

## Κεφάλαιο 3 Ορίζουσες

### 3.1 Βασικοί ορισμοί

Εάν  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  τότε ορίζουμε την **ορίζουσα του πίνακα** ως τον αριθμό

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Συμβολίζουμε την ορίζουσα του πίνακα και ως  $|A|$ .

Εάν  $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  τότε  $\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (-2)4 - 3 \cdot 1 = -8 - 3 = -11$

Εάν  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  τότε η **ορίζουσά του πίνακα** ισούται με

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \det(M_{11}) - a_{12} \det(M_{12}) + a_{13} \det(M_{13})$$

Για το στοιχείο  $a_{ij}$  η  $M_{ij}$  (έλασσων ορίζουσα του στοιχείου) είναι η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει εάν από τον  $A$  αφαιρέσουμε την  $i$  γραμμή και την  $j$  στήλη.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Εάν  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$  τότε

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} -6 & 9 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 + 15 + 150 = 165$$

Εδώ αναπτύξαμε την ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή. Θα μπορούσαμε να την αναπτύξουμε ως προς οποιαδήποτε άλλη γραμμή ή στήλη. Θα πρέπει όμως να θυμόμαστε ότι το πρόσημο του γινομένου κάθε στοιχείου ή με την ελάσσονα ορίζουσα του είναι το αποτέλεσμα  $(-1)^{i+j}$  όπου  $i, j$  η γραμμή και η στήλη του στοιχείου αντίστοιχα. Το ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς τη δεύτερη στήλη είναι:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Και για το παράδειγμά μας

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-6) \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 15 + 60 + 90 = 165.$$

Με παρόμοιο τρόπο αναπτύσσουμε τις ορίζουσες πινάκων 4x4, χρησιμοποιώντας τις ελάσσονες ορίζουσες τους (που είναι ορίζουσες 3x3), αλλά και τις ορίζουσες τετραγωνικών πινάκων μεγαλύτερης διάστασης.

### 3.2 Ιδιότητες οριζουσών

Για τις ορίζουσες πινάκων ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

**Ιδιότητα 1.** Η ορίζουσα τριγωνικού ή διαγώνιου πίνακα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγώνιου του. π.χ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) \cdot 1 = -12, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) \cdot 1 = -12, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 0 & -6 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) \cdot 1 = -12$$

**Ιδιότητα 2.** Αν A έχει μία γραμμή ή (στήλη) με μηδενικά μόνο στοιχεία τότε  $\det(A)=0$ .

$$\begin{vmatrix} 0 & 9 & 9 \\ 0 & -6 & 13 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

**Ιδιότητα 3.** Αν A έχει δύο γραμμές ή (στήλες) ίδιες ή ανάλογες (δηλαδή ένα προς ένα τα στοιχεία της μίας προς τα στοιχεία της άλλης δίνουν ως πηλίκο τον ίδιο αριθμό ή ισοδύναμα η μία είναι πολλαπλάσιο της άλλης) τότε  $\det(A)=0$ . π.χ.

$$\begin{vmatrix} 18 & 9 & 3 \\ 0 & -6 & 13 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \cdot 6 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 1 \\ 0 & -6 & 13 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Διότι η 1<sup>η</sup> και η 3<sup>η</sup> γραμμή είναι ανάλογες.

**Ιδιότητα 4.** Αν ανταλλάξουμε αμοιβαία δύο διαδοχικές γραμμές (ή διαδοχικές στήλες ενός πίνακα) A τότε ο πίνακας B που θα προκύψει έχει ορίζουσα  $\det(B) = -\det(A)$ . π.χ.

$$\begin{vmatrix} 18 & 9 & 3 \\ 0 & -6 & 13 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 18 & 9 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 18 & 9 & 3 \\ 0 & -6 & 13 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 13 \\ 18 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

Όπου κάναμε τις εναλλαγές  $2 \leftrightarrow 3$  γραμμή,  $1 \leftrightarrow 2$  γραμμή,  $2 \leftrightarrow 3$  γραμμή.

**Ιδιότητα 5.** Αν πολλαπλασιάσουμε μία γραμμή (ή μία στήλη) ενός πίνακα  $A$  με έναν αριθμό  $\kappa$  τότε ο πίνακας  $B$  που θα προκύψει έχει ορίζουσα  $\det(B) = \kappa \det(A)$ . π.χ.

$$\begin{vmatrix} 18 & 9 & 5 \\ 0 & -6 & 13 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \cdot 6 & 9 & 5 \\ 0 & -6 & 13 \\ 1 \cdot 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 0 & -6 & 13 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 3 & 3 \cdot 3 & 5 \\ 0 & -2 \cdot 3 & 13 \\ 1 & 1 \cdot 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 13 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

**Ιδιότητα 6.** Αν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε το πολλαπλάσιο μίας γραμμής (ή μία στήλης) ενός πίνακα  $A$  σε μία άλλη μία γραμμή (ή μία στήλη) του πίνακα  $A$  τότε ο πίνακας  $B$  που θα προκύψει έχει ορίζουσα  $\det(B) = \det(A)$ . π.χ. εάν σε συνέχεια του προηγούμενου παραδείγματος αφαιρέσω από την  $1^{\eta}$  γραμμή την  $3^{\eta}$  πολλαπλασιασμένη με 3 έχουμε

$$= 6 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 13 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 18 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 18 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 0 - (-2) \cdot 1) = 72$$

**Ιδιότητα 7.**  $\det(kA) = k^n \det(A)$  για  $n \times n$  πίνακα. π.χ

$$\begin{vmatrix} 18 & 9 & 3 \\ 0 & -6 & 12 \\ 6 & 3 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \cdot 6 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 5 \end{vmatrix} = 3^3 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 0 & (-2) & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

**Ιδιότητα 8.** Ορίζουσα  $n \times n$  μοναδιαίου πίνακα  $\det(I) = 1$

**Ιδιότητα 9.** Ορίζουσα  $n \times n$  μηδενικού πίνακα  $\det(\mathbf{0}) = 0$

**Ιδιότητα 10.** Ορίζουσα γινομένου δύο  $n \times n$  πινάκων  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

**Ιδιότητα 11.** Ορίζουσα  $n$ -ιοστής δύναμης  $n \times n$  πίνακα  $\det(A^n) = \det(A)^n$

Η απόδειξη αυτής της ιδιότητας γίνεται με τη χρήση της ιδιότητας 10 και επαγωγής. Πρώτα δείχνουμε ότι ισχύει για  $n=1$ . Φανερά διότι  $\det(A) = \det(A^1) = \det(A)^1 = \det(A)$ . Δεχόμαστε ότι ισχύει για  $n=\kappa$ , δηλαδή  $\det(A^\kappa) = \det(A)^\kappa$  και θα δείξουμε ότι ισχύει για  $n=\kappa+1$ . Πράγματι,  
 $\det(A^{\kappa+1}) = \det(A^\kappa A) = \det(A^\kappa) \det(A) = \det(A)^\kappa \det(A) = \det(A)^{\kappa+1}$  όπου είναι αυτό το οποίο θέλουμε να δείξουμε. Όποτε η επαγωγική απόδειξη είναι πλήρης.

π.χ.

$$\begin{vmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}^3 = 8^3$$

**Ιδιότητα 12.** Ορίζουσα ανάστροφου  $n \times n$  πίνακα  $\det(A^T) = \det(A)$

$$\begin{vmatrix} 18 & 9 & 3 \\ 0 & -6 & 12 \\ 6 & 3 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & 0 & 6 \\ 9 & -6 & 3 \\ 3 & 12 & 15 \end{vmatrix}$$

**Ιδιότητα 13.** Ορίζουσα αντίστροφου  $n \times n$  πίνακα  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \det(A)^{-1}$

Η απόδειξη αυτής της ιδιότητας είναι απλή. Γνωρίζουμε ότι

$$AA^{-1} = I \Leftrightarrow \det(AA^{-1}) = \det(I) \Leftrightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \det(A) = \frac{1}{\det(A)} = \det(A)^{-1}$$

Είδαμε σε παράδειγμα στο κεφάλαιο των πινάκων ότι ο

αντίστροφος του πίνακα  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$  είναι ο

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2/5 & -13/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 2/5 & -3/5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \text{ επίσης}$$

$$\det(A^{-1}) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{vmatrix} = -\frac{3}{25} - \frac{2}{25} = -\frac{5}{25} = -\frac{1}{5}. \text{ Τα αποτελέσματα}$$

είναι τα αναμενόμενα με βάση την ιδιότητα 13.

### 3.3 Εύρεση αντιστρόφου πίνακα με τη χρήση του προσαρτημένου

Η εύρεση του αντίστροφου ενός πίνακα μπορεί αν γίνει με τη χρήση των οριζουσών. Για τους  $2 \times 2$  πίνακες συνήθως μαθαίνουμε τον τύπο που μας δίνει τον αντίστροφο άμεσα, αν και προκύπτει από τη διαδικασία που ακολουθούμε για τους μεγαλύτερους πίνακες.

$$\text{Εάν } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ τότε } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

$$\text{Για παράδειγμα εάν } A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \text{ τότε } A^{-1} = -\frac{1}{30} \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 \\ 1/5 & -1/30 \end{bmatrix}.$$

Για τους  $3 \times 3$  πίνακες (αλλά και τους μεγαλύτερης διάστασης) υπολογίζουμε τον **πίνακα των αλγεβρικών συμπληρωμάτων** του πίνακα  $A$  που έχει ως  $ij$ -στοιχείο την ελάσσονα ορίζουσα του  $ij$ -στοιχείου του πίνακα  $A$  πολλαπλασιασμένη επί  $(-1)^{i+j}$  δηλαδή

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

όπου  $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ .

Ο ανάστροφος του πίνακα των αλγεβρικών συμπληρωμάτων ονομάζεται **προσαρτημένος πίνακας του  $A$**  και **συμβολίζεται ως  $adj(A)$** .

$$adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}.$$

**Ο αντίστροφος δίνεται από τον τύπο:**

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

**Από τον τύπο αυτό, είναι φανερό ότι ο αντίστροφος υπάρχει αν και μόνο αν η ορίζουσα του πίνακα δεν είναι μηδέν.**

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

**Παράδειγμα**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Έχουμε:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2(-3) - 1 = 4,$$

$$c_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad c_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad c_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$c_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad c_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad c_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$c_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3, \quad c_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1, \quad c_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Επομένως, ο προσαρτημένος πίνακας είναι ο

$$adj(A) = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \text{ και } A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

### 3.4 Επίλυση συστημάτων με τη μέθοδο του Crammer

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες για κάθε τετραγωνικό πίνακα

- Το σύστημα  $Ax=0$  έχει μοναδική λύση το  $x=0$ .
- Το σύστημα  $Ax=b$  έχει μοναδική λύση για κάθε διάνυσμα  $b$ .
- $\det(A) \neq 0$
- Ο πίνακας είναι μη ιδιάζων.

Η επίλυση γραμμικών συστημάτων  $n \times n$  μπορεί να γίνει και με τη χρήση οριζουσών με τη μέθοδο Crammer.

Έστω η πινακική αναπαράσταση του συστήματος  $Ax=b$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

Τότε ορίζουμε τους πίνακες  $A_i, i=1, \dots, n$  που προκύπτουν εάν αντικαταστήσουμε την  $i$  στήλη του  $A$  με το  $b$ .

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,i-1} & b_3 & a_{3,i+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες  $\det(A), \det(A_1), \dots, \det(A_n)$ . Εάν  $\det(A) = 0$  και κάποιο από τα  $\det(A_i) \neq 0$  τότε το σύστημα δεν έχει λύσεις. Εάν  $\det(A) = 0, \det(A_1) = 0, \dots, \det(A_n) = 0$  τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Στην περίπτωση που  $\det(A) \neq 0$  η λύση του συστήματος δίνεται από

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

#### Παράδειγμα

Έστω ένα σύστημα με πίνακες  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\text{Έχουμε } A_1 = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix},$$

Και  $\det(A) = -1, \det(A_1) = -1, \det(A_2) = -2, \det(A_3) = -3$  οπότε η λύση είναι

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-1}{-1} = 1, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-2}{-1} = 2, x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

## Ασκήσεις

1) Υπολογίστε τις ορίζουσες  $\begin{vmatrix} 2-i & 3 \\ 1+i & 1-i \end{vmatrix}, \begin{bmatrix} a & x & 2a-x \\ b & y & 2b-y \\ c & z & 2c-z \end{bmatrix}$

**Λύση:**

$$\text{Έχουμε } \begin{vmatrix} 2-i & 3 \\ 1+i & 1-i \end{vmatrix} = (2-i)(1-i) - 3(1+i) = -2 - 6i.$$

Αν στην τρίτη στήλη του πίνακα  $\begin{bmatrix} a & x & 2a-x \\ b & y & 2b-y \\ c & z & 2c-z \end{bmatrix}$  προσθέσουμε τη δεύτερη

στήλη, τότε προκύπτει ο πίνακας  $\begin{bmatrix} a & x & 2a \\ b & y & 2b \\ c & z & 2c \end{bmatrix}$ . Άρα

$$\begin{vmatrix} a & x & 2a-x \\ b & y & 2b-y \\ c & z & 2c-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & 2a \\ b & y & 2b \\ c & z & 2c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & x & a \\ b & y & b \\ c & z & c \end{vmatrix} = 0,$$

γιατί ο πίνακας  $\begin{bmatrix} a & x & a \\ b & y & b \\ c & z & c \end{bmatrix}$  έχει δυο ίσες στήλες.

Αποδείξτε ότι  $\begin{vmatrix} 1+a & b & c & d \\ a & 1+b & c & d \\ a & b & 1+c & d \\ a & b & c & 1+d \end{vmatrix} = 1+a+b+c+d.$

Προσθέτοντας στην πρώτη στήλη όλες τις υπόλοιπες στήλες προκύπτει ο

πίνακας  $\begin{bmatrix} 1+a+b+c+d & b & c & d \\ 1+a+b+c+d & 1+b & c & d \\ 1+a+b+c+d & b & 1+c & d \\ 1+a+b+c+d & b & c & 1+d \end{bmatrix}$ . Άρα

$$\begin{vmatrix} 1+a & b & c & d \\ 1 & 1+b & c & d \\ 1 & b & 1+c & d \\ 1 & b & c & 1+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a+b+c+d & b & c & d \\ 1+a+b+c+d & 1+b & c & d \\ 1+a+b+c+d & b & 1+c & d \\ 1+a+b+c+d & b & c & 1+d \end{vmatrix} =$$

$$(1+a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & 1+b & c & d \\ 1 & b & 1+c & d \\ 1 & b & c & 1+d \end{vmatrix}.$$

Στον τελευταίο πίνακα αφαιρούμε την πρώτη γραμμή από κάθε άλλη γραμμή, οπότε

προκύπτει ο  $\begin{bmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Αυτός είναι τριγωνικός και η ορίζουσά του είναι 1.

Τελικά,

$$\begin{vmatrix} 1+a & b & c & d \\ 1 & 1+b & c & d \\ 1 & b & 1+c & d \\ 1 & b & c & 1+d \end{vmatrix} = (1+a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & 1+b & c & d \\ 1 & b & 1+c & d \\ 1 & b & c & 1+d \end{vmatrix} =$$

$$(1+a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+a+b+c+d.$$

**2)** Για να είναι τρία σημεία  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  και  $(x_3, y_3)$  συνευθειακά πρέπει να ισχύει:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Δείξτε ότι τα σημεία με συντεταγμένες  $(a+b, c)$ ,  $(a+c, b)$ ,  $(b+c, a)$  είναι συνευθειακά.

**Λύση**

Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ a+c & b & 1 \\ b+c & a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Πράγματι,  $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ a+c & b & 1 \\ b+c & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & c & 1 \\ a+c+b & b & 1 \\ b+c+a & a & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & c & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 0$

3) Έστω  $A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ , όπου  $k \in \mathbb{R}$ .

- a. Υπολογίστε τον προσαρτημένο πίνακα  $\text{adj}(A)$ .  
 b. Για ποιες τιμές του  $k$  είναι ο  $A$  αντιστρέψιμος; Για τις τιμές αυτές να βρεθεί ο αντίστροφος του  $A$ .

Λύση

a.

$$C_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -5 \quad C_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 2 \quad C_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -1 \quad C_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} k & 4 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 9k - 5$$

$$C_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} k & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -8k + 5$$

$$C_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \quad C_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} k & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4k + 2$$

$$C_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} k & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3k - 2$$

Άρα,

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & 9k - 5 & -4k + 2 \\ 1 & -8k + 5 & 3k - 2 \end{bmatrix}.$$

- b. Για να είναι ο πίνακας  $A$  αντιστρέψιμος θα πρέπει  $\det(A) \neq 0$ .

$$\det(A) = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = k(-5) - (-2) + 1 = -5k + 3 \neq 0.$$

Ή εναλλακτικά

$$\det(A) = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} k & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -5k + 3 \neq 0$$

Άρα για  $k \neq \frac{3}{5}$  ο πίνακας έχει αντίστροφο. Επομένως,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{3-5k} \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & 9k-5 & -4k+2 \\ 1 & -8k+5 & 3k-2 \end{bmatrix}.$$

4. Να λύσετε το σύστημα  $Ax = b$ , όπου  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  και  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , αφού βρείτε πρώτα τον αντίστροφο του πίνακα  $A$ .

**Λύση:** Έχουμε:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2(-3) - 1 = 4,$$

$$C_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad C_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad C_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad C_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad C_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$C_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3, \quad C_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$\text{Επομένως, } \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{και } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Τώρα, } Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ δηλαδή } x_1 = -1, \quad x_2 = 1 \text{ και}$$

$$x_3 = 0.$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:**

Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στο σύγγραμμα που διανέμεται και στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος. Το περιεχόμενο του αρχείου απλά αποτελεί περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα για δική του χρήση και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί και να μην αναπαραχθεί και διανεμηθεί για άλλο σκοπό.