&7\\0&1&2&5\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_3->\Gamma_3-\Gamma_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&4\\0&1&4&7\\0&0&-2&-2\end{array}\right]$$

Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή, πράγμα που σημαίνει ότι το αντίστοιχο σύστημα

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=4\\ y+4z&=7\\ -2z&=-2 \end{aligned}$$

επιλύεται εύκολα. Πράγματι, από την τρίτη εξίσωση βρίσκουμε $z=1$, οπότε αντικαθιστώντας στην δεύτερη βρίσκουμε $y=3$, και από την πρώτη $x=1.$ Τελικά, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(x,y,z)=(1,3,1)$.

2. Ας δούμε ένα παράδειγμα όπου το σύστημα είναι ασυμβίβαστο. Να λυθεί το

$$\begin{aligned} 3x-y+2z&=7\\ x+2y-3z&=-1\,.\\ 5x+3y-4z&=2 \end{aligned}$$

Λύση

Ο επαυξημένος πίνακας είναι $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 7\\ 1 & 2 & -3 & -1\\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right]$.

Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 7\\ 1 & 2 & -3 & -1\\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1\\ 3 & -1 & 2 & 7\\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_2->\Gamma_2-3\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1\\ 0 & -7 & 11 & 10\\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3->\Gamma_3-5\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1\\ 0 & -7 & 11 & 10\\ 0 & -7 & 11 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3->\Gamma_3-\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1\\ 0 & -7 & 11 & 10\\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=-1\\ -7y+11z&=10\\ 0z&=-3 \end{aligned}$$

που είναι ασυμβίβαστο λόγω της εξίσωσης $0z=-3$.

3. Τέλος ας δούμε ένα παράδειγμα όπου υπάρχουν άπειρες λύσεις. Να λυθεί το σύστημα

$$x+2y-3z=6$$
$$2x-y+4z=2$$
$$4x+3y-2z=14.$$

Λύση

Ο επαυξημένος πίνακας είναι $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}\right]$.

Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών εύκολα βρίσκουμε ότι ο πίνακας μετατρέπεται σε κλιμακωτή μορφή

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma 3->\Gamma 3-4\Gamma 1]{\Gamma 2->\Gamma 2-2\Gamma 1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma 3->\Gamma 3-\Gamma 2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=6 \\ -5y+10z&=-10. \\ 0z&=0 \end{aligned}$$

Από την δεύτερη εξίσωση βρίσκουμε $y=2+2z$, οπότε η πρώτη δίνει $x=2-z$. Τελικά έχουμε τις άπειρες λύσεις $(x,y,z)=(2-z,2+2z,z)$, όπου το z διατρέχει τους πραγματικούς αριθμούς (το z είναι **παράμετρος** ή **'ελεύθερη μεταβλητή'**). Για παράδειγμα, αν z = 1, η αντίστοιχη λύση είναι (1,4,1).

4. Ομογενές σύστημα. Δίνεται το σύστημα

$$-x_1+2x_3+x_4=0$$
$$x_2-2x_3+x_4=0$$
$$2x_1+x_2-x_4=0$$

Λύση

Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών εύκολα βρίσκουμε ότι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος μετατρέπεται σε κλιμακωτή μορφή

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma 3->\Gamma 3+2\Gamma 1} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma 3->\Gamma 3-\Gamma 2} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

από την τελευταία γραμμή έχουμε $6x_3=0 \Rightarrow x_3=0$.

Οπότε οι δύο πρώτες εξισώσεις είναι οι $x_1-x_4=0, x_2+x_4=0$ από όπου προκύπτουν $x_1=x_4, x_2=-x_4$ από όπου προκύπτει η μονοπαραμετρική απειρία λύσεων) $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_4 & -x_4 & 0 & x_4 \end{bmatrix}^T, x_4 \in \mathbb{R}$.

5. Διερεύνηση συστήματος. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & \lambda x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες το παραπάνω σύστημα έχει: (i) μοναδική λύση, (ii) άπειρες λύσεις, (iii) καμία λύση και να βρεθούν οι λύσεις όποτε υπάρχουν.

Λύση.

Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος στον οποίο εφαρμόζουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda & 3 \\ 1 & \lambda & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - (\lambda-1)\Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda+6 & 2-\lambda \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)(\lambda+3) & 2-\lambda \end{array}\right]$$

Επομένως, το σύστημα έχει :

- Μοναδική λύση όταν $\lambda \neq 2$ *και* $\lambda \neq -3$ την $\left\{ x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{(3+\lambda)},\ x_3 = \frac{1}{(3+\lambda)} \right\}$ η οποία προκύπτει με εφαρμογή της προς τα πίσω αντικατάστασης.
- Άπειρες λύσεις όταν $\lambda = 2$ (Τρίτη γραμμή 0=0). Αντικαθιστώντας $\lambda = 2$ έχουμε από τη δεύτερη εξίσωση $x_2 = 1 - 4x_3$. Οπότε από την πρώτη εξίσωση αντικαθιστώντας παίρνουμε $x_1 = 5x_3$. Δηλαδή η λύση είναι η μονοπαραμετρική οικογένεια $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5x_3 & 1-4x_3 & x_3 \end{bmatrix}^T, x_3 \in \mathbb{R}$
- Καμία λύση όταν λ=-3. (Τρίτη γραμμή 0=5)

6. Ομογενές σύστημα διερεύνηση. Δίνεται το σύστημα

$$\lambda + 2\mu + \nu = 0$$
$$\lambda + \mu + \nu a = 0$$
$$\lambda + \mu + 2\nu = 0.$$

Να διερευνηθεί και να λυθεί το σύστημα.

Λύση

Ο επαυξημένος πίνακας

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

του συστήματος μετά στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών παίρνει τη μορφή

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha - 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 - a & 0 \end{array}\right].$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι το $\begin{cases} \lambda + 2\mu \quad + \nu = 0 \\ -\mu + (a-1)\nu = 0 \\ (2-a)\nu = 0 \end{cases}$

Για $a \neq 2$ το σύστημα έχει φανερά μοναδική λύση τη μηδενική.

Για $a = 2$ το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\lambda + 2\mu + \nu = 0$$
$$-\mu + \nu = 0$$

Από όπου έχουμε $\mu = \nu$ και $\lambda + 3\nu = 0 \Rightarrow \lambda = -3\nu$. Δηλαδή η απειρία λύσεων είναι η $[\lambda \quad \mu \quad \nu]^T = [-3\nu \quad \nu \quad \nu]^T$.

7. Θεωρείστε το παρακάτω σύστημα:.

$$\begin{array}{ccccccc} 6x & - & 12y & + & 6z & = & 6 \\ 3x & - & 5y & + & 5z & = & 13 \\ 2x & - & 6y & + & \alpha z & = & \beta \end{array}.$$

Βρείτε τιμές των α και β ώστε το σύστημα αυτό: (ι) Να μην έχει καμία λύση και (ιι) να έχει άπειρες λύσεις ιιι) έχει λύση και σε κάθε περίπτωση να προσδιοριστούν οι λύσεις (εφόσον υπάρχουν).

Λύση

Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος στον οποίο εφαρμόζουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς:

$$\begin{bmatrix} 6 & -12 & 6 & | & 6 \\ 3 & -5 & 5 & | & 13 \\ 2 & -6 & \alpha & | & \beta \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1/6} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 3 & -5 & 5 & | & 13 \\ 2 & -6 & \alpha & | & \beta \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \frac{1}{3}\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \frac{1}{2}\Gamma_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 10 \\ 0 & -2 & \alpha-2 & | & \beta-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 2\Gamma_2} \begin{bmatrix} 6 & -12 & 6 & | & 6 \\ 0 & 1 & 2 & | & 10 \\ 0 & 0 & \alpha+2 & | & \beta+18 \end{bmatrix}$$

i) Για α = -2 και $\beta \neq -18$ το σύστημα δεν θα έχει καμία λύση.

ii) Για α = -2 και για β = -18 το σύστημα θα έχει άπειρες λύσεις.
Για την απειρία λύσεων από τη δεύτερη γραμμή του πίνακα έχουμε $y = 10 - 2z$ και στη συνέχεια από την πρώτη
$x = 1 + 2y - z = 1 + 2(10 - 2z) - z = 21 - 5z$

iii) Για $a \neq -2$ το σύστημα έχει λύση από την τρίτη γραμμή έχουμε $z = \dfrac{\beta + 18}{\alpha + 2}$ από τη δεύτερη γραμμή του πίνακα έχουμε $y = 10 - 2z = 10 - 2\dfrac{\beta+18}{\alpha+2} = \dfrac{10\alpha - 2\beta - 16}{\alpha + 2}$ και στη συνέχεια από την πρώτη

$$x = 1 + 2y - z = 1 + 2\frac{10\alpha - 2\beta - 16}{\alpha+2} - \frac{\beta+18}{\alpha+2} = \frac{21\alpha - 5\beta - 48}{\alpha+2}.$$

8. Για ποιες τιμές του k το επόμενο σύστημα 1) έχει ακριβώς μια λύση, 2) δεν έχει λύσεις, 3) έχει άπειρες λύσεις;

$$\begin{aligned} &x + y - z = 1 \\ &3x + 4y + kz = 4 \\ &4x + (k+5)y + (k+3)z = 6. \end{aligned}$$

Λύση
Στο σύστημα μας εφαρμόζουμε απαλοιφή Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 3 & 4 & k & | & 4 \\ 4 & k+5 & k+3 & | & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 4\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 3\Gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k+3 & | & 1 \\ 0 & k+1 & k+7 & | & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - (k+1)\Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k+3 & | & 1 \\ 0 & 0 & -k^2 - 3k + 4 & | & 1-k \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to -\Gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k+3 & | & 1 \\ 0 & 0 & k^2 + 3k - 4 & | & k-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k+3 & | & 1 \\ 0 & 0 & (k+4)(k-1) & | & k-1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως το σύστημα έχει ακριβώς μια λύση όταν $k \neq -4$ και $k \neq 1$ την $z = \dfrac{1}{k+4}$, $y = \dfrac{1}{k+4}$ και $x = 1$.

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις όταν $k = 1$ την $z = z$, $y = 1 - 4z$ και $x = 5z$,.

Τέλος, το σύστημα δεν έχει λύσεις όταν $k = -4$.

9. Για ποιες τιμές του k το επόμενο σύστημα 1) έχει ακριβώς μια λύση, 2) δεν έχει λύσεις, 3) έχει άπειρες λύσεις;

$$x + (\kappa - 2)y = 1$$
$$(\kappa + 1)^2 x + (6\kappa - 2)y = 5\kappa + 1.$$

Σε κάθε περίπτωση που υπάρχουν λύσεις προσδιορίστε τις.

Λύση

Στο σύστημα μας εφαρμόζουμε απαλοιφή Gauss

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \kappa-2 & 1 \\ (\kappa+1)^2 & 6\kappa-2 & 5\kappa+1 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - (\kappa+1)^2 \Gamma_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \kappa-2 & 1 \\ 0 & 6\kappa-2-(\kappa-2)(\kappa+1)^2 & 5\kappa+1-(\kappa+1)^2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \kappa-2 & 1 \\ 0 & -\kappa^3+9\kappa & -\kappa^2+3\kappa \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \kappa-2 & 1 \\ 0 & -\kappa(\kappa-3)(\kappa+3) & -\kappa(\kappa-3) \end{array}\right]$$

Εάν $\kappa \neq 0, \kappa \neq 3, \kappa \neq -3$ έχουμε μοναδική λύση

$$y = \frac{1}{k+3}, x = 1 - (k-2)y = 1 - (k-2)\frac{1}{k+3} = \frac{5}{k+3}.$$

Εάν $\kappa = -3$το σύστημα είναι αδύνατο και δεν έχει λύσεις.

Εάν $\kappa = 0$ ή $\kappa = 3$έχουμε απειρία λύσεων την $[x, y]^T = [1 + 2y, y]^T$ για $\kappa = 0$ και την $[x, y]^T = [1 - y, y]^T$ για $\kappa = 3$.

10. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{array}{ccccccc} ax_1 & & & + & bx_3 & = & 2 \\ ax_1 & + & ax_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ & & ax_2 & + & 2x_3 & = & b \end{array}$$

Να βρεθούν τα a και b για τα οποία το παραπάνω σύστημα έχει: (i) μοναδική λύση, (ii) άπειρες λύσεις και (iii) καμία λύση.

Λύση

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ 0 & a & 4-b & 2 \\ 0 & a & 2 & b \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ 0 & a & 4-b & 2 \\ 0 & 0 & b-2 & b-2 \end{array}\right]$$

Από τον τελευταίο πίνακα επιγραμματικά συμπεραίνουμε τα εξής.

(i) Για $a=0$
  a. $b=2$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις
  b. $b\neq 2$ Το σύστημα δεν έχει καμία λύση

(ii) Για $a\neq 0$
  a. $b=2$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις
  b. $b\neq 2$ Το σύστημα έχει μοναδική

Οπότε πιο αναλυτικά

(i) Το σύστημα έχει μοναδική λύση όταν $b\neq 2$ και $a\neq 0$ την

$$x_3=1,\ \ x_2=\frac{b-2}{a},\ \ x_1=\frac{2-b}{a}$$

που προκύπτει από την προς τα πίσω αντικατάσταση.

(ii) Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις όταν $b=2$ και $a=0$ ο επαυξημένος πίνακας γίνεται

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Από όπου φανερά έχουμε $x_3=1$ οι άλλοι άγνωστοι μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή. Άρα το σύστημα έχει ως λύση την διπαραμετρική οικογένεια $\left[x_1,x_2,x_3\right]^T=\left[x_1,x_2,1\right]^T$)

(iii) όταν $b=2$ και $a\neq 0$ ο επαυξημένος πίνακας γίνεται

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 2 & | & 2 \\ 0 & a & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Από όπου προκύπτει η απειρία λύσεων που ικανοποιεί την $x_1=x_2=\dfrac{2-2x_3}{a}$.

(iv) Το σύστημα δεν έχει καμία λύση όταν $b\neq 2$ και $a=0$ διότι η τελευταία εξίσωση δίνει x_3 =1 ενώ η πρώτη $x_3=2/b$, που είναι διάφορο του 1.

11. Με τη χρήση επαυξημένου πίνακα και γραμμοπράξεων να βρεθεί, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a, πότε το σύστημα έχει μία, άπειρες ή καμία λύση;

$$\begin{aligned} (a+1)x+y+z &= a(a+1) \\ x+(a+1)y+z &= a^2(a+1) \\ x+y+(a+1)z &= a^3(a+1) \end{aligned}$$

Όταν υπάρχουν λύσεις να βρεθούν.

Λύση

Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος και εφαρμόζουμε γραμμοπράξεις:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & a(a+1) \\ 1 & a+1 & 1 & a^2(a+1) \\ 1 & 1 & a+1 & a^3(a+1) \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma1\leftrightarrow\Gamma3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & a^3(a+1) \\ 1 & a+1 & 1 & a^2(a+1) \\ \alpha+1 & 1 & 1 & a(a+1) \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma3\to\Gamma3-(a+1)\Gamma1]{\Gamma2\to\Gamma2-\Gamma1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & a^3(a+1) \\ 0 & a & -a & a^2(a+1)(1-a) \\ 0 & -a & 1-(a+1)^2 & a(a+1)(1-a^3-a^2) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & a^3(a+1) \\ 0 & a & -a & a^2(a+1)(1-a) \\ 0 & -a & -a(a+2) & a(a+1)(1-a^3-a^2) \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma3\to\Gamma3+\Gamma2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & a^3(a+1) \\ 0 & a & -a & a^2(a+1)(1-a) \\ 0 & 0 & -a(a+3) & a(a+1)(1-a^3-2a^2+a) \end{array}\right]$$

Εάν α=0 ο πίνακας γίνεται

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ από όπου έχουμε μία διπαραμετρική απειρία λύσεων $x=-y-z$.

Δηλαδή $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Εάν α=-3 στον πίνακα η τελευταία γραμμή δίνει $0z=114$ οπότε το σύστημα δεν έχει λύση.

Εάν $a\neq 0,-3$ Έχουμε μία λύση:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & a^3(a+1) \\ 0 & a & -a & a^2(a+1)(1-a) \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{(a+1)(1-a^3-2a^2+a)}{(a+3)} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & a^3(a+1) \\ 0 & 1 & -1 & a(a+1)(1-a) \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{a^4+3a^3+a^2-2a-1}{a+3} \end{array}\right]$$

που δίνει λύση

$$x=\frac{a^3+a^2-2a-2}{a+3}, y=\frac{2a^2+a-1}{a+3}, z=\frac{a^4+3a^3+a^2-2a-1}{a+3}$$

12. Ένας ιδιοκτήτης εστιατορίου σε μία αίθουσα έχει x τραπέζια τεσσάρων ατόμων, y τραπέζια έξι ατόμων και z τραπέζια οκτώ ατόμων και συνολικό αριθμό τραπεζιών 20. Όταν όλες οι θέσεις είναι κατειλημμένες η αίθουσα χωρά 108 πελάτες. Απομονώνοντας ένα τμήμα της αίθουσας και χρησιμοποιώντας μόνο τα μισά τραπέζια τεσσάρων ατόμων, τα μισά έξι ατόμων και το ένα τέταρτο τραπεζιών οκτώ ατόμων το εστιατόριο μπορεί να φιλοξενήσει 46 πελάτες όταν όλες οι θέσεις στα τραπέζια είναι κατειλημμένες. Καθορίστε τα x,y και z.

Λύση

Τα παραπάνω στοιχεία μας οδηγούν στο ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{aligned} &x+y+z=20 \\ &4x+6y+8z=108 \\ &4\frac{x}{2}+6\frac{y}{2}+8\frac{z}{4}=46 \end{aligned}$$

Κάνοντας τις κατάλληλες απλοποιήσεις οδηγούμαστε στο σύστημα:

$$\begin{aligned} &x+y+z=20 \\ &2x+3y+4z=54 \\ &2x+3y+2z=46 \end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας είναι $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 20 \\ 2 & 3 & 4 & 54 \\ 2 & 3 & 2 & 46 \end{array}\right]$.

Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών εύκολα βρίσκουμε ότι ο πίνακας μετατρέπεται σε κλιμακωτή μορφή

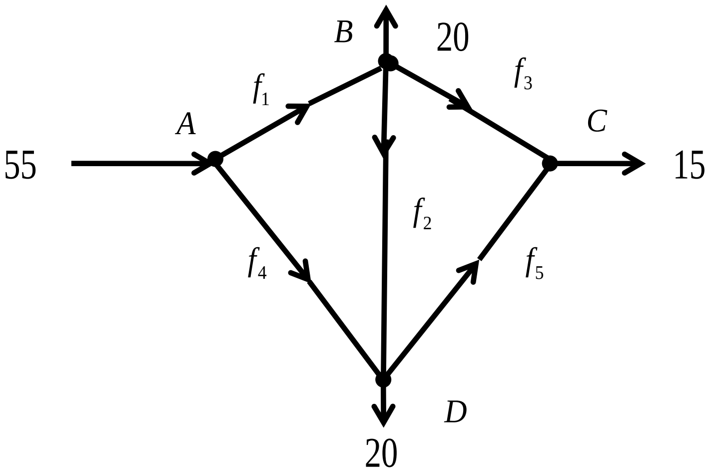
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 20 \\ 2 & 3 & 4 & 54 \\ 2 & 3 & 2 & 46 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma 3->\Gamma 3-2\Gamma 1]{\Gamma 2->\Gamma 2-2\Gamma 1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma 3->\Gamma 3-\Gamma 2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{array}\right].$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι

$$\begin{aligned} x+y+z&=20 \\ y+2z&=14\,. \\ -2z&=-8 \end{aligned}$$

το οποίο επιλύεται εύκολα. Πράγματι, από την τρίτη εξίσωση βρίσκουμε $z=4$, οπότε αντικαθιστώντας στην δεύτερη βρίσκουμε $y=6,$ και από την πρώτη $x=10.$ Τελικά, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(x,y,z)=(10,4,6).$

13. Ένα προτεινόμενο δίκτυο καναλιών ποτίσματος περιγράφεται από το ακόλουθο διάγραμμα. Σε αυτό το διάγραμμα βλέπουμε και τις ροές στους κόμβους A,B,C και D κατά τις περιόδους υψηλότερης ζήτησης (peak demand). Υπολογίστε τις πιθανές ροές. Εάν το κανάλι BC είναι κλειστό, βρείτε το εύρος ροής που πρέπει να διατηρηθεί στο κανάλι AD έτσι ώστε κανένα κανάλι να μην έχει ροή μεγαλύτερη του 30.



Λύση

Σε ένα δίκτυο (αγωγών ή σωλήνων ή δρόμων) ισχύει ο κανόνας των **κόμβων** όπου το **άθροισμα των εισερχόμενων ροών** θα πρέπει να είναι **ίσο** με το **άθροισμα των εξερχόμενων**.

Οπότε για το παραπάνω δίκτυο ισχύει:

$$\begin{array}{ll} \text{A} & f_1 + f_4 = 55 \\ \text{B} & f_1 - f_2 - f_3 = 20 \\ \text{C} & f_3 + f_5 = 15 \\ \text{D} & f_2 + f_4 - f_5 = 20 \end{array}$$

το οποίο είναι ένα σύστημα 4 γραμμικών εξισώσεων με έξι αγνώστους f_1, f_2, f_3, f_4, f_5.

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 55 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 20 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma 2 \to \Gamma 2 - \Gamma 1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 55 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 20 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma 4 \to \Gamma 4 + \Gamma 2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 55 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -15 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma 2 \to -\Gamma 2]{\Gamma 4 \to \Gamma 4 + \Gamma 3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 55 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Το σύστημα που αντιστοιχεί στον τελευταίο πίνακα είναι το εξής:

$$\begin{array}{l} f_1 + f_4 = 55 \\ f_2 + f_3 + f_4 = 35 \\ f_3 + f_5 = 15 \end{array}$$

Από όπου έχουμε :

f_1=55-f_4
$f_2 = 35 - f_3 - f_4 = 35 - 15 + f_5 - f_4 = 20 + f_5 - f_4$
$f_3 = 15 - f_5$

Και καταλήγουμε στην την απειρία λύσεων:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55\text{-}f_4 \\ 20 + f_5 - f_4 \\ 15 - f_5 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix}$$

Εάν το κανάλι BC είναι κλειστό έχουμε ότι $f_3 = 0$ οπότε υποχρεωτικά $f_5 = 15$. Το εύρος ροής στο κανάλι AD είναι f_4. Εάν επιθυμούμε κανάλι να μην έχει ροή μεγαλύτερη του 30 τότε $f_1 \le 30, f_2 \le 30, f_3 \le 30, f_4 \le 30, f_5 \le 30$.

Οπότε από την

$$f_1 \le 30 \Leftrightarrow 55\text{-}f_4 \le 30 \Leftrightarrow 25 \le f_4$$

και από την

$$f_2 \le 30 \Leftrightarrow 20\text{+}15\text{-}f_4 \le 30 \Leftrightarrow 5 \le f_4.$$

Συνοψίζοντας έχουμε ότι θα πρέπει $25 \le f_4 \le 30$.

14. Ένας ασθενής πρέπει να λαμβάνει καθημερινά 5 μονάδες βιταμίνης Α, 13 μονάδες βιταμίνης Β και 23 μονάδες βιταμίνης C. Στην αγορά υπάρχουν τρεις διαφορετικές εταιρείες που παράγουν χάπια με συνδυασμούς βιταμίνης Α,Β και C. Ο ακόλουθος πίνακας μας παρέχει τις μονάδες ανά βιταμίνη που περιέχει το χάπι κάθε εταιρείας.

	Βιταμίνη		
Εταιρεία	**A**	**B**	**C**
I	1	2	4
II	1	1	3
III	0	1	1

Βρείτε όλους τους συνδυασμούς από επιλογές χαπιών οι οποίες να παρέχουν ακριβώς την αναγκαία ποσότητα βιταμινών. (Δεν επιτρέπεται να λαμβάνονται μέρος χαπιών.) Στη συνέχεια καθορίστε τον αριθμό χαπιών από κάθε εταιρεία που πρέπει να λαμβάνει ο ασθενής ώστε να ελαχιστοποιείται το ημερήσιο κόστος θεραπείας εάν το χάπι της εταιρείας Ι κοστίζει 3 λεπτά του ευρώ, το χάπι της εταιρείας ΙΙ 2 λεπτά και το χάπι της εταιρείας ΙΙΙ 5 λεπτά του ευρώ.

Λύση

Έστω ότι ο ασθενής λαμβάνει x χάπια της εταιρείας Ι, y της εταιρείας ΙΙ και z της εταιρείας ΙΙΙ. Από τα στοιχεία του πίνακα οδηγούμαστε στο σύστημα:

$$x+y+0z=5$$
$$2x+y+z=13$$
$$4x+3y+z=23$$

Ο επαυξημένος πίνακας είναι $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 13 \\ 4 & 3 & 1 & 23 \end{array}\right]$.

Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών εύκολα βρίσκουμε ότι ο πίνακας μετατρέπεται σε κλιμακωτή μορφή

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 13 \\ 4 & 3 & 1 & 23 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma 3->\Gamma 3-4\Gamma 1]{\Gamma 2->\Gamma 2-2\Gamma 1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma 3->\Gamma 3-\Gamma 2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι

$$x+y=5$$
$$-y+z=3$$

το οποίο έχει την απειρία λύσεων: $(x,y,z)=(5-y,y,3+y)$.

Επειδή όμως μιλάμε για χάπια τα θα πρέπει να είναι μη αρνητικά. Οπότε, λαμβάνοντας υπόψη τη φυσική του προβλήματος και την παραπάνω λύση συμπεραίνουμε ότι $0 \le y \le 5$.

Το ημερήσιο κόστος θεραπείας, με βάση τα κόστη κάθε χαπιού, είναι $C=3x+2y+5z$. Αντικαθιστώντας την παραπάνω λύση έχουμε ότι $C=3(5-y)+2y+5(3+y)=30+4y$. Φανερά αυτή η ποσότητα ελαχιστοποιείται όταν $y=0$. Οπότε η ιδανική, από πλευράς κόστους, επιλογή χαπιών είναι η ακόλουθη: $(x,y,z)=(5,0,3)$.

15. Μια βιομηχανία κατασκευής φορητών ηλεκτρονικών υπολογιστών χρησιμοποιεί τέσσερα ρομποτικά μηχανικά συστήματα A,B,C,D για την συναρμολόγηση πέντε τύπων laptop T1,T2,T3,T4, T5. Ο αριθμός των ωρών που χρησιμοποιείται κάθε σύστημα για την συναρμολόγηση ενός laptop κάθε τύπου δίνεται από τον πίνακα:

	T1	T2	T3	T4	T5
A	1	1	2	2	1
B	2	1	3	1	0
C	0	2	1	1	1
D	1	1	0	0	3

Να βρεθεί πόσα laptop από κάθε τύπο μπορούν να συναρμολογηθούν (γραμμή παραγωγής) μέσα σε ένα οκτάωρο λειτουργίας της ημερήσιας βάρδιας, δεδομένου ότι η βιομηχανία κατάφερε όλα τα ρομποτικά μηχανήματα να χρησιμοποιούνται συνεχώς και τις 8 ώρες μίας βάρδιας. Σημείωση θα πρέπει να λάβετε υπόψη ότι μπορεί να βρείτε περισσότερες της μίας λύσεις και ότι οι άγνωστοι αντιπροσωπεύουν φυσικές ποσότητες.

Λύση

Μέσα σε ένα 8-ωρο συναρμολογούνται

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
laptop τύπου Τ1	laptop τύπου Τ2	laptop τύπου Τ3	laptop τύπου Τ4	laptop τύπου Τ5

Κάθε ρομποτικό μηχάνημα εργάζεται και τις 8 ώρες οπότε οδηγούμαστε στο σύστημα:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 8$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 8$$
$$2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$$
$$x_1 + x_2 = 3$$

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα (A|B) του συστήματος και τον μετασχηματίζουμε στην κλιμακωτή του μορφή:

$$[A\,|\,B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_4 \to -\Gamma_1 + \Gamma_4]{\Gamma_2 \to -2\Gamma_1 + \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \to 2\Gamma_2 + \Gamma_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_4 \to -2\Gamma_3 + \Gamma_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 16 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\Gamma_3 \to \Gamma_3(-1) \\ \Gamma_2 \to \Gamma_2(-1)}]{\Gamma_4 \to \Gamma_4/8}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Κάνοντας προς τα πίσω αντικατάσταση έχουμε:

$$x_4 = 2 - x_5$$
$$x_3 = 8 - 5x_4 - 3x_5 = 8 - 5(2 - x_5) - 3x_5 = -2 + 2x_5$$
$$x_2 = 8 - x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 8 - \left(-2 + 2x_5\right) - 3(2 - x_5) - 2x_5 = 4 - x_5$$
$$x_1 = 8 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 8 - (4 - x_5) - 2(-2 + 2x_5) - 2(2 - x_5) - x_5 = 4 - 2x_5$$

Επειδή όμως τα x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 παριστάνουν φυσικά μεγέθη, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$, άρα

$$x_4 = 2 - x_5 \geq 0 \Leftrightarrow x_5 \leq 2$$
$$x_3 = -2 + 2x_5 \geq 0 \Leftrightarrow x_5 \geq 1$$
$$x_2 = 4 - x_5 \geq 0 \Leftrightarrow x_5 \leq 4$$
$$x_1 = 4 - 2x_5 \geq 0 \Leftrightarrow x_5 \leq 2$$

Συνοψίζοντας έχουμε $1 \le x_5 \le 2$ δηλαδή έχουμε δυνατότητες γραμμών παραγωγής μία για $x_5 = 1$ και μία για $x_5 = 2$.

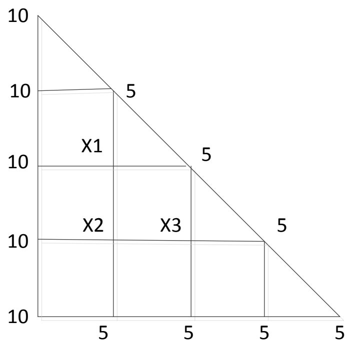
Για την $x_5 = 1$ έχουμε τη λύση

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - 2x_5 = 2 \\ x_2 &= 4 - 1 = 3 \\ x_3 &= -2 + 2 = 0 \\ x_4 &= 2 - 1 = 1 \\ x_5 &= 1 \end{aligned}$$

Για την $x_5 = 2$ έχουμε τη λύση

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - 4 = 0 \\ x_2 &= 4 - 2 = 2 \\ x_3 &= -2 + 4 = 2 \\ x_4 &= 2 - 2 = 0 \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

16. Θεωρείστε μια τριγωνική πλάκα, την οποία έχουμε χωρίσει νοητά σε πλέγμα όπως στο παρακάτω σχήμα. Η θερμοκρασία στα εξωτερικά σημεία της πλάκας είναι γνωστή και ζητούμε να υπολογίσουμε την θερμοκρασία στα εσωτερικά σημεία $X_i, i = 1, 2, 3$ της πλάκας.



Μια προσέγγιση από τη Φυσική υποδεικνύει ότι η θερμοκρασία σε κάθε εσωτερικό σημείο είναι ίση με τον μέσο όρο της θερμοκρασίας των 4 γειτονικών σημείων. Στηριζόμενοι στην παραπάνω ιδιότητα, να υπολογίσετε την θερμοκρασία στα σημεία x_1, x_2, x_3.

Λύση

Εφόσον η θερμοκρασία σε κάθε εσωτερικό σημείο είναι ίση με τον μέσο όρο της θερμοκρασίας των 4 γειτονικών σημείων

$$x_1 = \frac{1}{4}\left(10 + 5 + 5 + x_2\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(10 + x_1 + x_3 + 5\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{4}\left(x_2 + 5 + 5 + 5\right)$$

Το σύστημα γράφεται ισοδύναμα :

$$\left\{\begin{aligned} 4x_1 &= 20 + x_2 \\ 4x_2 &= 15 + x_1 + x_3 \\ 4x_3 &= x_2 + 15 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 0x_3 &= 20 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= 15 \\ 0x_1 - x_2 + 4x_3 &= 15 \end{aligned}\right\}$$

Αν πάρουμε τον επαυξημένο πίνακα θα έχουμε :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 0 & 20 \\ -1 & 4 & -1 & 15 \\ 0 & -1 & 4 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -1 & 15 \\ 4 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & -1 & 4 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_1 \leftarrow -\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -15 \\ 4 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & -1 & 4 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_2 \leftarrow \Gamma_2 - 4\Gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -15 \\ 0 & 15 & -4 & 80 \\ 0 & -1 & 4 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow -\Gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -15 \\ 0 & -1 & 4 & 15 \\ 0 & 15 & -4 & 80 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_2 \leftarrow -\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -15 \\ 0 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 15 & -4 & 80 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \leftarrow \Gamma_3 - 15\Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -15 \\ 0 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 0 & 56 & 305 \end{array}\right]$$

Άρα η λύση είναι η

$$x_3 = \frac{305}{56} \simeq 5.44643$$

$$x_2 = -15 + 4 \cdot x_3 = -15 + 4 \cdot \frac{305}{56} = \frac{-210 + 305}{14} = \frac{95}{14} \simeq 6.78571$$

$$x_1 = -15 + 4 \cdot x_2 - x_3 = -15 + 4 \cdot \frac{95}{14} - \frac{305}{56} = \frac{-840 + 1520 - 305}{14} = \frac{375}{56} \simeq 6.69643$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στο σύγγραμμα που διανέμεται και στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος. Το περιεχόμενο του αρχείου απλά αποτελεί περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα για δική του χρήση και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί και να μην αναπαραχθεί και διανεμηθεί για άλλο σκοπό.