Κεφάλαιο 4 Διανυσματικοί Χώροι

4.1 Διανυσματικοί χώροι - Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες.

Θεωρούμε τρία διαφορετικά σύνολα:

α) Το σύνολο **διανυσμάτων (πινάκων με μία στήλη) με 4 στοιχεία** το οποίο συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^4$**.** Σε αυτό το σύνολο γνωρίζουμε ότι ισχύουν:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

και

$$\lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda b_1 \\ \lambda c_1 \\ \lambda d_1 \end{bmatrix}$$

β) Το σύνολο **πραγματικών πινάκων 2x2** το οποίο συμβολίζουμε με $M_{2,2}(\mathbb{R})$**.** Σε αυτό το σύνολο γνωρίζουμε ότι ισχύουν:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

και

$$\lambda \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda c_1 & \lambda d_1 \end{bmatrix}$$

γ) Το σύνολο **πολυωνύμων βαθμού το πολύ 4** το οποίο συμβολίζουμε με $P_3(\mathbb{R})$**.** Σε αυτό το σύνολο γνωρίζουμε ότι ισχύουν:

$$(a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1) + (a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2) = (a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x^2 + (c_1 + c_2)x + (d_1 + d_2)$$

και

$$\lambda(a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1) = (\lambda a_1)x^3 + (\lambda b_1)x^2 + (\lambda c_1)x + (\lambda d_1).$$

Τα τρία αυτά σύνολα έχουν στοιχεία το καθένα διαφορετικού είδους μαθηματικά αντικείμενα. Ωστόσο, τα σύνολα αυτά παρουσιάζουν χαρακτηριστικές ομοιότητες όταν εφαρμόζουμε στα στοιχεία τους τις δύο αυτές πράξεις, δηλαδή την πρόσθεση των στοιχείων τους και τον πολλαπλασιασμό αριθμού επί στοιχείου τους. Τα τρία αυτά σύνολα εφοδιασμένα με τις συγκεκριμένες αυτές πράξεις λέμε ότι αποτελούν διανυσματικούς χώρους και τα στοιχεία τους τα λέμε διανύσματα γιατί, όπως θα δούμε παρακάτω, τα στοιχεία τους ικανοποιούν κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες ως προς τις πράξεις αυτές.

Γενικότερα, θεωρούμε **ένα σύνολο** V **με στοιχεία μαθηματικά αντικείμενα** (διανύσματα, πίνακες, πολυώνυμα, συναρτήσεις κ.λ.π.) στο οποίο **έχουμε ορίσει δύο πράξεις**.

Μία εσωτερική πράξη μεταξύ των στοιχείων του δ.χ., την οποία θα ονομάζουμε γενικά «**πρόσθεση**»:

$$(+) : V \times V \to V$$

Και μία εξωτερική πράξη πραγματικών αριθμών με στοιχεία του δ.χ., την οποία θα ονομάζουμε γενικά «**βαθμωτό πολλαπλασιασμό**»:

$$(\cdot):\mathbb{R}\times V\to V$$

Το σύνολο αυτό V ονομάζεται διανυσματικός χώρος (δ.χ.) όταν ισχύουν οι ακόλουθες δέκα ιδιότητες.

$u+v\in V \quad \forall u,v\in V$	Κλειστότητα της πρόσθεσης
$u+v=v+u \quad \forall u,v\in V$	Αντιμεταθετικότητα
$\exists\ \mathbf{0}\in V:\ u+\mathbf{0}=u \quad \forall u\in V$	Ύπαρξη ουδετέρου πρόσθεσης
$\forall u\in V \ \ \exists -u\in V:\ u+(-u)=\mathbf{0}$	Ύπαρξη αντιθέτου πρόσθεσης
$(u+v)+w=u+(v+w) \ \forall u,v,w\in V$	Προσεταιριστικότητα πρόσθεσης
$au\in V \quad \forall u\in V$ και $\forall a\in\mathbb{R}$	Κλειστότητα του πολαπλασιασμού
$a(u+v)=au+av \quad \forall u,v\in V$ και $\forall a\in\mathbb{R}$	Πρώτος επιμεριστικός κανόνας
$(a+b)u=au+bu \quad \forall u\in V$ και $\forall a,b\in\mathbb{R}$	Δεύτερος επιμεριστικός κανόνας
$(ab)u=a(bu) \quad \forall u\in V$ και $\forall a,b\in\mathbb{R}$	Προσεταιριστικότητα πολαπλασιασμού
$1u=u \quad \forall u\in V$	

Σύμβολα :

$\forall$ για κάθε, $\exists$ υπάρχει, : τέτοιο ώστε, $\mathbf{0}$ το μηδενικό διάνυσμα,0 το μηδέν του πολ\μου.

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου τα ονομάζουμε γενικά **«διανύσματα».**

Η πρώτη πράξη λέγεται **εσωτερική** του συνόλου, γιατί εφαρμόζεται μεταξύ δύο στοιχείων του συνόλου και το αποτέλεσμα είναι στοιχείο του συνόλου ενώ η δεύτερη πράξη ονομάζεται **εξωτερική** γιατί εφαρμόζεται μεταξύ ενός πραγματικού αριθμού (ο οποίος δεν είναι στοιχείο του συνόλου) και ενός στοιχείου του συνόλου και το αποτέλεσμα είναι στοιχείο του συνόλου

Είναι δυνατό, ένα σύνολο να είναι διανυσματικός χώρος εάν εφοδιαστεί με κάποιες πράξεις (εσωτερική «πρόσθεση» και εξωτερική «βαθμωτό πολλαπλασιασμό») και να μην είναι εάν εφοδιαστεί με κάποιες άλλες. Ακόμη ένα σύνολο μπορεί να είναι δ.χ. εφόσον εφοδιαστεί και με κάποιο άλλο ζεύγος πράξεων να ισχύουν οι παραπάνω δέκα ιδιότητες και για τις πράξεις αυτές και να είναι δ.χ. όταν εφοδιάζεται και με αυτές.

- **Για να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο εφοδιασμένο με τις πράξεις είναι δ.χ. πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύουν όλες οι παραπάνω ιδιότητες.**
- **Για να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο εφοδιασμένο με τις πράξεις δεν είναι δ.χ. πρέπει να αποδείξουμε ότι έστω μία από παραπάνω ιδιότητες δεν ισχύει.**

Παραδείγματα συνόλων που, αποδεικνύοντας τις παραπάνω ιδιότητες, βλέπουμε ότι είναι δ.χ.:

1. Το σύνολο των n-διάστατων διανυσμάτων, το οποίο συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^n$, εφοδιασμένο με το σύνηθες άθροισμα διανυσμάτων και τον πολλαπλασιασμό αριθμού επί διάνυσμα.

2. Το σύνολο των m x n πινάκων, το οποίο συμβολίζουμε με M_{mn}, εφοδιασμένο με το σύνηθες άθροισμα πινάκων και τον πολλαπλασιασμό αριθμού επί πίνακα.
3. Ο τετριμμένος χώρος $V=\{\mathbf{0}\}$ με το άθροισμα και το γινόμενο αριθμών.
4. Το σύνολο των πολυωνύμων βαθμού το πολύ n, το οποίο συμβολίζουμε με P_n, εφοδιασμένο με το άθροισμα πουλωνύμων και τον πολλαπλασιασμό αριθμού επί πολυώνυμο.

   Εάν $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0$ και $q(x)=b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1 x+b_0$ τότε $p(x)+q(x)=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\ldots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$ και $m\cdot p(x)=m\cdot a_n x^n + m\cdot a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+m\cdot a_1 x + m\cdot a_0$
5. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου που ανήκουν σε συγκεκριμένη ευθεία $y=kx$ η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων:

   $V=\{(x,y): x\in\mathbb{R}, y=kx\}=\{(x,kx): x\in\mathbb{R}\}$.

   Ως πρόσθεση ορίζουμε

   $(x_1,kx_1)+(x_2,kx_2)=(x_1+x_2,kx_1+kx_2)=(x_1+x_2,k(x_1+x_2))\in V$

   και ως βαθμωτό πολλαπλασιασμό $a(x_1,kx_1)=(ax_1,akx_1)=(ax_1,kax_1)\in V$.

Συμβολισμός : Τα διανύσματα συνηθίζουμε να τα γράφουμε σε αγκύλες [ ]. Ωστόσο όταν αναφερόμαστε σε σημεία του επιπέδου ή του χώρου ($\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ αντίστοιχα) θα χρησιμοποιούμε τις παρενθέσεις όπως κάνουμε στη γεωμετρική προσέγγιση.

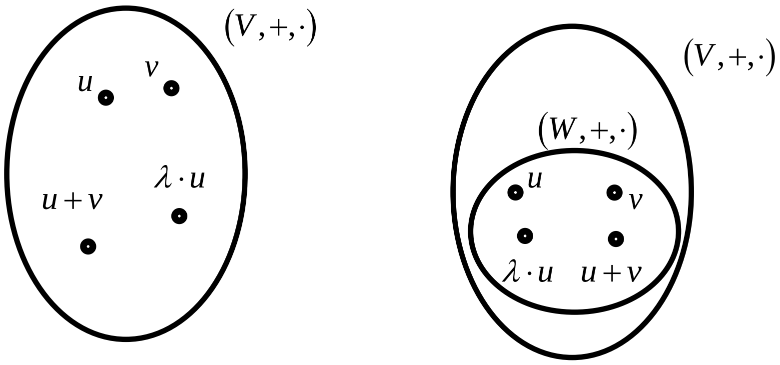
Παραδείγματα συνόλων που δεν είναι δ.χ.:

1. Ο χώρος $V=\{1\}$ με το άθροισμα και το γινόμενο αριθμών διότι 1+1=2 δεν ανήκει στο χώρο.
2. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου που ανήκουν σε συγκεκριμένη ευθεία $y=kx+m$ η οποία δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων. $V=\{(x,y): x\in\mathbb{R}, y=kx+m\}=\{(x,kx+m): x\in\mathbb{R}\}$. Ως πρόσθεση ορίζουμε $(x_1,kx_1+m)+(x_2,kx_2+m)=(x_1+x_2,kx_1+kx_2+2m)=(x_1+x_2,k(x_1+x_2)+2m)\notin V$ μιας και δεν ικανοποιεί την εξίσωση στης ευθείας.
3. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου που βρίσκονται στο πρώτο και στο δεύτερο τεταρτημόριο. $V=\{(x,y): y\geq 0\}$ δεν είναι δ.χ. εφόσον το (-1,-1) δεν ανήκει στο χώρο ενώ το (1,1) ανήκει.

Σε ένα διανυσματικό χώρο ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $a\mathbf{0}=\mathbf{0}\ \forall a\in\mathbb{R}$
2. $0v=\mathbf{0}\ \forall v\in V$
3. Αν $av=\mathbf{0}\Rightarrow a=0$ ή $v=\mathbf{0}$
4. $(-1)v=-v\ \forall v\in V$

4.2 Διανυσματικοί υπόχωροι



Έστω W ένα μη κενό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου V. Εάν το W, εφοδιασμένο με τις πράξεις του δ.χ., είναι και αυτό διανυσματικός χώρος τότε λέμε ότι είναι **διανυσματικός υπόχωρος** του δ.χ. V.

Για να δείξουμε ότι ένα υποσύνολο είναι **διανυσματικός υπόχωρος** ενός δ.χ. αρκεί να δείξουμε τη κλειστότητα των δύο πράξεων ως προς αυτόν το χώρο, δηλαδή:

$$u+v \in W \quad \forall u,v \in W \ , \ \lambda \cdot u \in W \quad \forall u \in W \text{ και } \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Οι σχέσεις αυτές, αποτελούν μία **ικανή και αναγκαία** συνθήκη. Δηλαδή, όταν ισχύουν το υποσύνολο είναι διανυσματικός υπόχωρος, ενώ όταν το υποσύνολο είναι διανυσματικός υπόχωρος για τα στοιχεία του ισχύουν οι σχέσεις αυτές.

Ισοδύναμα, μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in W \quad \forall u,v \in W \text{ και } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Παραδείγματα διανυσματικών υπόχωρων γνωστών δ.χ.

1. Για κάθε δ.χ. ο τετριμμένος χώρος δ.χ. $V=\{0\}$ είναι υπόχωρός του, όπως και ο ίδιος ο δ.χ. είναι υπόχωρος του εαυτού του.
2. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου που ανήκουν σε συγκεκριμένη ευθεία $y=kx$ η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων. $V=\{(x,y): x\in\mathbb{R}, y=kx\}=\{(x,kx): x\in\mathbb{R}\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. (το δείξαμε παραπάνω)
3. Το σύνολο των διαγώνιων πινάκων 2x2 είναι διανυσματικός υπόχωρος του δ.χ. M_{22}, Πράγματι $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{bmatrix}$ και $k\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka & 0 \\ 0 & kb \end{bmatrix}$
4. Η τομή $W_1 \cap W_2$ δύο διανυσματικών υπόχωρων W_1, W_2 ενός δ.χ. είναι διανυσματικός υπόχωρος του χώρου V.

   Έστω $u,v \in W_1 \cap W_2$ τότε έχουμε ότι $\left.\begin{matrix} u,v\in W_1 \Rightarrow \ u+v \in W_1 \\ u,v \in W_2 \Rightarrow \ u+v\in W_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u+v \in W_1 \cap W_2$

   Επίσης έστω $u \in W_1 \cap W_2$, $a \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε ότι

   $$\left.\begin{matrix} u\in W_1 \Rightarrow \ au \in W_1 \\ u,v \in W_2 \Rightarrow \ au\in W_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow au \in W_1 \cap W_2$$

5. Το σύνολο των σύνολο των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ 2 είναι διανυσματικός υπόχωρος του δ.χ. P_3. Πράγματι εάν $p(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ και $q(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$ τότε $p(x)+q(x)=(a_2+b_2)x^2++(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$ και $mp(x)=ma_2x^2+ma_1x+ma_0$.

Παραδείγματα υποσυνόλων γνωστών δ.χ. οι οποίοι δεν είναι διανυσματικοί υπόχωροι.

1. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου που ανήκουν σε συγκεκριμένη ευθεία $y=kx+m$ η οποία δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Το δείξαμε παραπάνω.
2. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου που βρίσκονται στο πρώτο και στο δεύτερο τεταρτημόριο. $V=\{(x,y):y\geq 0\}$ δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος εφόσον όταν το (x,y) ανήκει στο σύνολο το $(-x,-y)$ δεν ανήκει στο σύνολο V αφού $y\geq 0 \Rightarrow -y\leq 0$.

4.3 Γραμμικός συνδυασμός και span

Έστω $v_1,...,v_m \in V$ διανυσματικό χώρο

1. Ένας **γραμμικός συνδυασμός** των $v_1,...,v_m$ είναι ένα στοιχείο του V της μορφής $\lambda_1 v_1+...+\lambda_m v_m$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
2. Θα λέμε ότι τα στοιχεία $v_1,...,v_m$ **παράγουν** το χώρο V αν για κάθε $v\in V$ υπάρχουν $\lambda_1,...,\lambda_m \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $v=\lambda_1 v_1+...+\lambda_m v_m$. Συμβολίζουμε τότε ότι $V=span\{v_1,v_2,...,v_m\}$

Δηλαδή τα στοιχεία $v_1,...,v_m$ παράγουν το V αν κάθε στοιχείο του V είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1,...,v_m$.

Έστω $v_1,...,v_m \in V$ διανυσματικό χώρο τότε το $span\{v_1,v_2,...,v_m\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.

Παράδειγμα: Το διάνυσμα $\begin{bmatrix}-7\\7\\7\end{bmatrix}$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\begin{bmatrix}-1\\2\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\-3\\1\end{bmatrix}$ διότι ισχύει:

$$\begin{bmatrix}-7\\7\\7\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}-1\\2\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5\\-3\\1\end{bmatrix}$$

Παράδειγμα:
Για ποιους πραγματικούς αριθμούς a ισχύει ότι

$$[1,-1,a]^T \in span\{[2,1,1]^T,[-1,1,1]^T,[3,3,3]^T\};$$

Θα πρέπει να υπάρχουν $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ ώστε το $[1,-1,a]^T$ να γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των τριών διανυσμάτων, δηλαδή να ισχύει

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\\alpha\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}$$

Ζητάμε δηλαδή, το παραπάνω σύστημα να έχει λύση (να είναι συμβιβαστό). Ακολουθούμε τις διαδικασίες που μάθαμε στο κεφάλαιο επίλυσης συστημάτων και εφαρμόζουμε την μέθοδο Gauss θα κάνουμε γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&-1&3&1\\1&1&3&-1\\1&1&3&\alpha\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&3&-1\\2&-1&3&1\\1&1&3&\alpha\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&3&-1\\2&-1&3&1\\0&0&0&\alpha+1\end{array}\right],$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι πρέπει να ισχύει $\alpha=-1$ διότι σε αυτήν την περίπτωση το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, δηλαδή είναι συμβιβαστό. Σε αντίθετη περίπτωση έχουμε από την τρίτη εξίσωση $0\lambda_3=a+1\neq 0$ που δεν είναι δυνατό να ισχύει.

Παράδειγμα:

Έστω $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in M_{22}(\mathbb{R})$, τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

Δηλαδή, οι τέσσερεις αυτοί πίνακες παράγουν το χώρο αυτό πινάκων. Οπότε σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω:

$$M_{22}(\mathbb{R})=span\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}.$$

4.4 Γραμμική εξάρτηση, γραμμική ανεξαρτησία και βάση δ.χ.

Έστω ένα σύνολο στοιχείων $\{v_1,...,v_m\}$ενός δ.χ.. Εάν κάποιο από αυτά τα στοιχεία μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων τότε λέμε ότι τα στοιχεία $\{v_1,...,v_m\}$ είναι **γραμμικά εξαρτημένα**. Δηλαδή, θα πρέπει να υπάρχουν $\{\lambda_1,...,\lambda_{k-1},\lambda_{k+1}...,\lambda_m\}$ όπου $\lambda_i\in\mathbb{R}$ **όχι όλα μηδενικά** ώστε για κάποιο στοιχείο v_k να ισχύει

$$v_k=\lambda_1v_1+...+\lambda_{k-1}v_{k-1}+\lambda_{k+1}v_{k+1}+...+\lambda_mv_m.$$

Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα $\{v_1,...,v_m\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα όταν η σχέση $\lambda_1v_1+...+\lambda_mv_m=\mathbf{0}$, όπου $\lambda_i\in\mathbb{R}$ έχει (εκτός την προφανή μηδενική) και μία άλλη λύση $\{\lambda_1,...,\lambda_{k-1},\lambda_k,\lambda_{k+1}...,\lambda_m\}$ όπου $\lambda_i\in\mathbb{R}$ **όχι όλα μηδενικά**. Πράγματι, εάν ισχύει αυτό κάποιο $\lambda_k\neq 0$ οπότε το αντίστοιχο v_k θα μπορούσε να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων απλά λύνοντας την σχέση ως προς v_k, $v_k=-\lambda_1/\lambda_k\cdot v_1-...+\lambda_{k-1}/\lambda_k\cdot v_{k-1}-\lambda_{k+1}/\lambda_k\cdot v_{k+1}-...-\lambda_m/\lambda_k\cdot v_m$.

Αντίστροφα, εάν υπάρχουν $\{\lambda_1,...,\lambda_{k-1},\lambda_{k+1}...,\lambda_m\}$ όπου $\lambda_i\in\mathbb{R}$ **όχι όλα μηδενικά** ώστε για κάποιο στοιχείο v_k να ισχύει

$$v_k=\lambda_1v_1+...+\lambda_{k-1}v_{k-1}+\lambda_{k+1}v_{k+1}+...+\lambda_mv_m,$$

Τότε φανερά ισχύει $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_{k-1} v_{k-1} - v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + ... + \lambda_m v_m = \mathbf{0}$ που σημαίνει ότι η σχέση $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m = \mathbf{0}$, έχει μία λύση για την οποία $\lambda_k = -1 \neq 0$.

Αντίστοιχα, ένα σύνολο στοιχείων $\{v_1, ..., v_m\}$ του δ.χ. V είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** όταν κανένα από αυτά δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Δηλαδή, ισοδύναμα εάν ισχύει η σχέση $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m = \mathbf{0}$, όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$, τότε αναγκαστικά έχουμε:

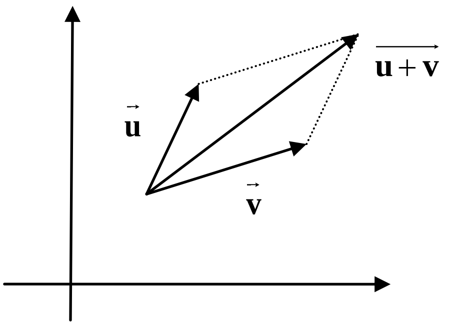
$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0.$$

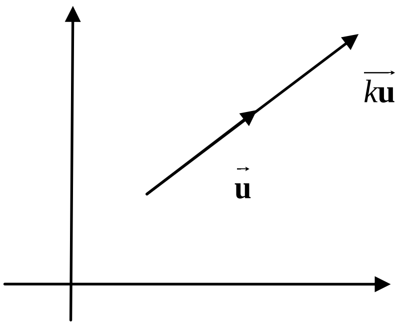
Είναι φανερό ότι εάν η παραπάνω σχέση $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m = \mathbf{0}$, είχε και μία άλλη λύση, εκτός της μηδενικής, για την οποία κάποιο $\lambda_k \neq 0$ τότε το αντίστοιχο v_k θα μπορούσε να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων απλά λύνοντας την σχέση ως προς v_k,

$$v_k = -\lambda_1 / \lambda_k \cdot v_1 - ... + \lambda_{k-1} / \lambda_k \cdot v_{k-1} - \lambda_{k+1} / \lambda_k \cdot v_{k+1} - ... - \lambda_m / \lambda_k \cdot v_m .$$

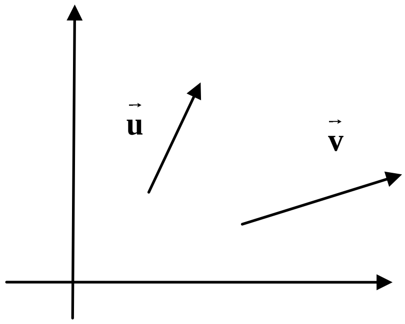
- Δύο διανύσματα του δ.χ. V είναι γραμμικά εξαρτημένα όταν το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου.
- Κάθε υποσύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων είναι επίσης σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων.
- Κάθε υπερσύνολο γραμμικά εξαρτημένων διανυσμάτων είναι σύνολο γραμμικά εξαρτημένων διανυσμάτων.
- Το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, γιατί $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ για κάθε λ πραγματικό.
- Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα v είναι γραμμικά ανεξάρτητο, γιατί $\lambda v = \mathbf{0}$ ισχύει εάν και μόνο αν $\lambda = 0$.

Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι το σύνολο των διανυσμάτων του επιπέδου, αλλά και του χώρου, είναι διανυσματικοί χώροι. Αυτό μπορεί να γίνει ορίζοντας τις κατάλληλες πράξεις και αποδεικνύοντας τις απαιτήσεις του ορισμού του διανυσματικού χώρου.

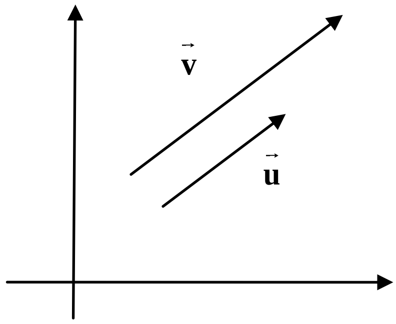




Δύο διανύσματα του επιπέδου είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν ανήκουν στην ίδια ή σε παράλληλες ευθείες.



γραμμικά ανεξάρτητα



γραμμικά εξαρτημένα

Ανάλογα μπορούμε να δούμε ότι δύο διανύσματα του χώρου είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο.

Παράδειγμα:

Τα διανύσματα $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αφού $\begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

Ενώ, τα διανύσματα $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αφού η σχέση

$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k \\ -k \\ 0 \\ 3k \end{bmatrix} \Rightarrow k = 3/2, k = 3$ κάτι που δεν μπορεί να συμβαίνει ταυτόχρονα.

Ένα σύνολο στοιχείων $\{v_1,...,v_m\}$ του V ονομάζεται **βάση** του V αν έχει τις ιδιότητες

a. το $\{v_1,...,v_m\}$ **παράγει** το V, δηλαδή κάθε στοιχείο του V είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1,...,v_m$.
b. αν ισχύει η σχέση $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m = \mathbf{0}$, όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$, τότε αναγκαστικά έχουμε $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$. Δηλαδή είναι **γραμμικά ανεξάρτητα**.

Ένας διανυσματικός χώρος μπορεί να έχει παραπάνω από μία βάσεις.

Διάσταση ενός χώρου (συμβολίζεται $\dim V$) είναι ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων της βάσης. Η διάσταση του τετριμμένου μηδενικού χώρου $V = \{\mathbf{0}\}$ είναι 0.

- Έστω $\{v_1,...,v_n\}$ μια βάση του V. Τότε για κάθε $v \in V$, υπάρχουν μοναδικά $\lambda_i \in \mathbb{R}$ με $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$.
- Έστω $\dim V = n$. Εάν $v_1,...,v_m \in V$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε $m \leq n$.
- Εάν W διανυσματικός υπόχωρος του δ.χ. V τότε $\dim W \leq \dim V$

Παράδειγμα:

Το σύνολο $\{e_1, e_2\}$, όπου $e_1 = [1,0]^T, e_2 = [0,1]^T$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^2$. Πράγματι,

a. το $\{e_1, e_2\}$ παράγει το $\mathbb{R}^2$, αφού αν $[\lambda_1, \lambda_2]^T \in \mathbb{R}^2$, τότε $[\lambda_1, \lambda_2]^T = [\lambda_1, 0]^T + [0, \lambda_2]^T = \lambda_1 [1,0]^T + \lambda_2 [0,1]^T$.

b. αν $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0,$ τότε $[\lambda_1, \lambda_2]^T = [0,0]^T \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$

Με παρόμοιο τρόπο, βλέπουμε ότι το σύνολο $\{e_1, ..., e_n\}$, όπου $e_1 = [1,0,...,0]^T, e_2 = [0,1,0,...,0]^T, ..., e_n = [0,...,0,1]^T$, είναι μια βάση του $\mathbb{R}^n$. Αυτή λέγεται η **συνήθης βάση ή κανονική βάση** του $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα:

Οι τέσσερεις πίνακες $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ που παράγουν τον χώρο πινάκων $M_{22}(\mathbb{R})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι διότι:

$$a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = 0, b = 0, c = 0, d = 0$$

Οπότε συμπεραίνουμε ότι οι πίνακες αυτοί αποτελούν και βάση του χώρου των πινάκων 2x2 $M_{22}(\mathbb{R})$ εφόσον (όπως είδαμε σε παραπάνω παράδειγμα) τον παράγουν επίσης. Επειδή οι πίνακες αυτοί είναι 4 η διάσταση του συγκεκριμένου χώρου είναι 4.

Παράδειγμα:

Το σύνολο των σύνολο των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ n είναι διανυσματικός υπόχωρος με διάσταση n+1.

Πράγματι, το σύνολο αυτό παράγεται από το σύνολο $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ αφού κάθε πολυώνυμο βαθμού το πολύ n $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω πολυωνύμων. Τα στοιχεία του συνόλου αυτού είναι γραμμικά ανεξάρτητα μιας και ισχύει:

$$\lambda_n x^n + \lambda_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \lambda_1 x + \lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda_n = \lambda_{n-1} = ... = \lambda_1 = \lambda_0 = 0$$

Για τους διανυσματικού χώρους διανυσμάτων με n συντεταγμένες ($\mathbb{R}^n$), ισχύουν:

- $\dim \mathbb{R}^n = n$
- Έστω ότι $v_1, ..., v_m \in \mathbb{R}^n$, τότε οι ακόλουθες τρεις προτάσεις ισχύουν:
  1. Αν τα $v_1, ..., v_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε έχουμε $m \le n.$
  2. Αν τα $v_1, ..., v_m$ παράγουν το $\mathbb{R}^n$, τότε έχουμε $m \ge n.$
  3. Αν τα $v_1, ..., v_m$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$, τότε έχουμε $m = n.$
- Έστω $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε οι ακόλουθες τρεις προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Το σύνολο $\{v_1,...,v_n\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^n$
2. Τα $\{v_1,...,v_n\}$ παράγουν το $\mathbb{R}^n$
3. Τα $\{v_1,...,v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

- Έστω $v_1,...,v_n \in \mathbb{R}^n$ και έστω Α ο $n\times n$ πίνακας του οποίου η στήλη i είναι το $v_i,\, i=1,...,n.$ Τότε τα $v_1,...,v_n$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν $\det A \neq 0.$
- Έστω $v_1,...,v_n \in \mathbb{R}^n$ και έστω Α ο $n\times n$ πίνακας του οποίου η στήλη i είναι το $v_i,\, i=1,...,n.$ Τότε τα $v_1,...,v_n$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν το ομογενές σύστημα $Ax=0$ έχει λύση μόνο τη μηδενική.
- Έστω Α $n\times n$ πίνακας εάν θεωρήσουμε ως την κάθε στήλη του ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$. Τότε τα $v_1,...,v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα εάν και μόνο εάν $\det A \neq 0.$ Όπου η στήλη i είναι το $v_i,\, i=1,...,n.$.
- Έστω $v_1,...,v_n \in \mathbb{R}^m$ και έστω Α ο $m\times n$ πίνακας του οποίου η στήλη i είναι το $v_i,\, i=1,...,n.$ Τότε τα $v_1,...,v_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα εάν και μόνο εάν η ορίζουσα κάθε $n\times n$ υποπίνακα του Α είναι ίση με 0.

Παράδειγμα:

Τα διανύσματα $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αφού, κάθε 2x2 υποορίζουσα είναι μηδενική. Πράγματι,

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

Τα διανύσματα $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διότι, υπάρχει μη μηδενική 2x2 υποορίζουσα $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$.

Για τους διανυσματικού χώρους διανυσμάτων με n συντεταγμένες ($\mathbb{R}^n$), μπορεί να εφαρμοστεί ο ακόλουθος αλγόριθμος για να ελέγξουμε τη γραμμική εξάρτηση ή ανεξαρτησία στοιχείων τους:

1. Έστω $v_1,...,v_k \in \mathbb{R}^n$. Σχηματίζω τον $n\times k$ πίνακα Α του οποίου η στήλη i είναι το $v_i,\, i=1,...,k.$
2. Μετασχηματίζω με κατάλληλες γραμμοπράξεις τον πίνακα Α σε πίνακα Β κλιμακωτής μορφής.
3. Βρίσκω ποιες στήλες του Β περιέχουν μη μηδενικό οδηγό στοιχείο.
4. **Οι αντίστοιχες στήλες του Α αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.**

Παράδειγμα:

Έστω V ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$, που παράγεται από τα διανύσματα $\left[1,1,0,0\right]^T, \left[1,0,1,0\right]^T, \left[3,1,2,0\right]^T, \left[0,0,1,1\right]^T$. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του *V*.

Σχηματίζουμε τον πίνακα με στήλες τα δοσμένα διανύσματα $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών βρίσκουμε την κλιμακωτή μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma 2 \to \Gamma 2 - \Gamma 1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma 3 \to \Gamma 3 + \Gamma 2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\xrightarrow{\Gamma 4 \to \Gamma 4 - \Gamma 3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Η πρώτη η δεύτερη και η τέταρτη στήλες του τελικού πίνακα περιέχουν μη μηδενικά οδηγά στοιχεία. Σύμφωνα με τα όσα είπαμε παραπάνω η πρώτη η δεύτερη και η τέταρτη στήλη του αρχικού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και εφόσον παράγουν το χώρο μια βάση του *V* είναι το σύνολο $\left\{\left[1,1,0,0\right]^T, \left[1,0,1,0\right]^T, \left[0,0,1,1\right]^T\right\}$. Δηλαδή έχουμε λοιπόν $\dim V = 3.$

Επίσης ισχύει :

Έστω $v_1,...,v_k \in \mathbb{R}^n$ παράγουν ένα διανυσματικό υπόχωρο V του $\mathbb{R}^n$. Και έστω Α ο $k \times n$ πίνακας του οποίου **η $\boldsymbol{i}$ γραμμή** είναι το $v_i, i=1,...,k.$ Εάν, μετασχηματίσω με κατάλληλες γραμμοπράξεις τον πίνακα Α σε πίνακα Β κλιμακωτής μορφής τότε, οι μη μηδενικές γραμμές του Β, **αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και παράγουν τον υπόχώρο V. Δηλαδή οι γραμμές αυτές αποτελούν βάση του υπόχωρου αυτού.**

Παράδειγμα:

Εάν τώρα, στον υπόχωρο του παραπάνω παραδείγματος, θεωρήσω πίνακα με γραμμές τα διανύσματα που τον παράγουν και με κατάλληλες γραμμοπράξεις τον μετασχηματίσω σε πίνακα κλιμακωτής μορφής:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma 3 \to \Gamma 3 - 3\Gamma 1]{\Gamma 2 \to \Gamma 2 - \Gamma 1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma 3 \to \Gamma 3 - 2\Gamma 2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma 4\leftrightarrow \Gamma 3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Εφόσον, η πρώτη, η δεύτερη και η τρίτη γραμμή είναι μη μηδενικές οπότε, σύμφωνα με τα όσα είπαμε παραπάνω οι γραμμές αυτές αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Επίσης παράγουν τον διανυσματικό υπόχωρο V και αποτελούν βάση του.

Παράδειγμα:

Δίνεται το υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$: $V=\{[2x+3y+z,x-z,y-z]^T,x,y,z\in\mathbb{R}\}$. Δείξτε ότι το σύνολο αυτό είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και βρείτε μία βάση και τη διάστασή του.

Επειδή

$$[2x+3y+z,x-z,y-z]^T=x[2,1,0]^T+y[3,0,1]^T+z[1,-1,-1]^T$$

έχουμε ότι το σύνολο V είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των $[2,1,0]^T,[3,0,1]^T,[1,-1,-1]^T$. Οπότε, $V=span\{[2,1,0]^T,[3,0,1]^T,[1,-1,-1]^T\}$ και σύμφωνα με τα όσα έχουμε πει είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

Για να βρούμε μία βάση του, αρκεί να θεωρήσουμε τον πίνακα με στήλες τις συντεταγμένες των παραπάνω γεννητόρων και να βρούμε μία κλιμακωτή μορφή του:

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

Όλες οι στήλες περιέχουν μη μηδενικά οδηγά στοιχεία. Σύμφωνα με τα όσα είπαμε παραπάνω, μία βάση του V είναι τα διανύσματα $[2,1,0]^T,[3,0,1]^T,[1,-1,-1]^T$ και η διάσπαση του είναι ίση προς 3. Άρα επειδή έχουμε 3 γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ αυτά αποτελούν βάση του και εφόσον ανήκουν στον χώρο V ο χώρος αυτός ταυτίζεται με τον , δηλαδή ισχύει $V=\mathbb{R}^3$.

Εναλλακτικά θα μπορούσα να θεωρήσω πίνακα με γραμμές αυτά τα διανύσματα και να κάνω γραμμοπράξεις:

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

Όλες οι γραμμές του τελικού πίνακα είναι μη μηδενικές οπότε σύμφωνα με τα όσα είπαμε παραπάνω και οι τρεις γραμμές του τελικού πίνακα

$[1,-1,-1]^T, [0,3,4]^T, [0,0,-2]^T$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου V που είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$. Εφόσον έχουμε 3 γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ αυτά αποτελούν βάση του και εφόσον ανήκουν στον χώρο V ο χώρος αυτός ταυτίζεται με τον , δηλαδή ισχύει $V = \mathbb{R}^3$.

4.5 Μηδενοχώρος, εικόνα και τάξη πίνακα.

Μηδενοχώρος πίνακα

Έστω ένας *mxn* πίνακας A τότε το σύνολο

$$N_A = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \; Ax = \mathbf{0} \right\}$$

ονομάζεται **μηδενοχώρος ή πυρήνας** του πίνακα A.

Είναι εύκολο να δούμε ότι N_A είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Έστω $u, v \in N_A$ τότε από τον ορισμό του συνόλου έχουμε ότι:

$$\left.\begin{array}{l} Au = 0 \\ Av = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Au + Av = 0 \Rightarrow A(u+v) = 0 \Rightarrow u + v \in N_A$$

$$\left.\begin{array}{l} Au = 0 \\ k \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow kAu = 0 \Rightarrow A\left(ku\right) = 0 \Rightarrow ku \in N_A$$

Η διάσταση του χώρου αυτού ονομάζεται **μηδενικότητα** του πίνακα και την συμβολίζουμε με

$$\nu\left(A\right) = \dim N_A.$$

Ισχύουν τα ακόλουθα:

- Εάν η μοναδική λύση ενός ομογενούς συστήματος $Ax = \mathbf{0}$ είναι η μηδενική τότε ισχύει $N_A = \{\mathbf{0}\}$ και $\nu\left(A\right) = 0.$
- Ένας nxn πίνακας A είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν $N_A = \{\mathbf{0}\}$

Παράδειγμα:

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Βρείτε τον πυρήνα του και τη μηδενικότητά του.

Ο ορισμός των στοιχείων του πυρήνα μας οδηγεί στο ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

με επαυξημένο

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma 3 -> \gamma 3 + 2\gamma 1} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma 3 -> \gamma 3 - \gamma 2} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

από το οποίο έχουμε $x_3 = 0, x_1 = x_4, x_2 = -x_4$ (απειρία λύσεων) την $[k,-k,0,k]^T = k\left[1,-1,0,1\right]^T$. Οπότε $\nu\left(A\right) = 1$ και $N_A = span\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$.

Παράδειγμα:

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Βρείτε τον πυρήνα του και τη μηδενικότητά του και με βάση αυτά εξετάστε εάν ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

Ο ορισμός των στοιχείων του πυρήνα μας οδηγεί σε ομογενές σύστημα με επαυξημένο πίνακα:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Κάνουμε τους ακόλουθους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Από τον τελικό πίνακα παρατηρούμε ότι, το ομογενές σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση οπότε $\nu\left(A\right) = 0.$ Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

Παράδειγμα:

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{bmatrix}$. Βρείτε τον πυρήνα του και τη μηδενικότητά του και με βάση αυτά εξετάστε εάν ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

Ο ορισμός των στοιχείων του πυρήνα μας οδηγεί σε ομογενές σύστημα με επαυξημένο πίνακα:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 0 \\ -6 & 3 & -9 & 0 \end{array}\right]$$

Κάνουμε τους ακόλουθους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 0 \\ -6 & 3 & -9 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 3\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Από τον τελικό πίνακα παρατηρούμε ότι, το ομογενές σύστημα έχει την ακόλουθη απειρία λύσεων :

$$[\frac{k-3l}{2},k,l]^T = k\left[1/2,1,0\right]^T + l\left[-3/2,0,1\right]^T = k/2\left[1,2,0\right]^T + l/2\left[-3,0,2\right]^T.$$

Βλέπουμε ότι ο χώρος λύσεων του συστήματος παράγεται από τα δύο διανύσματα $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\0\\2\end{bmatrix}$. Είναι φανερό ότι αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, ισχύει

$$k\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}+m\begin{bmatrix}-3\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow k=m=0$$

Οπότε έχουμε ότι $\nu\left(A\right)=2$ και $N_A = span\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\0\\2\end{bmatrix}\}$. Εφόσον ο πίνακας έχει μηδενικότητα 2 συμπεραίνουμε ότι δεν είναι αντιστρέψιμος.

Χώρος εικόνα πίνακα

Έστω ένας *mxn* πίνακας A τότε το σύνολο

$$R_A = \left\{b \in \mathbb{R}^m :\ Ax = b \text{ για κάποιο } x \in \mathbb{R}^n\right\}$$

ονομάζεται **εικόνα** του πίνακα A.

Είναι εύκολο να δούμε ότι R_A είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$. Έστω $u,v \in R_A$ τότε για κάποια $x,y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε ότι

$$\left.\begin{matrix}Ax=u\\Ay=v\end{matrix}\right\}\Rightarrow Ax+Ay=u+v \Rightarrow A(x+y)=u+v \Rightarrow u+v\in R_A$$

$$\left.\begin{matrix}Ax=u\\k\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\}\Rightarrow kAx=ku \Rightarrow A\left(kx\right)=ku \Rightarrow ku\in R_A$$

Η διάσταση του χώρου αυτού ονομάζεται **τάξη ή βαθμός (rank)** του πίνακα και τη συμβολίζουμε ως:

$$rank\left(A\right)=\dim R_A$$

Για την τάξη του πίνακα ισχύουν τα ακόλουθα:

- **Η τάξη ενός πίνακα είναι ίση με τον αριθμό των οδηγών στοιχείων που υπάρχουν στην κλιμακωτή μορφή που μπορούμε να φέρουμε τον πίνακα.**
- **Μία βάση του χώρου εικόνα είναι η βάση του διανυσματικού χώρου που προκύπτει εάν θεωρήσουμε τις στήλες του πίνακα (χώρος στηλών) ως διανύσματα. Οπότε, ως βάση παίρνουμε τα διανύσματα (στήλες του αρχικού πίνακα) που αντιστοιχούν σε στήλες με μη μηδενικά οδηγά στοιχεία στην τελική κλιμακωτή μορφή του πίνακα**

- Για κάποιον mxn πίνακα A $rank(A)+\nu(A)=n$
- Ένας nxn τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν $rank(A)=n$.
- Ένα σύστημα nxn $Ax=b$ έχει τουλάχιστον μία λύση εάν και μόνο εάν ο επαυξημένος πίνακας $[A|b]$ και ο πίνακας *A* έχουν την ίδια τάξη.

Παράδειγμα:

Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Για την εύρεση του χώρου εικόνα κάνουμε γραμμοπράξεις στον πίνακα

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma 3->\gamma 3+2\gamma 1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma 3->\gamma 3-\gamma 2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Επειδή ο τελικός έχει μη μηδενικά οδηγά στοιχεία στην $1^η$,$2^η$ και $3^η$ στήλη, η $1^η$,$2^η$ και $3^η$ στήλη του αρχικού πίνακα αποτελούν βάση του χώρου εικόνα και ο βαθμός του πίνακα είναι $rank(A)=3$.

Για τον συγκεκριμένο πίνακα είχαμε βρει $\nu(A)=1$, οπότε βλέπουμε ότι ικανοποιείται η σχέση $rank(A)+\nu(A)=n$.

Παράδειγμα:

Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Βρείτε μία βάση και τη διάσταση του χώρου εικόνα του πίνακα.

Για την εύρεση των διανυσμάτων της βάσης του χώρου εικόνα κάνουμε γραμμοπράξεις στον πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1]{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, .$$

Επειδή ο τελικός πίνακάς έχει μη μηδενικά οδηγά στοιχεία στην $1^η$,$2^η$ και $3^η$ στήλη η $1^η$,$2^η$ και $3^η$ στήλη του αρχικού πίνακα αποτελούν βάση του χώρου εικόνα και ο βαθμός του πίνακα είναι $rank(A)=3$. Για το συγκεκριμένο πίνακα είχαμε βρει $\nu(A)=0$, οπότε βλέπουμε ότι ικανοποιείται η σχέση $rank(A)+\nu(A)=n$.Επίσης συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος αφού $rank(A)=n$.

Παράδειγμα:

Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{bmatrix}$. Βρείτε μία βάση και τη διάσταση του χώρου εικόνα του πίνακα.

Για την εύρεση των διανυσμάτων της βάσης του χώρου εικόνα κάνουμε γραμμοπράξεις στον πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 3\Gamma_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Επειδή ο τελικός πίνακας έχει μη μηδενικά οδηγά στοιχεία μόνο στην 1η στήλη, η 1η στήλη του αρχικού πίνακα αποτελεί το μοναδικό στοιχείο της βάσης του χώρου εικόνα και ο βαθμός του πίνακα είναι $rank(A)=1$. Για το συγκεκριμένο πίνακα είχαμε βρει $\nu(A)=1$ οπότε, βλέπουμε ότι ικανοποιείται η σχέση $1+2=rank(A)+\nu(A)=n=3$. Επίσης συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος αφού $1=rank(A)\neq n=3$.

Παράδειγμα:
Σας δίνεται το σύστημα:

$$\begin{aligned} x+2y-3z &= 4 \\ x+3y+z &= 11 \\ 2x+5y-4z &= 13 \end{aligned}$$

Βρείτε την τάξη του πίνακα, την τάξη του επαυξημένου πίνακα του συστήματος και τη βάση της εικόνας. Επιχειρηματολογήστε για το αν το σύστημα έχει τουλάχιστον μία λύση.

Θα εργαστούμε με τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος από όπου μπορούμε να βγάλουμε όλα τα συμπεράσματα.

Ο επαυξημένος πίνακας είναι: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \end{array}\right]$.

Εκτελώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, εύκολα βρίσκουμε ότι ο πίνακας μετατρέπεται στην κλιμακωτή μορφή

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε τρία μη μηδενικά οδηγά στοιχεία τόσο όταν θεωρήσουμε μόνο το τμήμα που αντιστοιχεί στον πίνακα του συστήματος όσο και συνολικά τον πίνακα του επαυξημένου. Οπότε, $rank([A|b])=rank(A)=3$ και το σύστημα έχει τουλάχιστον μία λύση, στη συγκεκριμένη περίπτωση την $x=1, y=3, z=1$. Αφού μη μηδενικά στοιχεία υπάρχουν στην 1η,2η και 3η στήλη του τελικού πίνακα (όταν θεωρήσουμε μόνο το τμήμα που αντιστοιχεί στον πίνακα τους συτήματος), η βάση της εικόνας αποτελείται από την 1η,2η και 3η στήλη του αρχικού πίνακα. Εφόσον η διάσταση αυτού του υπόχωρου του $\mathbb{R}^3$ είναι τρία, συμπεραίνουμε ότι ο χώρος εικόνα συμπίπτει με τον $\mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα:
Σας δίνεται το σύστημα:

$$\begin{aligned} &x+2y-3z=6 \\ &2x-y+4z=2 \\ &4x+3y-2z=14 \end{aligned}$$

Βρείτε την τάξη του πίνακα, την τάξη του επαυξημένου πίνακα του συστήματος και τη βάση της εικόνας. Επιχειρηματολογήστε για το αν το σύστημα έχει τουλάχιστον μία λύση.
Θα εργαστούμε με τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος από όπου μπορούμε να βγάλουμε όλα τα συμπεράσματα.

Ο επαυξημένος πίνακας είναι $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}\right]$.

Εκτελώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, εύκολα βρίσκουμε ότι ο πίνακας μετατρέπεται στην κλιμακωτή μορφή:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Παρατηρούμε ότι, αφού έχουμε δύο μη μηδενικά οδηγά στοιχεία τόσο όταν θεωρήσουμε μόνο το τμήμα που αντιστοιχεί στον πίνακα του συστήματος όσο και συνολικά τον πίνακα του επαυξημένου, ισχύει $rank([A|b])=rank(A)=2$.

Συμπεραίνομε ότι, το σύστημα έχει τουλάχιστον μία λύση, στη συγκεκριμένη περίπτωση άπειρες. Αφού μη μηδενικά στοιχεία υπάρχουν στην 1η και 2η στήλη του τελικού πίνακα (όταν θεωρήσουμε μόνο το τμήμα που αντιστοιχεί στον πίνακα τους συτήματος), η βάση της εικόνας αποτελείται από την 1η και 2η στήλη του αρχικού πίνακα.

Παράδειγμα:
Σας δίνεται το σύστημα:

$$\begin{aligned} &x+2y-3z=-1 \\ &3x-y+2z=7 \\ &5x+3y-4z=2 \end{aligned}$$

Βρείτε την τάξη του πίνακα, την τάξη του επαυξημένου πίνακα του συστήματος και τη βάση της εικόνας. Επιχειρηματολογήστε για το αν το σύστημα έχει τουλάχιστον μία λύση.

Θα εργαστούμε με τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος από όπου μπορούμε να βγάλουμε όλα τα συμπεράσματα.

Ο επαυξημένος πίνακας είναι $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right]$.

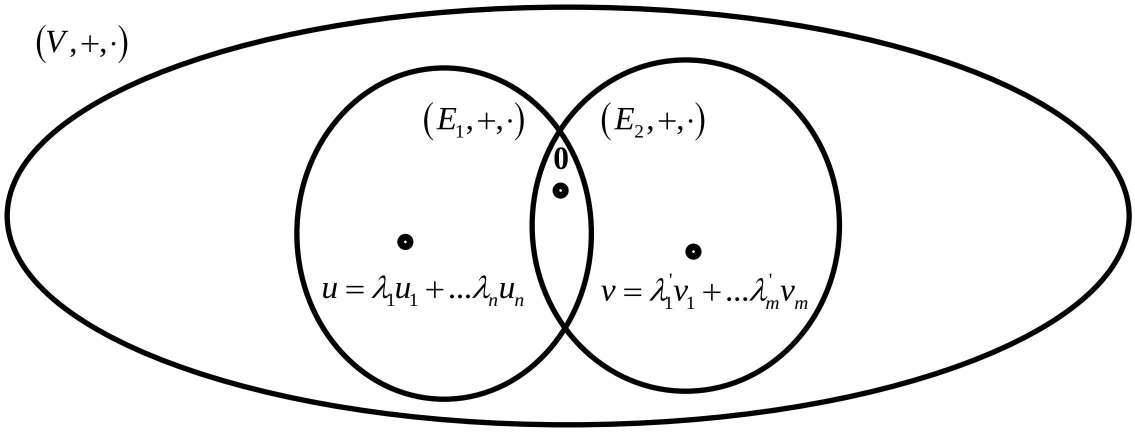
Εκτελώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών εύκολα βρίσκουμε ότι ο πίνακας μετατρέπεται στην κλιμακωτή μορφή:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right].$$

Παρατηρούμε ότι $3 = rank(\left[A\,|\,b\right]) \neq rank(A) = 2$ διότι έχουμε δύο μη μηδενικά οδηγά στοιχεία όταν θεωρήσουμε μόνο το τμήμα που αντιστοιχεί στον πίνακα του συστήματος και τρία και μη μηδενικά οδηγά στοιχεία όταν θεωρήσουμε συνολικά τον πίνακα του επαυξημένου. Με βάση τα όσα έχουμε πει, το σύστημα δεν έχει καμία λύση. Αφού μη μηδενικά στοιχεία υπάρχουν στην 1η και 2η στήλη του τελικού πίνακα (όταν θεωρήσουμε μόνο το τμήμα που αντιστοιχεί στον πίνακα τους συστήματος) η βάση της εικόνας αποτελείται από την 1η και 2η στήλη του αρχικού πίνακα.

Χώρος άθροισμα πίνακα

Έστω E_1, E_2 διανυσματικοί υπόχωροι του ενός δχ. V.



Θεωρούμε το σύνολο άθροισμα $E = E_1 + E_2$ το οποίο αποτελείται από στοιχεία του διανυσματικού χώρου V τα οποία μπορούν να γραφούν ως άθροισμα ενός στοιχείου του E_1 και ενός στοιχείου E_2. Έστω ο διανυσματικός υπόχωρος E_1 παράγεται από τα διανύσματα $u_1,u_2,...,u_n$ τότε για κάθε στοιχείο του u θα ισχύει $u=\lambda_1 u_1+...\lambda_n u_n$. Επίσης εάν ο διανυσματικός υπόχωρος E_2 παράγεται από τα διανύσματα $v_1,v_2,...,v_m$ τότε για κάθε στοιχείο του v θα ισχύει $v=\lambda_1^{'} v_1+...\lambda_m^{'} v_m$. Το τυχαίο στοιχείο h του χώρου αθροίσματος E μπορεί να γραφεί ως:

$$h=u+v=\lambda_1 u_1+...\lambda_n u_n+\lambda_1^{'} v_1+...\lambda_m^{'} v_m$$

Οπότε, το συγκεκριμένο σύνολο είναι διανυσματικός υπόχωρος του V ο οποίος παράγεται από το σύνολο των γεννητόρων $u_1,u_2,...,u_n,v_1,v_2,...,v_m$ των δ.χ. E_1,E_2. Η διάστασή του είναι τουλάχιστο ίση με το άθροισμα των διαστάσεων των δ.χ. E_1,E_2 και συγκεκριμένα ισχύει:

$$\dim(E)=\dim\left(E_1+E_2\right)=\dim\left(E_1\right)+\dim\left(E_2\right)-\dim\left(E_1\cap E_2\right)$$

Αν ισχύει $E_1\cap E_2=\varnothing$ τότε ο χώρος άθροισμα ονομάζεται **ευθύ άθροισμα** και συμβολίζουμε $E=E_1\oplus E_2$. Είναι φανερό ότι για το ευθύ άθροισμα ισχύει:

$$\dim(E)=\dim\left(E_1\oplus E_2\right)=\dim\left(E_1\right)+\dim\left(E_2\right)$$

Παράδειγμα:

Έστω E_1 και E_2 οι παρακάτω διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$,

$$E_1=\left\{[x_1,x_2,x_3,x_4]^T\left|x_2-2x_3+x_4=0\right.\right\}$$

$$E_2=\left\{[x_1,x_2,x_3,x_4]^T\left|x_1=x_4,x_2=2x_3\right.\right\}.$$

Βρείτε τη διάσταση καθενός από τους υποχώρους $E_1,\ E_2,\ E_1+E_2$

Έστω $[x_1,x_2,x_3,x_4]^T$ ένα τυχαίο διάνυσμα του E_1. Έχουμε

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\2x_3-x_4\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\2\\1\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}=x_1n_1+x_3n_2+x_4n_3.$$

Δηλαδή τα διανύσματα n_1, n_2, n_3 είναι γεννήτορες του E_1. Αυτά είναι και γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, υπολογίζουμε θεωρούμε πίνακα με στήλες τα διανύσματα n_1, n_2, n_3. Έτσι,

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-2\Gamma_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\Gamma_4\to\Gamma_4+\Gamma_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Επειδή η $1^η$,$2^η$ και $3^η$ στήλη του τελικού πίνακα έχει μη μηδενικά οδηγά στοιχεία τα διανύσματα που έχουν ως στοιχεία την $1^η$,$2^η$ και $3^η$ στήλη του αρχικού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητα (εναλλακτικά, επειδή ο βαθμός του τελευταίου πίνακα είναι 3). Δηλαδή τα n_1, n_2, n_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς αποτελούν μια βάση του E_1, οπότε $\dim E_1 = 3$.

Όμοια διαπιστώνουμε ότι για το $[x_1,x_2,x_3,x_4]^T\in E_2$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 u_1 + x_3 n_2 ,$$

άρα $E_2 = \text{span}\{u_1, n_2\}$.

Επίσης τα u_1, n_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα (αποδεικνύεται πολύ εύκολα με τη χρήση του ορισμού)

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ 2b \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = b = 0$$

οπότε αποτελούν βάση του E_2. Άρα $\dim E_2 = 2$.

Τα στοιχεία του χώρου αθροίσματος $E_1 + E_2$ αποτελούνται από στοιχεία τα οποία μπορούν να γραφούν ως άθροισμα ενός στοιχείου του E_1 και ενός στοιχείου E_2. Το συγκεκριμένο σύνολο εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ διότι ισχύει $E_1 + E_2 = span\{ n_1, n_2, n_3, u_1, u_2 \}$. Επειδή τα n_2 και $u2$ είναι τα ίδια διανύσματα έχουμε τελικά (για αυτήν την άσκηση) ότι $E_1 + E_2 = span\{ n_1, n_2, n_3, u_1 \}$. Τώρα ορίζουμε τον πίνακα με στήλες τα διανύσματα αυτά και τον μετασχηματίζουμε σε κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma 2 \leftrightarrow \Gamma 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma 3 \leftrightarrow \Gamma 3 - 2\Gamma 2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma 4 \leftrightarrow \Gamma 4 + \Gamma 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αφού κάθε στήλη έχει κάποιο μη μηδενικό στοιχείο τα n_1, n_2, n_3, u_1 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα συμπεραίνομε ότι $\dim(E_1 + E_2) = 4$.

Εναλλακτικά επειδή $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε την γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων.

Εφόσον η διάσταση αυτού του υπόχωρου του $\mathbb{R}^4$ είναι 4, συμπεραίνουμε ότι ο χώρος άθροισμα συμπίπτει με τον $\mathbb{R}^4$.

Για το άθροισμα $E_1 + E_2$ σύμφωνα με όσα έχουμε υπολογίσει παραπάνω έχουμε:

$$\begin{array}{l}\dim(E_1+E_2)=\dim E_1+\dim E_2-\dim(E_1\cap E_2)\Rightarrow 4=3+2-\dim(E_1\cap E_2)\Rightarrow \\ \dim(E_1\cap E_2)=1\end{array}.$$

Οπότε, επειδή $E_1 \cap E_2 \neq \{\mathbf{0}\}$, ο $\mathbb{R}^4$ **δεν** είναι το ευθύ άθροισμα των υπόχωρων E_1, E_2.

Ασκήσεις πάνω στους διανυσματικούς χώρους

1. Εξηγείστε γιατί κάθε ένα από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ *δεν* είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

- $\left\{[x,y,z]^T \,|\, z \geq 0\right\}$
- $\left\{[x,y,z]^T \,|\, y - z = 1\right\}$

Λύση

Το σύνολο W= { [*x,y,z*]^T | z $\geq$0 } δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, γιατί αν θεωρήσουμε το $[2,0,1]^T \in$W, τότε $-[2,0,1]^T = [-2,0,-1]^T \notin$W.

Το σύνολο U= { [*x,y,z*]^T | *y* – *z* = 1 } δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, γιατί το μηδενικό διάνυσμα δεν ανήκει στο U.

2. Εξετάστε ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ και δικαιολογείστε την απάντησή σας.

1. $U = \left\{\left[x,y,z\right]^T \middle| 3x+5y+z=1\right\}$
2. $V = \left\{\left[x,y,z\right]^T \middle| 3x^2+5y+z=0\right\}$
3. $W = \left\{\left[x,y,z\right]^T \middle| 5x+3y+z=0\right\}$.

Λύση

1. Το *U* δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ γιατί δεν περιέχει το $\left[0,0,0\right]^T$.
2. Το *V* δεν είναι υπόχωρος. Πράγματι, έχουμε για παράδειγμα $\left[1,0,-3\right]^T \in V$ αφού $3\cdot 1^2+5\cdot 0+(-3)=0$, αλλά $-\left[1,0,-3\right]^T=\left[-1,0,3\right]^T \notin V$ αφού $3\cdot(-1)^2+5\cdot 0+3=6\neq 0.$
3. Τα *W* είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Πράγματι, για κάθε $\left[x,y,z\right]^T, \left[x',y',z'\right]^T \in W$,

$$\left[x,y,z\right]^T+\left[x',y',z'\right]^T=\left[x+x',y+y',z+z'\right]^T$$

και

$5(x+x')+3(y+y')+(z+z')=$

$(5x+3y+z)+(5x'+3y'+z')=0+0=0.$

Άρα $(x,y,z)+(x',y',z')\in W.$

Και , για κάθε $k\in\mathbb{R}$ και $[x,y,z]^T\in W$,

$k[x,y,z]^T=[kx,ky,kz]^T$

και

$5(kx)+3(ky)+(kz)=$

$k(5x+3y+z)=0.$

Οπότε $k(x,y,z)\in W.$

Ισοδύναμα, για κάθε $k,l\in\mathbb{R}$ και $[x,y,z]^T,[x',y',z']^T\in W$,

$k[x,y,z]^T+l[x',y',z']^T=[kx+lx',ky+ly',kz+lz']^T$

και

$5(kx+lx')+3(ky+ly')+(kz+lz')=$

$k(5x+3y+z)+l(5x'+3y'+z')=0+0=0.$

Άρα $k(x,y,z)+l(x',y',z')\in W.$

3. Έστω P_2 ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων που έχουν βαθμό το πολύ 2. Αποδείξτε ότι μια βάση του P_2 είναι το σύνολο $\{1,\ t-1,(t-1)^2\}$ και βρείτε την παράσταση του $5t^2+3t+2$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της παραπάνω βάσης.

Λύση

Ξέρουμε ότι η διάσταση του P_2 είναι 3. Αρχικά πρέπει να αποδείξουμε ότι το σύνολο $\{1,\ t-1,(t-1)^2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Θα το κάνουμε με τη χρήση του ορισμού:

$a1+b(t-1)+c(t-1)^2=0\Leftrightarrow$

$ct^2+(b-2c)t+(a-b+c)\Leftrightarrow$

$c=b-2c=a-b+c=0\Leftrightarrow$

$a=b=c=0.$

Επίσης πρέπει να δείξουμε ότι τα τρία αυτά στοιχεία παράγουν το χώρο. Δηλαδή, πρέπει να δείξουμε ότι για το τυχαίο στοιχείο του χώρου $\mu+\lambda t+\kappa t^2$ υπάρχουν $a,b,c\in$ τέτοια ώστε $a1+b(t-1)+c(t-1)^2=\mu+\lambda t+\kappa t^2$.

Οπότε από $a1+b(t-1)+c(t-1)^2=(a-b+c)+(b-2c)t+ct^2=\mu+\lambda t+\kappa t^2$ συμπεραίνομε ότι

$$c=\kappa,\ b-2c=\lambda,\ a-b+c=\mu\,.$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε ότι για το τυχαίο στοιχείο του χώρου $\mu+\lambda t+\kappa t^2$

$c=\kappa,$

$b=\lambda+2c=2\kappa+\lambda,$.

$a=\mu+b-c=\mu+2\kappa+\lambda-\kappa=+\kappa+\lambda+\mu$

το τυχαίο στοιχείο του χώρου $\mu+\lambda t+\kappa t^2$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των πολυωνύμων αυτών οπότε αυτά παράγουν το χώρο.

Για το δεύτερο ερώτημα, λύνουμε την εξίσωση

$a1 + b(t-1) + c(t-1)^2 = 2 + 3t + 5t^2$

δηλαδή την

$ct^2 + (b-2c)t + (a-b+c) = 5t^2 + 3t + 2.$

Αυτή ισοδυναμεί με το σύστημα $c = 5, b - 2c = 3, a - b + c = 2$. Άρα $a = 10, b = 13, c = 5.$

4. Αφού αποδείξτε ότι τα στοιχεία $[1,-1,1]^T$, $[2,1,2]^T$, $[3,1,0]^T$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$, εκφράστε το $[17,5,5]^T$ ως γραμμικό συνδυασμό αυτών.

Λύση

Τρία στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου διάστασης 3 είναι βάση αν και μόνο αν αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επειδή

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = -9 \neq 0,$$

τα δεδομένα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αποτελούν μια βάση.

Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας τις γραμμοπράξεις σε πίνακα που έχει ως στήλες τα διανύσματα αυτά οδηγούμαστε στην κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Επειδή η $1^η$,$2^η$ και $3^η$ στήλη του τελικού πίνακα έχει μη μηδενικά οδηγά στοιχεία τα διανύσματα που έχουν ως στοιχεία την $1^η$,$2^η$ και $3^η$ στήλη του αρχικού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Λύνοντας το 3x3 σύστημα που προκύπτει από την ισότητα

$$\lambda_1[1,-1,1]^T + \lambda_2[2,1,2]^T + \lambda_3[3,1,0]^T = [17,5,5]^T ,$$

δηλαδή το

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 17 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 5 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 5 \end{aligned} ,$$

βρίσκουμε $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ και $\lambda_3 = 4$.

5. (α) Να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες τα διανύσματα $[1,1,a]^T, [2,0,1]^T, [3,-1,1]^T$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

(β) Για τις τιμές του *α* που βρήκατε πριν, να εκφράστε το $[1,0,0]^T$ ως γραμμικό συνδυασμό των $[1,1,a]^T, [2,0,1]^T, [3,-1,1]^T$.

(γ) Να βρεθούν οι τιμές του *b* για τις οποίες έχουμε $[1,2,b]^T \in span\{[1,1,1]^T, [3,2,1]^T\}$.

Λύση:

α) Επειδή η διάσταση του $\mathbb{R}^3$ είναι 3, το συγκεκριμένο ερώτημα ισοδυναμεί με το να βρεθούν τα α τέτοια ώστε $\det A \neq 0,$ όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Υπολογίζοντας βρίσκουμε ότι $\det A = 2 - 2a$, οπότε $a \neq 1$ και τα τρία διανύσματα που είναι στήλες στον αρχικό πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Εναλλακτικά χρησιμοποιώντας τις γραμμοπράξεις σε πίνακα που έχει ως στήλες τα διανύσματα αυτά οδηγούμαστε στην κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1-2\alpha & 1-3\alpha \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2\alpha-1 & 3\alpha-1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3\alpha-1-2(2\alpha-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\alpha+1 \end{bmatrix}$$

Οπότε για $a \neq 1$η 1η,2η και 3η στήλη του τελικού πίνακα έχει μη μηδενικά οδηγά στοιχεία τα διανύσματα που έχουν ως στοιχεία την 1η,2η και 3η στήλη του αρχικού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και εφόσον έχουμε 3 γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ αυτά αποτελούν βάση του.

β) Για $a \neq 1$, τα δεδομένα στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ αποτελούν μια βάση. Ζητάμε να βρεθούν τα x, y, z τέτοια ώστε

$$[1,0,0]^T = x[1,1,a]^T + y[2,0,1]^T + z[3,-1,1]^T.$$

Λύνοντας το αντίστοιχο σύστημα $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, όπου Α είναι ο πίνακας του προηγουμένου υποερωτήματος. Χρησιμοποιώντας τις ίδιες γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα καταλήγουμε στο

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -\alpha+1 & 1/2 \end{array}\right]$$

Από όπου βρίσκουμε ότι $x = \dfrac{1}{2(1-a)}, \quad y = \dfrac{a+1}{2(a-1)}, \quad z = \dfrac{1}{2(1-a)}.$

γ) Ζητάμε τα *b* τέτοια ώστε να υπάρχουν x, y ώστε να έχουμε

$[1,2,b]^T = x[1,1,1]^T + y[3,2,1]^T$. Το αντίστοιχο σύστημα είναι το $B\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ b \end{bmatrix}$, όπου

$B=\begin{bmatrix}1 & 3\\1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$. Αυτό έχει λύση αν και μόνο αν οι λύσεις του συστήματος $x+3y=1$, $x+2y=2$, δηλ. x = 4 και y = -1 ικανοποιούν την τρίτη εξίσωση $x+y=b$. Αυτό συμβαίνει όμως μόνο αν b = 3. Η απάντηση αυτή μπορεί να βρεθεί και από τον ακόλουθο συλλογισμό: Επειδή η τάξη (rank) του πίνακα B, που είναι 2, πρέπει να είναι ίδια με την τάξη του επαυξημένου πίνακα του συστήματος, δηλαδή

$$rank\begin{bmatrix}1 & 3\\1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\1 & 2 & 2\\1 & 1 & b\end{bmatrix}=2,$$

που ισχύει αν και μόνο αν $\det\left(\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\1 & 2 & 2\\1 & 1 & b\end{bmatrix}\right)=0$. Υπολογίζοντας την ορίζουσα, βρίσκουμε ότι $b=3$.

6. Δίνονται τα σύνολα :

$$E_1=\left\{\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\x_3 & x_4\end{bmatrix}: x_1+x_2=x_3+x_4\right\}; E_2=\left\{\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\x_3 & x_4\end{bmatrix}: x_1+x_3=x_2+x_4\right\}$$

Να δείξετε ότι τα σύνολα E_1,E_2 είναι διανυσματικοί υπόχωροι του διανυσματικού χώρου των πινάκων διαστάσεως 2x2.

β) Να βρείτε τις διαστάσεις των υποχώρων $E_1,E_2,E_1\cap E_2$

Λύση:

α) Επιλέγουμε δύο πίνακες X,Y του συνόλου E_1 έστω

$$X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\x_3 & x_4\end{bmatrix}\in E_1 \ , \ Y=\begin{bmatrix}y_1 & y_2\\y_3 & y_4\end{bmatrix}\in E_1$$

όπου $x_1+x_2=x_3+x_4$, $y_1+y_2=y_3+y_4$ και στη συνέχεια ελέγχουμε αν ο πίνακας $\lambda X+\mu Y$ όπου $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ανήκει στον χώρο E_1.

$$\lambda X+\mu Y=\lambda\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\x_3 & x_4\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}y_1 & y_2\\y_3 & y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda x_1+\mu y_1 & \lambda x_2+\mu y_2\\\lambda x_3+\mu y_3 & \lambda x_4+\mu y_4\end{bmatrix}$$

Πράγματι παρατηρώ ότι ισχύει η ιδιότητα των πινάκων του χώρου E_1 :

$$\begin{aligned}(\lambda x_1+\mu y_1)+(\lambda x_2+\mu y_2)&=\lambda(x_1+x_2)+\mu(y_1+y_2)=\\&=\lambda(x_3+x_4)+\mu(y_3+y_4)=\\&=(\lambda x_3+\mu y_3)+(\lambda x_4+\mu y_4)\end{aligned}$$

και συνεπώς ο πίνακας $\lambda X+\mu Y$ ανήκει στον χώρο E_1.

Εναλλακτικά παρατηρούμε ότι κάθε πίνακας $X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\x_3 & x_4\end{bmatrix}\in E_1$ γράφεται ως

$$X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \overset{x_1+x_2=x_3+x_4}{=} \begin{bmatrix} x_3+x_4-x_2 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}=$$

$$=x_2\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{X_1}+x_3\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{X_2}+x_4\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{X_3}$$

Δηλαδή ισχύει $E_1=span\{X_1,X_2,X_3\}$ και $span$ ως στοιχείων του διανυσματικού χώρου των πινάκων διαστάσεως 2x2 αποτελεί διανυσματικός υπόχωρός του.

Όμοια επιλέγουμε δύο πίνακες X,Y του χώρου E_2 έστω

$$X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\in E_2; Y=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}\in E_2$$

όπου $x_1+x_3=x_2+x_4$, $y_1+y_3=y_2+y_4$ και στη συνέχεια ελέγχω αν ο πίνακας $\lambda X+\mu Y$ όπου $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ανήκει στον χώρο E_2.

$$\lambda X+\mu Y=\lambda\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda x_1+\mu y_1 & \lambda x_2+\mu y_2 \\ \lambda x_3+\mu y_3 & \lambda x_4+\mu y_4 \end{bmatrix}$$

Πράγματι παρατηρώ ότι ισχύει η ιδιότητα των πινάκων του χώρου E_2 :

$$\begin{aligned}(\lambda x_1+\mu y_1)+(\lambda x_3+\mu y_3)&=\lambda(x_1+x_3)+\mu(y_1+y_3)=\\&=\lambda(x_2+x_4)+\mu(y_2+y_4)=\\&=(\lambda x_2+\mu y_2)+(\lambda x_4+\mu y_4)\end{aligned}$$

και συνεπώς ο πίνακας $\lambda X+\mu Y$ ανήκει στον χώρο E_2.

Εναλλακτικά παρατηρούμε ότι κάθε πίνακας $Y=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}\in E_2$ γράφεται ως

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} \overset{y_1+y_3=y_2+y_4}{=} \begin{bmatrix} y_2+y_4-y_3 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}=y_2\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Y_1}+y_3\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{Y_2}+y_4\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Y_3}$$

Δηλαδή ισχύει $E_2=span\{Y_1,Y_2,Y_3\}$ και $span$ ως στοιχείων του διανυσματικού χώρου των πινάκων διαστάσεως 2x2 αποτελεί διανυσματικός υπόχωρός του.

β) Παρατηρούμε ότι κάθε πίνακας $X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\in E_1$ γράφεται ως

$$X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \overset{x_1+x_2=x_3+x_4}{=} \begin{bmatrix} x_3+x_4-x_2 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}=$$

$$=x_2\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{X_1}+x_3\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{X_2}+x_4\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{X_3}$$

όπου οι πίνακες X_1,X_2,X_3 εύκολα αποδεικνύεται, με τη χρήση του ορισμού

$$a\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{X_1}+b\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{X_2}+c\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{X_3}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix} -a+b+c & a \\ b & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Leftrightarrow a=b=c=0$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητοι και συνεπώς αποτελούν βάση του E_1. Άρα $\dim E_1=3$.

Παρατηρούμε ότι κάθε πίνακας $Y=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} \in E_2$ γράφεται ως

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} \overset{y_1+y_3=y_2+y_4}{=} \begin{bmatrix} y_2+y_4-y_3 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}=$$

$$=y_2\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Y_1}+y_3\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{Y_2}+y_4\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Y_3}$$

όπου οι πίνακες Y_1,Y_2,Y_3 εύκολα αποδεικνύεται (με τη χρήση του ορισμού) ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητοι και συνεπώς αποτελούν βάση του E_2. Άρα $\dim E_2=3$.

Κάθε πίνακας $Y=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} \in E_1 \cap E_2$ γράφεται ως

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} \underset{y_1+y_2=y_3+y_4}{\overset{y_1+y_3=y_2+y_4}{=}} \begin{bmatrix} y_4 & y_3 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}=$$

$$=y_3\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{Y_1}+y_4\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Y_2}$$

όπου οι πίνακες Y_3,Y_4 είναι εύκολο να αποδειχθεί (με τη χρήση του ορισμού) ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητοι και συνεπώς αποτελούν βάση του $E_1 \cap E_2$. Άρα $\dim\left(E_1 \cap E_2\right)=2$.

7.

Έστω οι διανυσματικοί υπόχωροι W_1, W_2 του $\mathbb{R}^4$ που ορίζονται από τα σύνολα:

$$W_1=\left\{\left[x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4\right]^T \in \mathbb{R}^4 \;:\; x_2-2x_3+2x_4=0\right\}$$

$$W_2=\left\{\left[x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4\right]^T \in \mathbb{R}^4 \;:\; 2x_3+x_4=0\right\}$$

Υπολογίστε μία βάση και τη διάσταση για κάθε από τους υπόχωρους: W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$, W_1+W_2. Δικαιολογήστε γιατί ο $\mathbb{R}^4$ δεν είναι το ευθύ άθροισμα των W_1, W_2. Δείξτε ότι για τον $\Delta=span\{[0,0,0,1]^T\}$ ισχύει $\mathbb{R}^4=W_2 \oplus \Delta$.

Λύση

Για τον υπόχωρο W_1 και από την ιδιότητα που πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες κάθε στοιχείου του μπορούμε να γράψουμε

$$x_2-2x_3+2x_4=0 \Leftrightarrow x_2=2x_3-2x_4,$$

οπότε ο υπόχωρος

$$W_1=\left\{\left[x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4\right]^T \in \mathbb{R}^4 \;:\; x_2-2x_3+2x_4=0\right\}$$

$$= \left\{ \left[x_1,\ 2x_3 - 2x_4,\ x_3,\ x_4 \right]^T \in \mathbb{R}^4 \ :\ x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_1 \left[1,0,0,0\right]^T + x_3 \left[0,2,1,0\right]^T + x_4 \left[0,-2,0,1\right]^T :\ x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= span\{\left[1,0,0,0\right]^T,\ \left[0,2,1,0\right]^T,\ \left[0,-2,0,1\right]^T\}.$$

Επιπλέον, τα διανύσματα $\left[1,0,0,0\right]^T$, $\left[0,2,1,0\right]^T$, $\left[0,-2,0,1\right]^T$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, αν $k,l,m \in \mathbb{R}$ με

$$k\left[1,0,0,0\right]^T + l\left[0,2,1,0\right]^T + m\left[0,-2,0,1\right]^T = \left[0,0,0,0\right]^T$$

το σύστημα

$$\begin{aligned} &k = 0 \\ &2l - 2m = 0 \\ &l = 0 \\ &m = 0 \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση $k = l = m = 0$.

Άρα, μία βάση του W_1 είναι $\{\left[1,0,0,0\right]^T, \left[0,2,1,0\right]^T, \left[0,-2,0,1\right]^T\}$ με $\dim W_1 = 3$.
Όμοια αποδεικνύεται ότι ο υπόχωρος

$$W_2 = \left\{ \left[x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \right]^T \in \mathbb{R}^4 \ :\ 2x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \left[x_1,\ x_2,\ x_3,\ -2x_3 \right]^T \in \mathbb{R}^4 \ :\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_1 \left[1,0,0,0\right]^T + x_2 \left[0,1,0,0\right]^T + x_3 \left[0,0,1,-2\right]^T :\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= span\{\left[1,0,0,0\right]^T,\ \left[0,1,0,0\right]^T, \left[0,0,1,-2\right]^T\}.$$

και ότι τα διανύσματα $\left[1,0,0,0\right]^T$, $\left[0,1,0,0\right]^T$, $\left[0,0,1,-2\right]^T$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα, $\dim W_2 = 3$.

Για τον υπόχωρο $W_1 \cap W_2$ τομή ισχύει:

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \left[x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \right]^T \in \mathbb{R}^4 \ :\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \ \text{ και } \ 2x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

Λύνοντας το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_2 &= 6x_3 \\ x_4 &= -2x_3 \end{aligned}$$

μπορούμε να γράψουμε

$$\left[x_1, x_2, x_3, x_4 \right]^T = \left[x_1, 6x_3, x_3, -2x_3 \right]^T = x_1\left[1,0,0,0\right]^T + x_3\left[0,6,1,-2\right]^T,$$

άρα $W_1 \cap W_2 = span\left\{ \left[1,0,0,0\right]^T, \left[0,\ 6,\ 1,-2\right]^T \right\}$.

Μία βάση του $W_1 \cap W_2$ είναι $\left\{[1,0,0,0]^T, [0,\, 6,\, 1, -2]^T\right\}$ και η $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$, αφού τα διανύσματα $[1,0,0,0]^T$ και $[0,6,1,-2]^T$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, όπως αποδεικνύεται πολύ εύκολα με τη χρήση του ορισμού. Πράγματι για $k, l \in \mathbb{R}$

$$k\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + l\begin{bmatrix}0\\6\\1\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}k\\6l\\l\\-2l\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow k = l = 0$$

Για το άθροισμα $W_1 + W_2$ σύμφωνα με όσα έχουμε υπολογίσει παραπάνω έχουμε:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = 3 + 3 - 2 = 4\,.$$

Εφόσον οι γεννήτορες του συνόλου αθροίσματος είναι ή ένωση των διανυσμάτων γεννητόρων των χώρων W_1, W_2 δηλαδή τα διανύσματα $[1,0,0,0]^T$, $[0,1,0,0]^T$, $[0,0,1,-2]^T, [0,2,1,0]^T, [0,-2,0,1]^T$ αναμένουμε τέσσερα από αυτά τα πέντε διανύσματα να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τα διανύσματα είναι πέντε και όχι έξι διότι οι βάσεις έχουν ένα κοινό στοιχείο το $[1,0,0,0]^T$. Για να εξετάσουμε την γραμμική ανεξαρτησία τους τα γράφουμε ως στήλες πίνακα τον οποίο φέρνουμε σε κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2\end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma 4 \to \gamma 4 + 2\gamma 3} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

Αφού μη μηδενικά στοιχεία υπάρχουν στην $1^{η}$,$2^{η}$, $3^{η}$ και $4^{η}$ στήλη του τελικού πίνακα, η $1^{η}$,$2^{η}$, $3^{η}$ και $4^{η}$ στήλη του αρχικού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου άθροισμα. Δηλαδή η βάση του $W_1 + W_2$ αποτελείται από τα διανύσματα $[1,0,0,0]^T$, $[0,1,0,0]^T$, $[0,0,1,-2]^T, [0,2,1,0]^T$. Εφόσον η διάσταση αυτού του υπόχωρου του $\mathbb{R}^4$ είναι 4, συμπεραίνουμε ότι ο χώρος άθροισμα συμπίπτει με τον $\mathbb{R}^4$. Ωστόσο επειδή, $W_1 \cap W_2 \neq \{\mathbf{0}\}$, ο $\mathbb{R}^4$ **δεν** είναι το ευθύ άθροισμα των υπόχωρων W_1, W_2.

Για τον $\Delta = span\{[0,0,0,1]^T\}$ ισχύει $\mathbb{R}^4 = W_2 \oplus \Delta$.

Πράγματι, το διάνυσμα $[0,0,0,1]^T \notin W_2$, διότι σε διαφορετική περίπτωση θα υπήρχαν $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$k_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\-2k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\Rightarrow 0=-\frac{1}{2}.$$

Δηλαδή το σύστημα είναι ασυμβίβαστο συνεπώς $W_2\cap\Delta=\{\mathbf{0}\}$.

Επιπλέον, επειδή $\dim\mathbb{R}^4=4$ και τα διανύσματα

$$[1,0,0,0]^T,\ [0,1,0,0]^T,\ [0,0,1,-2]^T,[0,0,0,1]^T$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα τα διανύσματα αυτά αποτελούν μία βάση του χώρου $\mathbb{R}^4$. Δηλαδή ισχύει $\mathbb{R}^4=W_2\oplus\Delta$.

Το ότι τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα το συμπεραίνουμε θεωρώντας τον πίνακα με στήλες αυτά τα διανύσματα τον οποίο φέρνουμε σε κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-2&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\gamma4\to\gamma4+2\gamma3}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Αφού μη μηδενικά στοιχεία υπάρχουν στην $1^η$,$2^η$, $3^η$ και $4^η$ στήλη του τελικού πίνακα, η $1^η$,$2^η$, $3^η$ και $4^η$ στήλη του αρχικού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

8.Έστω $a\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε τα στοιχεία $u=[1,1,1]^T, v=[2,1,1]^T, w=[1,a,2]^T$ του $\mathbb{R}^3$.

1. Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες τα u,v,w είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
2. Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες το $[0,1,1]^T$ ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα $u,v,w.$

Λύση

1. Έστω $\lambda u+\mu v+\nu w=0,\ \lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}.$ Ζητάμε τα *α* για τα οποία η σχέση αυτή αληθεύει μόνο για $\lambda=\mu=\nu=0.$
   Έχουμε
   $$\lambda u+\mu v+\nu w=0\Leftrightarrow\lambda[1,1,1]^T+\mu[2,1,1]^T+\nu[1,a,2]^T=[0,0,0]^T\Leftrightarrow$$
   $$\begin{cases}\lambda+2\mu+\nu=0\\\lambda+\mu+\nu a=0\\\lambda+\mu+2\nu=0.\end{cases}$$
   Ζητάμε τα *α* για τα οποία το σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος
   $$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\1&1&\alpha&0\\1&1&2&0\end{array}\right]$$
   μετά τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών

$$\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1, \Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1, \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2$$

παίρνει τη μορφή

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a & 0 \end{array}\right].$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι το $\begin{cases} \lambda + 2\mu \quad + \nu = 0 \\ -\mu + (a-1)\nu = 0 \\ (2-a)\nu = 0 \end{cases}$

Από όπου βλέπουμε ότι η μηδενική λύση είναι μοναδική αν και μόνο αν $a \neq 2$.

2. Ζητάμε τα *α* για τα οποία υπάρχουν $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda u + \mu v + \nu w = [0,1,1]^T$. Όπως πριν παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu + \nu = 0 \\ \lambda + \mu + \nu a = 1 \\ \lambda + \mu + 2\nu = 1. \end{cases}$$

Ζητάμε τα a για τα οποία το σύστημα έχει λύση. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

μετά τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών

$$\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1, \Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1, \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2$$

παίρνει τη μορφή

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a & 0 \end{array}\right].$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι το $\begin{cases} \lambda + 2\mu \quad + \nu = 0 \\ -\mu + (a-1)\nu = 1 \\ (2-a)\nu = 0. \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα αυτό έχει λύση για κάθε a, γιατί όποια τιμή και να πάρει η παράμετρος οδηγούμαστε σε σύστημα με μία (για την οποία $\nu = 2$ για $a \neq 2$) ή άπειρες λύσεις.

Σημείωση: Θα μπορούσαμε να παρατηρούμε ότι $[0,1,1]^T = 2u - v + 0w = 2u - v + 0w$.

9 Έστω P_3 ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων που έχουν βαθμό το πολύ 3.

1. Αποδείξτε ότι το σύνολο $B = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$ είναι μια βάση του P_3.
2. Να παρασταθεί το x^3 σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης *B*.

Λύση

Ξέρουμε ότι $\dim(P_3)=4$. Αρχικά πρέπει να δείξουμε πρώτα ότι τα στοιχεία του συνόλου B είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. τότε

$$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d=0 \Leftrightarrow$$

$$a(x^3-3x^2+3x-1)+b(x^2-2x+1)+c(x-1)+d=0 \Leftrightarrow$$

$$ax^3+(-3a+b)x^2+(3a-2b+c)x+(-a+b-c+d)=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a=0 \\ -3a+b=0 \\ 3a-2b+c=0 \\ -a+b-c+d=0. \end{cases}$$

Το σύστημα είναι τριγωνικό και εύκολα βλέπουμε ότι η μηδενική λύση είναι η μοναδική.

Επίσης τα στοιχεία του συνόλου θα πρέπει να παράγουν το χώρο. Πρέπει να δείξουμε δηλαδή ότι για το τυχαίο στοιχείο του χώρου $\kappa t^3+\lambda t^2+\mu t+\nu$ υπάρχουν $a,b,c,d\in$ τέτοια ώστε

$$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d=\kappa t^3+\lambda t^2+\mu t+\nu \text{ .}$$

Οπότε από την

$$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d=a(x^3-3x^2+3x-1)+b(x^2-2x+1)+c(x-1)+d=$$

$$=\alpha x^3+(-3a+b)x^2+(3a-2b+c)x+(-a+b-c+d)=\kappa t^3+\lambda t^2+\mu t+\nu$$

έχουμε ότι

$$\alpha=k$$

$$b=3a+\lambda=3\kappa+\lambda$$

$$c=-3a+2b+\mu=-3\kappa+6\kappa+2\lambda+\mu=3\kappa+2\lambda+\mu$$

$$d=\nu+a-b+c=\nu+\kappa-3\kappa-\lambda+3\kappa+2\lambda+\mu=\kappa+\lambda+\mu+\nu$$

Αφού τα στοιχεία του συνόλου B παράγουν το χώρο και είναι γραμμικά ανεξάρτητα αποτελούν βάση του χώρου.

Έστω $x^3=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$. Όπως πριν, το ισοδύναμο σύστημα είναι

το $\begin{cases} a=1 \\ -3a+b=0 \\ 3a-2b+c=0 \\ -a+b-c+d=0. \end{cases}$

Λύνοντάς το βρίσκουμε $a=1, b=3, c=3, d=1$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στο σύγγραμμα που διανέμεται και στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος. Το περιεχόμενο του αρχείου απλά αποτελεί περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα για δική του χρήση και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί και να μην αναπαραχθεί και διανεμηθεί για άλλο σκοπό.