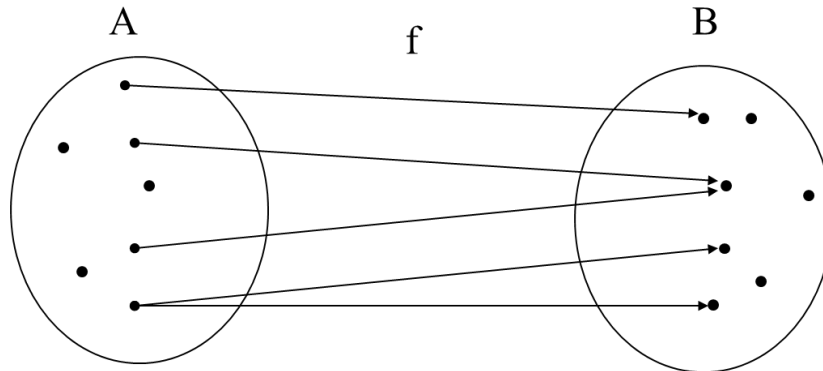


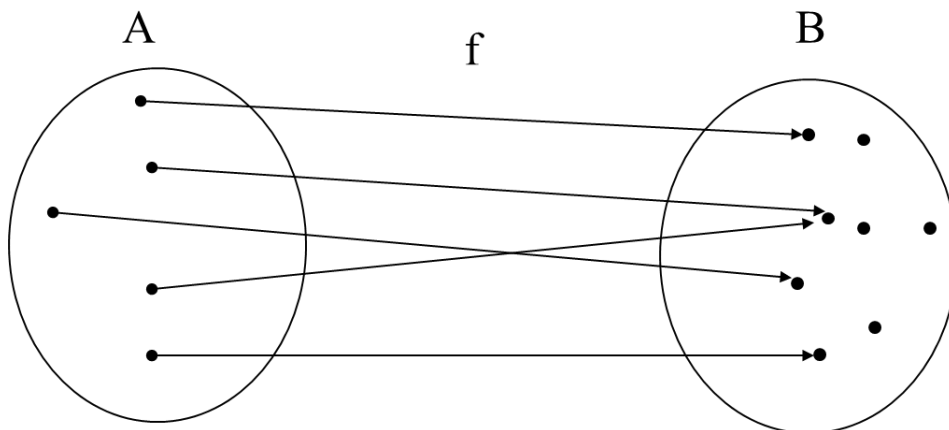
Κεφάλαιο 5 Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

5.1 Γενικά

Μία **σχέση** μεταξύ των στοιχείων δύο συνόλων A, B αντιστοιχίζει στοιχεία του A με στοιχεία του B άλλου μέσω ενός κανόνα που μπορεί να είναι και ένας Μαθηματικός τύπος. Χρησιμοποιώντας βένια διαγράμματα μπορούμε να παραστήσουμε μία σχέση με σχηματικό τρόπο:



Μία σχέση λέγεται **απεικόνιση** όταν αντιστοιχίζει **κάθε στοιχείο του A** με ένα, μοναδικό στοιχείο του B .



Έστω δύο διανυσματικοί χώροι V, W διαστάσεων n, m αντίστοιχα και f είναι μία απεικόνιση από το V στο W για την οποία ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. $f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in V$
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall x \in V \text{ και } \lambda \in \mathbb{R}$

Σε μία τέτοια περίπτωση η απεικόνιση ονομάζεται **γραμμική απεικόνιση** ή **γραμμικός μετασχηματισμός**. (από εδώ και πέρα οι δύο αυτοί ορισμοί θα χρησιμοποιούνται ισοδύναμα)

Εναλλακτικά για να είναι η απεικόνιση γραμμική θα πρέπει να ισχύει:

$$f(\kappa x + \lambda y) = \kappa f(x) + \lambda f(y), \quad \forall x, y \in V \text{ και } \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$

Παραδείγματα:

Η απεικόνιση που στρέφει τα σημεία του επιπέδου R^2 κατά γωνία θ , την οποία είδαμε στο κεφάλαιο των πινάκων,

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Φανερά ισχύει

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) &= f\left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (x_1 + x_2) \cos \theta - (y_1 + y_2) \sin \theta \\ (x_1 + x_2) \sin \theta + (y_1 + y_2) \cos \theta \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta \\ x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta \\ x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

και

$$f\left(\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \lambda x \cos \theta - \lambda y \sin \theta \\ \lambda x \sin \theta + \lambda y \cos \theta \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix} = \lambda f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να κάνουμε τους ακόλουθους (ισοδύναμους) υπολογισμούς:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) &= f\left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

και

$$f\left(\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$$

Θα εξετάσουμε αν η παρακάτω απεικόνιση είναι γραμμική:

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1, x_2, x_3 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 1, x_2 + x_3, x_2 - x_3 - 1 \end{bmatrix}^T$$

Όχι. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} x_1, x_2, x_3 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} y_1, y_2, y_3 \end{bmatrix}^T\right) &= \\ &= f\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 \end{bmatrix}^T\right) = \\ &= \begin{bmatrix} (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + 1, (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3), (x_2 + y_2) - (x_3 + y_3) - 1 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

δεν δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με την

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} x_1, x_2, x_3 \end{bmatrix}^T\right) + f\left(\begin{bmatrix} y_1, y_2, y_3 \end{bmatrix}^T\right) &= \\ &= \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 1, x_2 + x_3, x_2 - x_3 - 1 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} y_1 - y_2 + 1, y_2 + y_3, y_2 - y_3 - 1 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + 2, (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3), (x_2 + y_2) - (x_3 + y_3) - 2 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

όπως θα έπρεπε να συμβαίνει αν η f ήταν γραμμική.

Η ταυτοτική απεικόνιση $1_V : V \rightarrow V$ όπου $1_V(x) = x, \forall x \in V$ είναι γραμμική απεικόνιση διότι:

1. $1_V(x+y) = x+y = 1_V(x) + 1_V(y)$
2. $1_V(\lambda x) = \lambda x = \lambda 1_V(x)$

Σε ένα γραμμικό μετασχηματισμό $f: V \rightarrow W$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

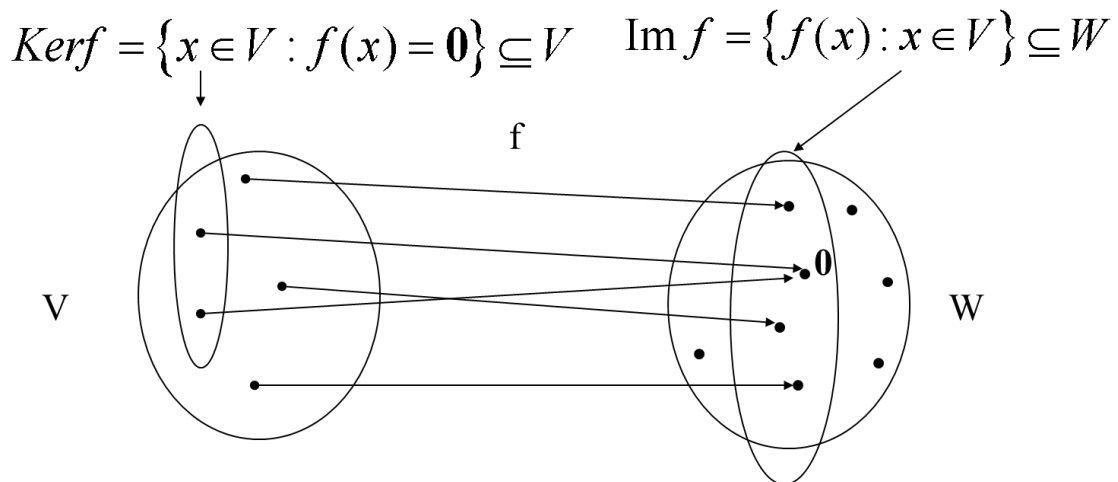
1. $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
2. $f(x-y) = f(x) - f(y), \quad \forall x, y \in V$
3. $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n),$
 $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

Στο προηγούμενο παράδειγμα θα έπρεπε να είχαμε $f([0,0,0]^T) = [0,0,0]^T$, που όμως δεν ισχύει στην περίπτωση μας.

Για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό ορίζουμε τα ακόλουθα σύνολα:

1. Η **εικόνα** του μετασχηματισμού $\text{Im } f = \{f(x) : x \in V\} \subseteq W$
2. Τον **πυρήνα** του μετασχηματισμού $\text{Ker } f = \{x \in V : f(x) = \mathbf{0}\} \subseteq V$

Σχηματικά τα δύο αυτά σύνολα είναι τα ακόλουθα:



Τα δύο αυτά σύνολα είναι διανυσματικοί χώροι, διανυσματικοί υπόχωροι των V και W αντίστοιχα. Για τις διαστάσεις τους, που ονομάζονται **τάξη** και **μηδενικότητα** του μετασχηματισμού, ισχύει :

$$\dim V = \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f)$$

Παράδειγμα:

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3, f\left([x, y, z]^T\right) = [x+2y-z, y+z, x+y-2z]^T.$$

Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του πυρήνα της f .

Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση της εικόνας της f .

Έχουμε

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y-z \\ y+z \\ x+y-2z \end{bmatrix} \\ = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Άρα η εικόνα παράγεται από τα διανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Για να βρούμε τη διάστασή της εικόνας ($\text{Im}f$) θεωρούμε τον πίνακα με στήλες τα διανύσματα αυτά και εφαρμόζοντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών να βρούμε τα γραμμικώς ανεξάρτητα. Τα γραμμικά ανεξάρτητα αυτά διανύσματα θα μας δώσουν τη βάση του ($\text{Im}f$) (εικόνας).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα $\dim \text{Im} f = 2$. Οπότε μια βάση της εικόνας της f είναι τα δύο διανύσματα του αρχικού πίνακα τα οποία αντιστοιχούν στις στήλες του τελικού πίνακα που έχουν οδηγία στοιχεία (δηλαδή στην $1^{\text{η}}$ και στην $2^{\text{η}}$) οπότε, $\text{Im} f = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Από τον τύπο $\dim V = \dim(\text{Im} f) + \dim(\text{Ker} f)$ έχουμε ότι $\dim(\text{ker} f) = 3 - 2 = 1$ διότι η διάσταση του χώρου είναι 3

Για να βρούμε μια βάση του $\text{ker} f$ πρέπει να βρούμε τη λύση του ομογενούς συστήματος

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Μπορούμε να ορίσουμε τον επαυξημένο πίνακα του ομογενούς συστήματος και να τον μετατρέψουμε σε κλιμακωτό. Ωστόσο, στην ουσία, αυτό το έχουμε κάνει ήδη στη διαδικασία εύρεσης βάσης της εικόνας του μετασχηματισμού. Από την 2η εξίσωση έχουμε $y = -z$ αν $z = t$ τότε $y = -t$ και από την $1^{\text{η}}$ εξίσωση έχουμε $x = 3t$. Οπότε $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t \\ -t \\ t \end{bmatrix}$.

Άρα $\text{ker} f = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ και μια βάση του είναι το σύνολο $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

5.2 Πίνακας Γραμμικού Μετασχηματισμού

Έστω ένας γραμμικός μετασχηματισμός $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, όπου θεωρούμε τους δ.χ. $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ με τις κανονικές τους βάσεις, τότε υπάρχει μοναδικός πίνακας $m \times n$ A , τέτοιος ώστε:

$$f(x) = Ax$$

Ο πίνακας αυτός ονομάζεται **πίνακας (αναπαράστασης) του μετασχηματισμού (ή της απεικόνισης)** και ισχύει:

1. $\text{Ker} f = N_A$, $\dim(\text{Ker} f) = \dim N_A = \nu(A)$
2. $\text{Im} f = R_A$, $\dim(\text{Im} f) = \text{rank}(A)$

Για να βρω τον πίνακα ενός γραμμικού $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, όπου θεωρούμε τους δ.χ. με τις κανονικές τους βάσεις τότε βρίσκω τις εικόνες της βάσης του \mathbb{R}^n

$$f(e_1) = u_1^T, f(e_2) = u_2^T, \dots, f(e_n) = u_n^T$$

και δημιουργώ τον πίνακα που έχει στήλες τις εικόνες αυτές.

Παράδειγμα:

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f([x, y, z]^T) = [x + 2y - z, y + z, x + y - 2z]^T.$$

Όπου θεωρούμε τους δ.χ. με τις κανονικές τους βάσεις.

$$f([1, 0, 0]^T) = [1, 0, 1]^T$$

$$f([0, 1, 0]^T) = [2, 1, 1]^T$$

$$f([0, 0, 1]^T) = [-1, 1, -2]^T$$

Οπότε ο πίνακας της απεικόνισης ως προς τις κανονικές βάσεις είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Όπως είδαμε στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου, μετασχηματίζοντας με γραμμοπράξεις τον πίνακα αυτόν σε κλιμακωτό μπορούμε να έχουμε όλες τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε για να καθορίσουμε την εικόνα και τον πυρήνα του πίνακα αυτού.

Παράδειγμα:

Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f[x, y, z]^T = [x + y + z, x + 2y + 3z]^T.$$

Όπου θεωρούμε τους δ.χ. με τις κανονικές τους βάσεις.

$$f([1, 0, 0]^T) = [1, 1]^T$$

$$f([0, 1, 0]^T) = [1, 2]^T$$

$$f([0, 0, 1]^T) = [1, 3]^T$$

Οπότε ο πίνακας της απεικόνισης ως προς τις κανονικές βάσεις είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε τη διάστασή της εικόνας ($\text{Im}f$) θεωρούμε τον πίνακα της απεικόνισης και εφαρμόζουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Οπότε μια βάση της εικόνας της f είναι τα δύο διανύσματα του αρχικού πίνακα τα οποία αντιστοιχούν στις στήλες του τελικού πίνακα που έχουν οδηγία στοιχεία (δηλαδή στην $1^{\text{η}}$ και στην $2^{\text{η}}$) οπότε, $\text{Im } f = \{[1,1]^T, [1,2]^T\}$ και $\dim \text{Im } f = 2$

Από τον τύπο $\dim V = \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f)$ έχουμε ότι $\dim(\text{ker } f) = 3 - 2 = 1$ διότι η διάσταση του χώρου είναι 3

Για να βρούμε μια βάση του $\text{ker } f$ πρέπει να βρούμε τη λύση του ομογενούς συστήματος

$$\begin{aligned}x + y + z &= 0 \\x + 2y + 3z &= 0\end{aligned}$$

Γράφουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

από όπου οδηγούμαστε στη λύση:

$$y = -2z$$

$$x = -y - z = 2z - z = z$$

$$\text{Οπότε } [x, y, z]^T = [z, -2z, z]^T.$$

Άρα $\text{ker } f = \text{span}\{[1, -2, 1]^T\}$ και μια βάση του είναι το σύνολο $\{[1, -2, 1]^T\}$.

Παράδειγμα:

Η απεικόνιση που στρέφει τα σημεία του επιπέδου \mathbb{R}^2 κατά γωνία θ , την οποία είδαμε στο κεφάλαιο των πινάκων,

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}, \text{ οπότε } \square_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Γενικεύοντας:

Έστω ένας γραμμικός μετασχηματισμός $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, όπου θεωρούμε τους δ.χ. $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ με δύο βάσεις $\{v_1^T, v_2^T, \dots, v_n^T\}, \{w_1^T, w_2^T, \dots, w_m^T\}$ αντίστοιχα, τότε υπάρχει μοναδικός πίνακας $m \times n$ A , τέτοιος ώστε:

$$Ax_{\{v_1^T, v_2^T, \dots, v_n^T\}} = f(x)_{\{w_1^T, w_2^T, \dots, w_m^T\}}$$

Δηλαδή, η εικόνα ενός στοιχείου του \mathbb{R}^n (που είναι εκφρασμένο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης του \mathbb{R}^n) εκφρασμένη ως προς τη βάση του \mathbb{R}^m προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του στοιχείου επί τον πίνακα.

Για να βρω τώρα τον πίνακα του γραμμικού $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, βρίσκω τις εικόνες της βάσης $\{v_1^T, v_2^T, \dots, v_n^T\}$ του \mathbb{R}^n και δημιουργώ τον επαυξημένο πίνακα $[w_1^T, w_2^T, \dots, w_m^T | f(v_1^T), f(v_2^T), \dots, f(v_n^T)]$. Με γραμμοπράξεις τον μετατρέπω στη μορφή $[I_m | A]$. Ο πίνακας A είναι ο πίνακας (αναπαράστασης) του γραμμικού μετασχηματισμού ως προς τις βάσεις.

Για τον **πίνακα μετασχηματισμού** αυτόν ισχύει:

1. $\dim(\text{Ker } f) = \dim N_A = n - \text{rank}(A)$
2. $\dim(\text{Im } f) = \text{rank}(A)$

Όταν δεν αναφέρουμε κάποιες συγκεκριμένες βάσεις θα θεωρούμε ότι ο πίνακας θα είναι ως προς τις κανονικές βάσεις.

Παράδειγμα:

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y + z \\ x + 2y + 3z \end{bmatrix}.$$

Όπου θεωρούμε τον \mathbb{R}^3 με τη βάση $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ και τον \mathbb{R}^2 με τη βάση $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$.

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 5 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 2\gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 - \gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Οπότε ο **πίνακας μετασχηματισμού ως προς αυτές τις βάσεις είναι**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Για να δούμε τι σημαίνει αυτό θεωρούμε το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Το διάνυσμα αυτό

γράφεται ως $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ οπότε οι συντεταγμένες του ως προς τη βάση

$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ του \mathbb{R}^3 είναι $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_{\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$.

Η εικόνα του $f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$. Η εικόνα αυτή γράφεται στον \mathbb{R}^2 με τη βάση

$\{[1,2]^T, [1,3]^T\}$ ως $\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ οπότε οι συντεταγμένες του ως προς αυτή τη βάση είναι $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}_{\{[1,2]^T, [1,3]^T\}}$. Σύμφωνα με τα όσα έχουμε πει παραπάνω θα πρέπει να

ισχύει $Ax_{\{v_1^T, v_2^T, \dots, v_n^T\}} = f(x)_{\{w_1^T, w_2^T, \dots, w_m^T\}}$. Πράγματι

$$Ax_{\{[1,1,0]^T, [0,1,1]^T, [0,0,1]^T\}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_{\{[1,1,0]^T, [0,1,1]^T, [0,0,1]^T\}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}_{\{[1,2]^T, [1,3]^T\}} = f(x)_{\{[1,2]^T, [1,3]^T\}}$$

Παρατήρηση: Για ένα διάνυσμα π.χ. το $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, ως προς τη συνηθισμένη (κανονική)

βάση του \square^3 , συντεταγμένες του είναι τα στοιχεία του διότι ισχύει

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παρόμοια για τον \square^2 και τη κανονική του βάση ισχύει:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 10\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

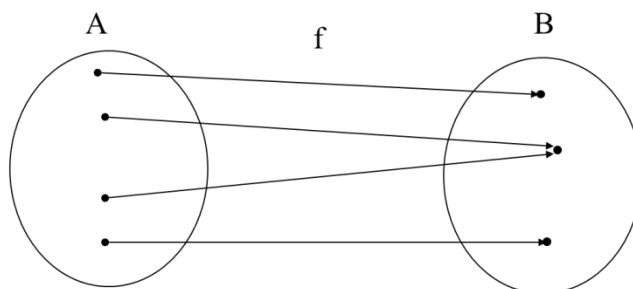
Θεωρούμε ότι οι βάσεις είναι διατεταγμένες δηλαδή τα στοιχεία τους έχουν μία συγκεκριμένη σειρά. Εάν τις θεωρήσω με διαφορετική σειρά τότε και οι συντεταγμένες των διανυσμάτων ως προς τη βάση με τη νέα αυτή σειρά είναι διαφορετικές.

5.3 Γραμμικοί Ισομορφισμοί και αντίστροφες Γραμμικές Απεικονίσεις.

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι V, W διαστάσεων n, m αντίστοιχα και f είναι μία γραμμική απεικόνιση (γραμμικός μετασχηματισμός) από τον V στο W .

Η απεικόνιση f ονομάζεται **επί** όταν $\forall y \in W \exists x \in V : y = f(x)$, δηλαδή κάθε στοιχείο του δ.χ. W αποτελεί εικόνα κάποιου στοιχείου του δ.χ. V .

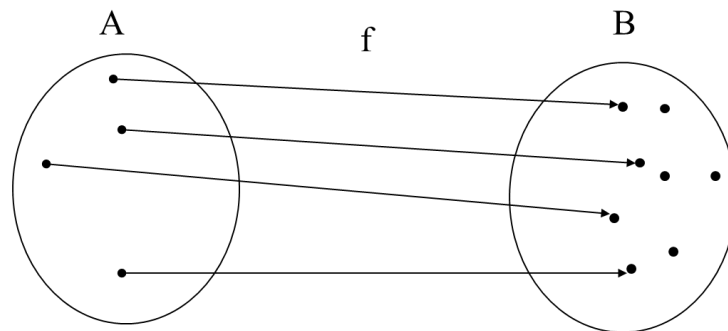
Απεικόνιση επί



Μία γραμμική απεικόνιση είναι επί εάν και μόνο εάν $\dim(\text{Im } f) = m$.

Η απεικόνιση f ονομάζεται **1-1** όταν $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

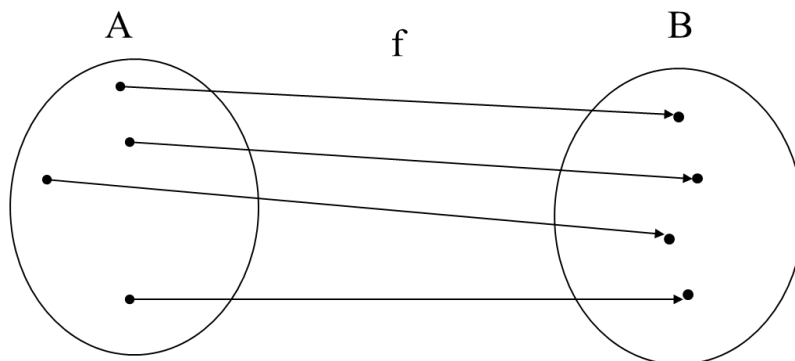
Απεικόνιση 1-1



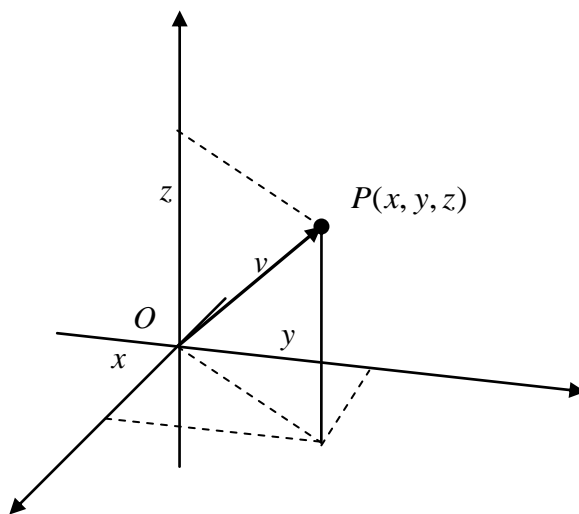
Μία γραμμική απεικόνιση είναι 1-1 εάν και μόνο εάν $\dim(\text{Ker } f) = 0$.

Η απεικόνιση f ονομάζεται **ισομορφισμός** εάν είναι **1-1** και **επί**. Οι διανυσματικοί χώροι V, W ονομάζονται **ισόμορφοι** όταν υπάρχει ισομορφισμός από το V στο W .

Απεικόνιση 1-1 και επί



Ισόμορφοι διανυσματικοί χώροι έχουν την ίδια μορφή και διαφέρουν ως προς την αναπαράσταση των στοιχείων τους.



Ένα απλό παράδειγμα ισόμορφων χώρων τους οποίους αντιμετωπίζουμε ως τον

ίδιο χώρο αποτελούν ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ και ο

(γεωμετρικός) διανυσματικός χώρος των διανυσμάτων θέσης του χώρου (δείτε

σχήμα). Ορίζοντας τον ισομορφισμό $T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = v$ μπορούμε να χειριστούμε τα

διανύσματα θέσης ως τριάδες αριθμών και αντίστροφα. Με αυτόν τον τρόπο αποδίδουμε γεωμετρικές ιδιότητες και εργαλεία σε έναν χώρο αριθμών, τον \mathbb{R}^3 , και αναλυτικά εργαλεία σε έναν χώρο καθαρά γεωμετρικό.

Ενδιαφέρον έχει το ακόλουθο θεώρημα:

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι V, W με **πεπερασμένες διαστάσεις** n, m αντίστοιχα και f είναι μία γραμμική απεικόνιση από τον V στο W τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η f είναι ισομορφισμός
2. Αν $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ είναι μία βάση του V τότε $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ είναι μία βάση του W .

Από το παραπάνω θεώρημα συνάγουμε ότι δύο διανυσματικοί χώροι V, W με **πεπερασμένες διαστάσεις** n, m είναι ισόμορφοι εάν και μόνο εάν έχουν τις ίδιες διαστάσεις ($n=m$).

Επίσης έστω δύο διανυσματικοί χώροι V, W ίδιας διάστασης n και f είναι μία γραμμική απεικόνιση (γραμμικός μετασχηματισμός) από τον V στο W , η απεικόνιση f είναι **ισομορφισμός** εάν είναι είτε 1-1 είτε επί. (Σε αυτή την περίπτωση το ένα αρκεί).

Παραδείγματα

Για κάθε χώρο V η ταυτοτική απεικόνιση $1_V : V \rightarrow V$ όπου $1_V(x) = x, \forall x \in V$ είναι ισομορφισμός.

Έστω B $m \times m$ αντιστρέψιμος πίνακας και στο χώρο πινάκων $m \times n$ θεωρήσω τη γραμμική απεικόνιση $T : M_{m \times n} \rightarrow M_{m \times n}$ όπου $T(X) = BX$ τότε αυτή η απεικόνιση είναι ισομορφισμός.

Δεδομένου ενός ισομορφισμού f μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων V, W διαστάσεων n, m αντίστοιχα, τότε ορίζεται ένας ισομορφισμός τον οποίο συμβολίζουμε με f^{-1} και καλούμε **αντίστροφη απεικόνιση** του f εάν ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $f(f^{-1}(x)) = x, \forall x \in V$, δηλαδή $f(f^{-1}(\dots)) = 1_V$
2. $f^{-1}(f(y)) = y, \forall y \in W$, δηλαδή $f^{-1}(f(\dots)) = 1_W$

Τέλος, εάν A ο πίνακας αναπαράστασης ενός γραμμικού ισομορφισμού ως προς τις συνήθεις (κανονικές) βάσεις τότε ο A^{-1} είναι ο πίνακας του αντίστροφου του ως προς τις κανονικές βάσεις επίσης.

Παράδειγμα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2x + y + 5z \\ 3x - 5z \\ x + y + 2z \end{bmatrix}.$$

Για να δείξουμε ότι είναι αντιστρέψιμη θα πρέπει να βρούμε τον πυρήνα και την εικόνα της ώστε να διαπιστώσουμε εάν είναι 1-1 και επί (ισομορφισμός).

Είναι εύκολο να δούμε ότι ο πίνακας αναπαράστασης της γραμμικής απεικόνισης,

ως προς τις συνήθεις βάσεις του \mathbb{R}^3 είναι απεικόνισης είναι : $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma 1 \leftrightarrow \Gamma 3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma 3 \rightarrow \Gamma 3 + 2\Gamma 1]{\Gamma 2 \rightarrow \Gamma 2 - 3\Gamma 1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -11 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma 3 \rightarrow \Gamma 3 + \Gamma 2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Αφού μη μηδενικά στοιχεία υπάρχουν στην $1^{\eta}, 2^{\eta}$ και 3^{η} στήλη του τελικού πίνακα η βάση της εικόνας αποτελείται από την $1^{\eta}, 2^{\eta}$ και 3^{η} στήλη του αρχικού πίνακα, δηλαδή $\dim(\text{Im } f) = 3$. Εφόσον η διάσταση αυτού του υπόχωρου του \mathbb{R}^3 είναι τρία συμπεραίνουμε ότι ο χώρος εικόνα συμπίπτει με τον \mathbb{R}^3 . Οπότε από τον τύπο $\dim V = \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f)$ έχουμε ότι $\dim \text{ker } f = 0$ άρα $\text{ker } f = \mathbf{0}$. Δηλαδή τελικά συμπεραίνουμε ότι f είναι αντιστρέψιμη.

Ο πίνακας αναπαράστασης της f^{-1} είναι $\mathbf{A}^{-1} = \frac{-1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 3 & -5 \\ -11 & -9 & 5 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$,

δηλαδή,

$$f^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = A^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6}x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{6}z \\ \frac{11}{6}x + \frac{3}{2}y - \frac{5}{6}z \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \end{bmatrix}.$$

5.4 Ασκήσεις

1. Να εξετάσετε ποιες από τις επόμενες απεικονίσεις είναι γραμμικές:

α) $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f_1([x, y]^T) = [xy, y]^T$, για κάθε $[x, y]^T \in \mathbb{R}^2$

β) $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f_2([x, y]^T) = [x+1, 3y, y-x]^T$, για κάθε $[x, y]^T \in \mathbb{R}^2$

γ) $f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f_3([x, y, z]^T) = [0, 2x, 3y]^T$, για κάθε $[x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$.

Λύση

α) η απεικόνιση $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f_1([x, y]^T) = [xy, y]^T$, για κάθε $[x, y]^T \in \mathbb{R}^2$ δεν είναι γραμμική, αφού για παράδειγμα έχουμε: $f_1(3[1, 1]^T) = f_1([3, 3]^T) = [9, 3]^T$, ενώ $3f_1([1, 1]^T) = 3[1, 1]^T = [3, 3]^T$, άρα $f_1(3[1, 1]^T) \neq 3f_1([1, 1]^T)$ και επομένως η f_1 δεν είναι γραμμική συνάρτηση.

β) Η απεικόνιση $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f_2([x, y]^T) = [x+1, 3y, y-x]^T$, για κάθε $[x, y]^T \in \mathbb{R}^2$ δεν είναι γραμμική απεικόνιση, εφόσον $f_2([0, 0]^T) = [1, 0, 0]^T \neq [0, 0, 0]^T$ ως όφειλε.

γ) Η απεικόνιση $f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f_3([x, y, z]^T) = [0, 2x, 3y]^T$, για κάθε $[x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$ είναι γραμμική διότι :

i) Έστω $[x_1, x_2, x_3]^T, [y_1, y_2, y_3]^T \in \mathbb{R}^3$. Τότε :

$$\begin{aligned} f_3\left([x_1, x_2, x_3]^T + [y_1, y_2, y_3]^T\right) &= f_3\left([x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3]^T\right) = [0, 2(x_1 + y_1), 3(x_2 + y_2)]^T \\ &= [0, 2x_1 + 2y_1, 3x_2 + 3y_2]^T = [0, 2x_1, 3x_2]^T + [0, 2y_1, 3y_2]^T = f_3\left([x_1, x_2, x_3]^T\right) + f_3\left([y_1, y_2, y_3]^T\right) \end{aligned}$$

ii) $f_3\left(k[x, y, z]^T\right) = f_3\left([kx, ky, kz]^T\right) = [0, 2kx, 3ky]^T = k[0, 2x, 3y]^T = kf_3\left([x, y, z]^T\right)$

2. Δίνεται η απεικόνιση:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : [x, y, z]^T \rightarrow [3x - 2y + 4z, x - 3y + 5z, 2x + y - z]^T$$

α) Αποδείξτε ότι είναι γραμμική και βρείτε τον πίνακά της ως προς τις κανονικές βάσεις του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών της.

β) Βρείτε βάσεις του πυρήνα $\text{Ker}f$ και της εικόνας $\text{Im}f$ της f .

ΛΥΣΗ

Για να είναι η απεικόνιση γραμμική θα πρέπει

$$f(\kappa x + \lambda y) = \kappa f(x) + \lambda f(y), \quad \forall x, y \in V \text{ και } \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{Έστω } x = [x_1, x_2, x_3]^T \quad y = [y_1, y_2, y_3]^T$$

κάτι που εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύει, για όλα τα κ, λ , με απλές πράξεις.

$$f(\kappa x + \lambda y) = f\left(\begin{bmatrix} 3(\kappa x_1 + \lambda y_1) - 2(\kappa x_2 + \lambda y_2) + 4(\kappa x_3 + \lambda y_3) \\ (\kappa x_1 + \lambda y_1) - 3(\kappa x_2 + \lambda y_2) + 5(\kappa x_3 + \lambda y_3) \\ 2(\kappa x_1 + \lambda y_1) + (\kappa x_2 + \lambda y_2) - (\kappa x_3 + \lambda y_3) \end{bmatrix}\right) =$$

$$= f\left(\begin{bmatrix} 3\kappa x_1 + 3\lambda y_1 - 2\kappa x_2 - 2\lambda y_2 + 4\kappa x_3 + 4\lambda y_3 \\ \kappa x_1 + \lambda y_1 - 3\kappa x_2 - 3\lambda y_2 + 5\kappa x_3 + 5\lambda y_3 \\ 2\kappa x_1 + 2\lambda y_1 + \kappa x_2 + \lambda y_2 - \kappa x_3 - \lambda y_3 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= f\left(\begin{bmatrix} 3\kappa x_1 - 2\kappa x_2 + 4\kappa x_3 \\ \kappa x_1 - 3\kappa x_2 + 5\kappa x_3 \\ 2\kappa x_1 + \lambda x_2 - \kappa x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\lambda y_1 - 2\lambda y_2 + 4\lambda y_3 \\ \lambda y_1 - 3\lambda y_2 + 5\lambda y_3 \\ 2\lambda y_1 + \lambda y_2 - \lambda y_3 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \kappa f(x) + \lambda f(y)$$

Ο πίνακας της απεικόνισης:

$$f([1, 0, 0]^T) = [3, 1, 2]^T$$

$$f([0, 1, 0]^T) = [-2, -3, 1]^T \quad \text{Οπότε και δημιουργώ τον πίνακα που έχει στήλες τις}$$

$$f([0, 0, 1]^T) = [4, 5, -1]^T$$

$$\text{εικόνες αυτές } A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ο πυρήνας

$$\text{Ker}f = \left\{ [x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3 / f([x, y, z]^T) = \mathbf{0} \right\}$$

Συνεπώς:

$$3x - 2y + 4z = 0$$

$$x - 3y + 5z = 0$$

$$2x + y - z = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \leftrightarrow \gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - 2\gamma_1]{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 3\gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -11 & 0 \\ 0 & 7 & -11 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - \gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$y = \frac{11}{7}z, x = (3\frac{11}{7} - 5z) = -\frac{2}{7}z$$

$$\text{Δηλαδή: } [x, y, z]^T = k[-2, 11, 7]^T$$

Το διάνυσμα $[-2, 11, 7]^T$ αποτελεί βάση του $\text{Ker}f$, άρα $\dim(\text{Ker}f) = 1$

Επίσης ισχύει $\dim \mathbb{R}^3 = \dim(\text{Im}f) + \dim(\text{Ker}f)$ οπότε $\dim(\text{Im}f) = 2$

$$\text{Im } f = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Επειδή η ορίζουσα του πίνακα $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ είναι μηδέν έπεται ότι τα παραπάνω

διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα, ενώ δύο από αυτά.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\gamma_2 \leftrightarrow \gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - 2\gamma_1]{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 3\gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & -11 \\ 0 & 7 & -11 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - \gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Οπότε μια βάση της εικόνας της f είναι τα δύο διανύσματα του αρχικού πίνακα τα οποία αντιστοιχούν στις στήλες του τελικού πίνακα που έχουν οδηγία στοιχεία (δηλαδή στην $1^{\text{η}}$ και στην $2^{\text{η}}$) οπότε, $[3,1,2]^T$ και $[-2,-3,1]^T$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του $\text{Im} f$.

3. Έστω $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση της οποίας ο πίνακας που αντιστοιχεί στην κανονική βάση του \mathbb{R}^3 είναι ο $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

- Βρείτε την εικόνα $\varphi([2,3,3]^T)$.
- Βρείτε μία βάση και τη διάσταση του χώρου $\text{Ker} \varphi$.
- Βρείτε μία βάση και τη διάσταση του χώρου $\varphi(\mathbb{R}^3)$.
- Αληθεύει ότι υπάρχει $[x,y,z]^T \in \mathbb{R}^3$ με $\varphi([x,y,z]^T) = [1,2,3]^T$;

Λύση

i. Επειδή ο δεδομένος πίνακας αντιστοιχεί στην κανονική βάση, η

$$\text{ζητούμενη εικόνα είναι το γινόμενο } \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix}$$

ii. Λύνοντας το σύστημα $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ βρίσκουμε

$[x, y, z]^T = [-z, 0, z]^T$, όπου $z \in \mathbb{R}$. Συνεπώς η διάσταση του $\text{Ker} \varphi$ είναι 1

και μια βάση του $\text{Ker} \varphi$ είναι το σύνολο $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

iii. Η διάσταση του $\varphi(\mathbb{R}^3)$ είναι ίση με $3 - \dim \ker \varphi = 2$. Τα στοιχεία $\varphi([1,0,0]^T)$, $\varphi([0,1,0]^T)$, $\varphi([0,0,1]^T)$ παράγουν τον χώρο $\varphi(\mathbb{R}^3)$. Άρα για να βρούμε μια βάση του $\varphi(\mathbb{R}^3)$, αρκεί να βρούμε δύο γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία από τα $\varphi([1,0,0]^T)$, $\varphi([0,1,0]^T)$, $\varphi([0,0,1]^T)$. Έχουμε $\varphi([1,0,0]^T) = [-1,3,0]^T$ και $\varphi([0,1,0]^T) = [0,0,5]^T$ που μπορούμε να δείξουμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

iv. Το σύστημα
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$
 δεν έχει λύση. Πράγματι, ο

επαυξημένος πίνακας του συστήματος μετά από μια γραμμοπράξη

παίρνει τη μορφή
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{array} \right]$$
. Από τη δεύτερη γραμμή

συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι ασυμβίβαστο.

4. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f([x, y, z]^T) = [x+2y+z, y^a+b, 2x+y+2z]^T.$$

Να βρεθούν :

- οι τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι γραμμική
- για τις τιμές αυτές των a, b να προσδιορισθούν:
- ο πίνακας της f ως προς την κανονική βάση του \mathbb{R}^3 , και η κλιμακωτή μορφή του πίνακα αυτού,
- βάση και διάσταση των υπόχωρων $\ker f$, και $\text{Im } f$
- Είναι η f αντιστρέψιμη; Είναι η f επί;

Λύση

i) Από την ισότητα

$$f(k\mathbf{w}_1 + \lambda\mathbf{w}_2) = kf(\mathbf{w}_1) + \lambda f(\mathbf{w}_2),$$

όπου $\mathbf{w}_i = [x_i, y_i, z_i]^T$, έχουμε

$$(ky_1 + \lambda y_2)^a + b = ky_1^a + \lambda y_2^a + (k + \lambda)b, \quad \text{για κάθε } k, \lambda \in \mathbb{R},$$

η οποία ισχύει ακριβώς όταν $a = 1, b = 0$.

ii) Παίρνουμε τις εικόνες των στοιχείων της κανονικής βάσης $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]^T$, $\mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]^T$, $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]^T$.

$$f(\mathbf{e}_1) = [1, 0, 2]^T$$

$$f(\mathbf{e}_2) = [2, 1, 1]^T$$

$$f(\mathbf{e}_3) = [1, 0, 2]^T$$

ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης είναι $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Η κλιμακωτή μορφή

του είναι :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{iii) } \ker f = \{ \mathbf{x} : f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \} = \{ \mathbf{x} : F\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \mathbf{x} : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x} : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \right\} = \{ \mathbf{x} : x_2 = 0, x_1 + x_3 = 0 \} \\ &= \{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = c[1 \ 0 \ -1]^T, c \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

και από εδώ συμπεραίνουμε ότι $\dim(\ker f) = 1$.

Από τον πίνακα στην ανηγμένη του κλιμακωτή μορφή συμπεραίνουμε ότι από τα $[1, 0, 2]^T$, $[2, 1, 1]^T$ και $[1, 0, 2]^T$, τα δύο πρώτα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και αποτελούν τη βάση του $\text{Im } f$. Συνεπώς $\dim(\text{Im } f) = 2$ κάτι που επιβεβαιώνεται και από το ότι $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f)$ οπότε $\dim(\text{Im } f) = 2$.

iv) Επειδή $\ker f \neq \mathbf{0}$ η απεικόνιση f συμπεραίνουμε ότι η f είναι μη αντιστρέψιμη. Επιπλέον επειδή η f δεν είναι και επί διότι η διάσταση της εικόνας της είναι 2 και όχι 3, οπότε $\text{Im } f \neq \mathbb{R}^3$.

5. Δίνεται η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο:

$$f\left([x, y, z]^T\right) = [x + 2y, x - y - z, 2x + y - z]^T.$$

- (i) Δείξτε ότι η f είναι γραμμική.
- (ii) Προσδιορίστε τον πυρήνα και την εικόνα της f καθώς και αντίστοιχες βάσεις. Είναι η f 1-1 ή/και επί;
- (iii) Βρείτε τον πίνακα της f ως προς την κανονική βάση του \mathbb{R}^3 . Υπάρχει ο αντίστροφός του;

Λύση

(i) Για κάθε επιλογή διανυσμάτων $\vec{u} = [x, y, z]^T$, $\vec{v} = [x', y', z']^T$ του πεδίου ορισμού \mathbb{R}^3 έχουμε:

$$\begin{aligned} f(\vec{u} + \vec{v}) &= f\left([x, y, z]^T + [x', y', z']^T\right) = f\left([x + x', y + y', z + z']^T\right) = \\ &= [(x + x') + 2(y + y'), (x + x') - (y + y') - (z + z'), 2(x + x') + (y + y') - (z + z')]^T = \\ &= [x + 2y + x' + 2y', x - y - z + x' - y' - z', 2x + y - z + 2x' + y' - z']^T = \\ &= [x + 2y, x - y - z, 2x + y - z]^T + [x' + 2y', x' - y' - z', 2x' + y' - z']^T = \\ &= f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned}
 f(\lambda \bar{u}) &= f(\lambda [x, y, z]^T) = f([\lambda x, \lambda y, \lambda z]^T) = \\
 &= [\lambda x + 2\lambda y, \lambda x - \lambda y - \lambda z, 2\lambda x + \lambda y - \lambda z]^T = \\
 &= \lambda [x + 2y, x - y - z, 2x + y - z]^T = \\
 &= \lambda f(\bar{u})
 \end{aligned}$$

Επομένως, η f είναι πράγματι γραμμική απεικόνιση.

(ii) Για τον πυρήνα της f έχουμε:

$$\begin{aligned}
 [x, y, z]^T \in \text{Ker}f &\Leftrightarrow f([x, y, z]^T) = [0, 0, 0]^T \Leftrightarrow [x + 2y, x - y - z, 2x + y - z]^T = [0, 0, 0]^T \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ -3y - z = 0 \\ -3y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = -3y \end{cases}, y \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Έτσι τα στοιχεία του $\text{Ker}f$ έχουν τη μορφή:

$$[-2y, y, -3y]^T = y \cdot [-2, 1, -3]^T, \quad y \in \mathbb{R},$$

με το διάνυσμα $[-2, 1, -3]^T$ να αποτελεί βάση.

Πρόκειται δηλαδή για έναν υπόχωρο του \mathbb{R}^3 διάστασης 1.

Αντίστοιχα, για την εικόνα $\text{Im}f$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \bar{v} \in \text{Im}f &\Leftrightarrow \bar{v} = f([x, y, z]^T) \Leftrightarrow \bar{v} = [x + 2y, x - y - z, 2x + y - z]^T \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \bar{v} = [x, x, 2x]^T + [2y, -y, y]^T + [0, -z, -z]^T \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \bar{v} = x \cdot [1, 1, 2]^T + y \cdot [2, -1, 1]^T + z \cdot [0, -1, -1]^T
 \end{aligned}$$

Πρόκειται δηλαδή για τον υπόχωρο του \mathbb{R}^3 που παράγεται από τα διανύσματα

$$[1, 1, 2]^T, [2, -1, 1]^T, [0, -1, -1]^T$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι οι διαστάσεις του πυρήνα και της εικόνας της γραμμικής απεικόνισης f συνδέονται μέσω της σχέσης :

$$\dim(\text{Ker}f) + \dim(\text{Im}f) = \dim(\mathbb{R}^3),$$

και δεδομένου ότι ήδη αποδείξαμε πως $\dim(\text{Ker}f)=1$, συμπεραίνουμε ότι $\dim(\text{Im}f)=2$.

Συνεπώς, δύο μόνο από τα προηγούμενα διανύσματα θα είναι ανεξάρτητα και θα αποτελούν μία βάση της εικόνας. Αυτό επαληθεύεται και από το γεγονός ότι η ορίζουσα του πίνακα που σχηματίζουν τα τρία διανύσματα είναι μηδέν, όπως εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε.

Οποιαδήποτε επιλογή ζεύγους από τα $[1, 1, 2]^T, [2, -1, 1]^T, [0, -1, -1]^T$ δίνει γρ. ανεξάρτητα διανύσματα, αφού κανένα δεν είναι συγγραμμικό (πολλαπλάσιο) άλλου.

Έτσι για παράδειγμα τα $\{[1,1,2]^T, [2,-1,1]^T\}$ αποτελούν μια βάση της $\text{Im}f$.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω συμπεράσματα μπορούμε να πούμε ότι:

Η f δεν είναι 1-1 αφού ο πυρήνας της δεν είναι μηδενικός.

Η f δεν είναι επί αφού η εικόνα της δεν συμπίπτει με το πεδίο τιμών της έχοντας μικρότερη διάσταση από αυτό.

(iii) Για την κανονική βάση $\{[1,0,0]^T, [0,1,0]^T, [0,0,1]^T\}$ του \mathbb{R}^3 έχουμε :

$$f([1,0,0]^T) = [1+2\cdot 0, 1-0-0, 2\cdot 1+0-0]^T = [1,1,2]^T$$

$$f([0,1,0]^T) = [0+2\cdot 1, 0-1-0, 2\cdot 0+1-0]^T = [2,-1,1]^T$$

$$f([0,0,1]^T) = [0+2\cdot 0, 0-0-1, 2\cdot 0+0-1]^T = [0,-1,-1]^T$$

Επομένως, ο πίνακας της f ως προς την κανονική βάση του \mathbb{R}^3 είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Δεδομένου ότι ο πίνακας που αντιστοιχεί σε μία γραμμική απεικόνιση είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν το ίδιο συμβαίνει και με την αντίστοιχη απεικόνιση, ο A δεν αντιστρέφεται αφού η f δεν είναι 1-1 και επί.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στο σύγγραμμα που διανέμεται και στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος. Το περιεχόμενο του αρχείου απλά αποτελεί περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα για δική του χρήση και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί και να μην αναπαραχθεί και διανεμηθεί για άλλο σκοπό.