

## Κεφάλαιο 6 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

### Ορισμοί

Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πίνακας με πραγματικά στοιχεία. Ο πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός  $\lambda$  καλείται **ιδιοτιμή** του πίνακα  $A$  εάν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα  $v$  με πραγματικά ή μιγαδικά στοιχεία τέτοιο ώστε

$$Av = \lambda v$$

Το μη μηδενικό διάνυσμα  $v$  καλείται **ιδιοδιάνυσμα** του πίνακα  $A$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda$ .

### Παράδειγμα

Έστω  $A = \begin{bmatrix} 20 & -36 \\ 12 & -22 \end{bmatrix}$  παρατηρώ ότι  $A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -36 \\ 12 & -22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  οπότε το

$\lambda = 2$  είναι ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  και το  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Επίσης  $A \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -36 \\ 12 & -22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -8 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  οπότε το  $\lambda = -4$  είναι ιδιοτιμή του

πίνακα  $A$  και το  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

### Παράδειγμα

Έστω ένας  $3 \times 3$  πραγματικός πίνακας  $A$ , τέτοιος ώστε  $A[1 \ 1 \ 1]^T = [3 \ 3 \ 3]^T$ ,

$A[1 \ 1 \ 0]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$  και  $A[1 \ 0 \ -1]^T = [-2 \ 0 \ 2]^T$ .

Να βρείτε τις ιδιοτιμές, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$ .

Επειδή  $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  και

$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,

ο πίνακας  $A$  έχει την ιδιοτιμή  $\lambda_1 = 3$  με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το  $\mathbf{x}_1 = [1 \ 1 \ 1]^T$ , την ιδιοτιμή  $\lambda_2 = 0$  με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{x}_2 = [1 \ 1 \ 0]^T$  και την ιδιοτιμή  $\lambda_3 = -2$  με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{x}_3 = [1 \ 0 \ -1]^T$ .

Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πίνακας με πραγματικά στοιχεία. Ο πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός  $\lambda$  είναι **ιδιοτιμή** του πίνακα  $A$  εάν και μόνο εάν

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

**Απόδειξη:**

Εάν αριθμός  $\lambda$  είναι **ιδιοτιμή** του πίνακα  $A$  από τον ορισμό αυτό ισχύει εάν και μόνο εάν:

$$Av = \lambda v$$

Όπου το  $v$  είναι μη μηδενικό διάνυσμα, οπότε έχουμε τις ισοχυναμίες:

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \lambda v = \mathbf{0} \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = \mathbf{0}$$

Δηλαδή, το ομογενές σύστημα με πίνακα:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

έχει και άλλες λύσεις εκτός από την μηδενική λύση. Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας του έχει μηδενική ορίζουσα (δείτε το κεφάλαιο των οριζουσών). Δηλαδή, οι ρίζες του  $\det(A - \lambda I) = 0$  είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα, μιας και αυτές είναι οι μοναδικές τιμές οι οποίες μηδενίζουν την ορίζουσα του συστήματος.

Το πολυώνυμο  $p(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I)$  ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο**, η παραπάνω εξίσωση  $\det(A - \lambda I) = 0$ , **χαρακτηριστική εξίσωση** και οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα **χαρακτηριστικά μεγέθη**.

Εάν  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$  τότε

$$p(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I) = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός  $n \times n$  πίνακα  $A$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $n$  με μορφή:

$$p(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει  $n$  στο σύνολο πραγματικές και μιγαδικές ρίζες, οι οποίες είναι και οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, οπότε ο πίνακας  $A$  έχει  $n$  στο σύνολο πραγματικές ή μιγαδικές ιδιοτιμές.

Καθεμία από αυτές τις ρίζες μπορεί να εμφανίζονται παραπάνω από μία φορές στο ανάπτυγμα του πολυωνύμου σε γινόμενα πρωτοβάθμιων πολυωνύμων. Δηλαδή, ισχύει

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{r_m} = 0$$

όπου  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  οι  $m$  διακεκριμένες (διαφορετικές μεταξύ τους) ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (δηλαδή ιδιοτιμές του πίνακα) με πολλαπλότητα  $r_1, r_2, \dots, r_m$  αντίστοιχα όπου ισχύει  $r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$ .

Η πολλαπλότητα κάθε ρίζας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ονομάζεται **αλγεβρική πολλαπλότητα** της αντίστοιχης ιδιοτιμής.

Εάν  $\lambda = a + bi$  μία μιγαδική ιδιοτιμή τότε και η συζυγής της  $\lambda = a - bi$  είναι ιδιοτιμή του πίνακα. Επίσης το ιδιοδιάνυσμα της μίας ιδιοτιμής είναι το διάνυσμα με στοιχεία τα συζυγή στοιχεία του ιδιοδιανύσματος της άλλης.

Το σύνολο των ιδιοτιμών ενός πίνακα λέγεται **φάσμα** του πίνακα και συμβολίζεται συνήθως με  $\sigma(A)$ .

Εάν  $v$  είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε μία ιδιοτιμή ενός πίνακα  $A$  τότε το  $kv$  για κάθε  $k$  πραγματικό είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ίδια ιδιοτιμή του πίνακα  $A$ . Πράγματι  $Av = \lambda v \Leftrightarrow A(kv) = \lambda(kv)$ .

Εάν  $v_1, v_2$  είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μία ιδιοτιμή ενός πίνακα  $A$  τότε το  $kv_1 + \mu v_2$  για κάθε  $k, \mu$  πραγματικούς είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ίδια ιδιοτιμή του πίνακα  $A$ . Πράγματι

$$\left. \begin{array}{l} Av_1 = \lambda v_1 \Leftrightarrow A(kv_1) = \lambda(kv_1) \\ Av_2 = \lambda v_2 \Leftrightarrow A(\mu v_2) = \lambda(\mu v_2) \end{array} \right\} \Rightarrow A(kv_1 + \mu v_2) = \lambda(kv_1 + \mu v_2).$$

**Για να βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα:**

1. Υπολογίζουμε τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $p(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I)$  λύνοντας την εξίσωση  $p(\lambda) = 0$  ή ισοδύναμα την χαρακτηριστική εξίσωση  $\det(A - \lambda I) = 0$ .
2. Για κάθε μία από αυτές λύνουμε το ομογενές σύστημα  $(A - \lambda I)v = 0$ .

### Παράδειγμα

Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά μεγέθη του πίνακα  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του  $A$  είναι η  $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & -1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ .

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ρίζες  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$  οι οποίες είναι οι ιδιοτιμές του  $A$ . Για καθεμία από αυτές θα βρούμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα.

Για  $\lambda = \lambda_1 = 1$  έχουμε:

$$(A - \lambda_1 I) \cdot \tilde{x} = \begin{bmatrix} 0-1 & -1 \\ 2 & 3-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = -x_2.$$

Το σύστημα έχει λύση  $x_1 = -x_2$  οπότε  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  και οπότε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι  $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Για  $\lambda = \lambda_2 = 2$  έχουμε:

$$(A - \lambda_2 I) \cdot \tilde{x} = \begin{bmatrix} 0-2 & -1 \\ 2 & 3-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_2 = -2x_1, \quad \text{Το}$$

σύστημα έχει λύση  $x_2 = -2x_1$  οπότε  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  και οπότε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι  $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ .

### Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1. \quad \text{Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει ρίζες τις}$$

ιδιοτιμές του  $\mathbf{A}$ ,  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$ . Θα βρούμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα.

Για  $\lambda = \lambda_1 = i$  έχουμε:  $(A - \lambda_1 I) \cdot \tilde{x} = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Το σύστημα έχει λύση

$x_1 = ix_2$  οπότε  $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ix_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$  και οπότε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι

$$v_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Για  $\lambda = \lambda_2 = -i$  έχουμε:  $(A - \lambda_2 I) \cdot \tilde{x} = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,

Το σύστημα έχει λύση  $x_1 = -ix_2$  οπότε  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ix_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$  και οπότε το

αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι  $\tilde{x} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ .

### Παράδειγμα

Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  βρείτε τα ιδιοποσά του πίνακα..

Από την χαρακτηριστική εξίσωση πολυώνυμο που προκύπτει βρίσκουμε τις ιδιοτιμές:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -1(-\lambda - 0) - \lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}.$$

Για κάθε μια ιδιοτιμή  $\lambda$ , λύνουμε τώρα το  $3 \times 3$  σύστημα  $(A - \lambda \cdot I) \cdot \tilde{x} = 0$  με γραμμοπράξεις και βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα ως εξής:

Για  $\lambda = 0$ , βρίσκουμε ότι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $[x_1, x_2, x_3]^T = x[1, 0, -1]^T$ , όπου  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ , δίνουν το ιδιοδιάνυσμα  $[1, 0, -1]^T$ .

Παρόμοια, για  $\lambda = \sqrt{2}$ , οι λύσεις του  $\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  δίνουν τη λύση

$$x_2 = \sqrt{2}x_1 = \sqrt{2}x_3, \text{ από όπου παίρνουμε } x_1 = x_3 \text{ και τελικά το ιδιοδιάνυσμα } [1, \sqrt{2}, 1]^T.$$

ενώ για  $\lambda = -\sqrt{2}$ , οι λύσεις του  $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  δίνουν τη λύση

$$x_2 = -\sqrt{2}x_1 = -\sqrt{2}x_3, \text{ από όπου παίρνουμε } x_1 = x_3 \text{ και τελικά το ιδιοδιάνυσμα } [1, -\sqrt{2}, 1]^T.$$

### Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Σύμφωνα με τη θεωρία η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα είναι

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = ((3-\lambda)^2 - (-2) \cdot (-2))(5-\lambda) =$$

$$(\lambda^2 - 6\lambda + 9 - 4)(5-\lambda) = (\lambda^2 - 6\lambda + 5)(\lambda - 5) = -(\lambda - 5)^2(\lambda - 1)$$

Οπότε έχουμε δύο ιδιοτιμές την  $\lambda = 1$  και τη διπλής αλγεβρικής πολλαπλότητας  $\lambda = 5$ .

Για  $\lambda = 1$  τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$$(A - 1 \cdot I) \cdot \tilde{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-1 & -2 & 0 \\ -2 & 3-1 & 0 \\ 0 & 0 & 5-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Οπότε το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτήν την ιδιοτιμή είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Για  $\lambda = 5$  τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$$(A - 5 \cdot I) \cdot \tilde{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-5 & -2 & 0 \\ -2 & 3-5 & 0 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ 0x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 \text{ αυθαίρετο} \end{cases}$$

Οπότε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε αυτήν την ιδιοτιμή είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής είναι τα}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

## Ιδιοχώροι

Έστω  $\lambda$  ιδιοτιμή του  $n \times n$  πίνακα  $A$  και έστω

$$E_\lambda = \{v : Av = \lambda v\}$$

Το σύνολο αυτό είναι ένας υπόχωρος του  $\mathbb{C}^n$  (ο χώρος με τα διανύσματα με μιγαδικά στοιχεία, και καλείται **ιδιόχωρος** του πίνακα  $A$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda$ ).

Η διάσταση  $\dim E_\lambda$  του ιδιοχώρου μίας ιδιοτιμής καλείται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής και ισούται με την μηδενικότητα του πίνακα  $A - \lambda I$ . Η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι μικρότερη ή ίση από την αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής.

Επίσης ισχύουν:

1. Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πίνακας με πραγματικά στοιχεία όπου  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$   $m$  διακεκριμένες (διαφορετικές μεταξύ τους) ιδιοτιμές του πίνακα στις οποίες αντιστοιχούν  $v_1, v_2, \dots, v_m$  ιδιοδιανύσματα. Τότε τα ιδιοδιανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
2. Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πίνακας με πραγματικά στοιχεία τότε ο πίνακας έχει  $n$  γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα εάν και μόνο εάν η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητά της.

### Παράδειγμα

Για τον πίνακα  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  είχαμε βρει

Για  $\lambda = 1$  τα ιδιοδιανύσματα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτήν την ιδιοτιμή

είναι της μορφής  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Για  $\lambda = 5$  τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε αυτήν την ιδιοτιμή είναι της

μορφής  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής

είναι τα  $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ .

Οπότε για  $\lambda = 5$   $E_2 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$  με διάσταση 2. Η γεωμετρική πολλαπλότητα

αυτής της ιδιοτιμής είναι 2 όση και η αλγεβρική οπότε και τα τρία διανύσματα

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

### Παράδειγμα

Για τον  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα είναι

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2$$

Οπότε έχουμε ιδιοτιμή διπλής αλγεβρικής πολλαπλότητας.

Για  $\lambda=1$  τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$$(B-1 \cdot I) \cdot \tilde{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ και το } x_2 \text{ παίρνει αυθαίρετες τιμές}$$

οπότε για την ιδιοτιμή 1 έχουμε ιδιοδιάνυσμα  $x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  οπότε η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής είναι 1.

### Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του  $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}$

Σύμφωνα με τη θεωρία η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα είναι

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & -9 \\ 0 & 5-\lambda & 18 \\ 0 & -2 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 18 \\ -2 & -7-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)^3$$

Οπότε έχουμε την τριπλής αλγεβρικής πολλαπλότητας  $\lambda = -1$ .

Για  $\lambda = -1$  τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$$(A+1 \cdot I) \cdot \tilde{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -3 & -9 \\ 0 & 6 & 18 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -3x_3 \\ x_1 = \text{αυθαίρετο} \end{cases}$$

Οπότε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε αυτήν την ιδιοτιμή είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -3x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής είναι τα}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \text{ Άρα η ιδιοτιμή έχει γεωμετρική πολλαπλότητα 2.}$$

### Ιδιότητες ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων

Έστω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα  $A$

$$p(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I) = \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0$$

οπότε ισχύει

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \dots (\lambda - \lambda_m)^{r_m}$$

και η ορίζουσα του πίνακα

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_m = (-1)^n b_0$$

Οπότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- $\det(A) = 0$
- το 0 είναι ιδιοτιμή του πίνακα
- ο σταθερός όρος  $b_0$  του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι 0.
- ο πίνακας είναι ιδιάζοντας και δεν αντιστρέφεται.

Το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου ενός τετραγωνικού πίνακα το ονομάζουμε **ίχνος του τετραγωνικού πίνακα A** (trace) και συμβολίζουμε:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Για τις ιδιοτιμές ενός τετραγωνικού πίνακα ισχύει:

$$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

Επίσης  $\sigma(A) = \sigma(A^T)$ .

Εάν  $A$  τριγωνικός τότε ιδιοτιμές είναι τα διαγώνια στοιχεία του.

Εάν  $Av = \lambda v$  και  $Bv = \mu v$  τότε το  $(A+B)v = (\lambda + \mu)v$  και  $(AB)v = (\lambda\mu)v$ .

Έτσι συμπεραίνουμε  $A^2v = \lambda^2v$  και γενικεύοντας όταν  $\lambda$  ιδιοτιμή του  $A$  τότε  $\lambda^m$  ιδιοτιμή του  $A^m$ .

Επίσης εάν  $\lambda, \nu$  χαρακτηριστικά ποσά του  $A$  τότε  $\lambda^{-1}, \nu$  χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα  $A^{-1}$ .

### Παράδειγμα

Στο παράδειγμά μας όπου έχουμε  $3 \times 3$  πραγματικό πίνακα  $A$ , τέτοιος ώστε

$$A[1 \ 1 \ 1]^T = [3 \ 3 \ 3]^T, \quad A[1 \ 1 \ 0]^T = [0 \ 0 \ 0]^T \quad \text{και} \quad A[1 \ 0 \ -1]^T = [-2 \ 0 \ 2]^T.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$  είναι

$$p(\lambda) = (-1)^3 \det(A - \lambda I) = (\lambda - 3)(\lambda - 0)(\lambda + 2) = \lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda.$$

Δεν υπάρχει ο  $A^{-1}$  διότι  $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$ .

Οι ιδιοτιμές του  $A^8$  είναι  $\lambda_1^8 = 3^8$ ,  $\lambda_2^8 = 0$  και  $\lambda_3^8 = (-2)^8 = -256$ .

### Παράδειγμα

Δίνεται ο τετραγωνικός πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -6 & -4 & 6 \end{bmatrix}$  δεδομένου ότι μία ιδιοτιμή του

πίνακα  $A$  είναι 1 βρείτε τις υπόλοιπες ιδιοτιμές του.

Αφού  $\lambda_1 = 1$  και γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$trace(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

Αρχικά, υπολογίσουμε την

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -6 & -4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 2(0+8) = 16$$

Οπότε, οδηγούμαστε στο σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} 1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 9 \\ 1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 16 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda_3 = 8 - \lambda_2 \\ \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 16 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda_3 = 8 - \lambda_2 \\ \lambda_2 \cdot (8 - \lambda_2) = 16 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda_3 = 8 - \lambda_2 \\ \lambda_2^2 - 8\lambda_2 + 16 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_3 = 8 - \lambda_2 \\ (\lambda_2 - 4)^2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda_3 = 8 - \lambda_2 \\ \lambda_2 = 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 4 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$$

## Ομοιότητα πινάκων – διαγωνοποίηση

Δύο  $n \times n$  πίνακες  $A, B$  καλούνται **όμοιοι** εάν υπάρχει αντιστρέψιμος  $n \times n$  πίνακας  $P$  τέτοιος ώστε  $B = P^{-1}AP$ .

Ισοδύναμος ορισμός είναι εάν ισχύει  $PB = AP$ . Φυσικά για τον  $Q = P^{-1}$  θα ισχύει  $BQ = QA$

### Παράδειγμα

Έστω  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$  και  $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ .

Ισχύει  $PB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  και  $AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

### Παράδειγμα

Έστω  $A = \begin{bmatrix} -6 & -3 & -25 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ ,  $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  και  $P = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ .

Ισχύει  $PA = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -3 & -25 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & 10 & 14 \end{bmatrix}$  και

$$DP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & 10 & 14 \end{bmatrix}.$$

Εάν δύο  $n \times n$  πίνακες  $A, B$  καλούνται **όμοιοι** τότε έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο οπότε και τις ίδιες ιδιοτιμές.

Ένας  $n \times n$  πίνακας  $A$  καλείται **διαγωνοποιήσιμος** εάν υπάρχει διαγώνιος  $n \times n$  πίνακας  $D$  όμοιος με τον  $A$ . Δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος  $n \times n$  πίνακας  $P$  ώστε

$$D = P^{-1}AP.$$

Ένας  $n \times n$  πίνακας  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος εάν και μόνο εάν έχει  $n$  γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Δηλαδή είναι διαγωνοποιήσιμος εάν και μόνο εάν η γεωμετρική πολλαπλότητα της κάθε ιδιοτιμής είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητά της.

Εάν  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  οι  $n$  ιδιοτιμές και  $v_1, v_2, \dots, v_n$  τα αντίστοιχα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα τότε:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

και ο πίνακας  $P$  έχει ως στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_n]$$

Για αυτούς τους πίνακες ισχύει

$$D = P^{-1}AP.$$

**Ένας  $n \times n$  πίνακας  $A$  με  $n$  διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι διαγωνοποιήσιμος.**

Εφόσον ισχύει  $D = P^{-1}AP$  ισχύει και  $A = PDP^{-1}$  οπότε και

$$A^k = (PDP^{-1})^k = \underbrace{PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1}}_{k \text{ φορές}} = PD^k P^{-1}$$

### Παράδειγμα

Στο γνωστό παράδειγμά μας όπου έχουμε  $3 \times 3$  πραγματικό πίνακα  $A$ , τέτοιος

ώστε  $A[1 \ 1 \ 1]^T = [3 \ 3 \ 3]^T$ ,  $A[1 \ 1 \ 0]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$  και  $A[1 \ 0 \ -1]^T = [-2 \ 0 \ 2]^T$ .

Επειδή οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες (δηλαδή όλες διαφορετικές), ο πίνακας  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος. Ο δε πίνακας  $P$ , με στήλες τα ιδιοδιανύσματα, δηλαδή

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ , είναι αντιστρέψιμος, διότι τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά

ανεξάρτητα, αφού αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές.

Υπολογίζουμε τον  $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  και επαληθεύουμε την ισότητα.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Από τη σχέση } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = P \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 5 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

### Παράδειγμα

Για τον  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  έχουμε δείξει ότι έχει διοτιμή  $\lambda=1$  διπλής αλγεβρικής πολλαπλότητας με γεωμετρική πολλαπλότητα 1. Οπότε ο πίνακας δεν διαγωνοποιείται.

### Παράδειγμα

Για τον  $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}$  έχουμε την τριπλής αλγεβρικής πολλαπλότητας  $\lambda = -1$  με γεωμετρική πολλαπλότητα 2. Συμπέρασμα δεν διαγωνοποιείται.

### Παράδειγμα

Για τον πίνακα  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  είχαμε βρει:

Για την μονής αλγεβρικής πολλαπλότητας ιδιοτιμή  $\lambda=1$  που αντιστοιχεί

ιδιοδιάνυσμα της μορφής  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Για την διπλής αλγεβρικής πολλαπλότητας ιδιοτιμή  $\lambda = 5$  τα ιδιοδιανύσματα που

αντιστοιχούν είναι της μορφής  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  οπότε ο ιδιοχώρος της

συγκεκριμένης ιδιοτιμής είναι ο  $E_2 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$  έχει διάσταση 2. Άρα η

γεωμετρική πολλαπλότητα αυτής της ιδιοτιμής είναι 2 όση και η αλγεβρική οπότε

και τα τρία διανύσματα  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Συμπεραίνουμε,

λοιπόν, ότι ο πίνακας διαγωνοποιείται και  $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ .

Μπορούμε να το πιστοποιήσουμε χωρίς να βρούμε τον αντίστροφο αφού

$$AP = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, PD = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

### Παράδειγμα

Έστω ο πραγματικός πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  υπολογίστε τον  $A^{2004}$ .

Σε προηγούμενο παράδειγμα είχαμε δει ότι ο πίνακας έχει δύο διαφορετικές

ιδιοτιμές ( $\lambda = \lambda_1 = 1$  με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  και  $\lambda = \lambda_2 = 2$  με

αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι  $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ).

Επειδή ο  $A$  είναι ένας  $2 \times 2$  πίνακας που έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές, ο  $A$

διαγωνοποιείται. Έστω  $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$  (οι στήλες του  $P$  είναι ιδιοδιανύσματα του  $A$ ).

Τότε  $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$A^{2004} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{2004} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{2004} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2^{2004} & 1-2^{2004} \\ -2+2^{2005} & -1+2^{2005} \end{bmatrix}$$

## Θεώρημα Cayley-Hamilton

Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πίνακας με πραγματικά στοιχεία, τότε ο πίνακας αυτός επαληθεύει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο, δηλαδή ισχύει:

$$p(A) = A^n + b_{n-1}A^{n-1} + \dots + b_1A + b_0I = \mathbf{0}$$

Από αυτό το θεώρημα όταν  $b_0 \neq 0$ , δηλαδή το 0 μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του πίνακα οπότε και  $\det(A) \neq 0$  οπότε ο πίνακας αντιστρέφεται, μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο του  $A$ .

$$A^n + b_{n-1}A^{n-1} + \dots + b_1A + b_0I = \mathbf{0} \Leftrightarrow b_0I = -A^n - b_{n-1}A^{n-1} - \dots - b_1A \Leftrightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{b_0}(-A^{n-1} - b_{n-1}A^{n-2} - \dots - b_1A - b_0I)$$

## Παράδειγμα

Έστω ο πραγματικός πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ . Εκφράστε τον πίνακα  $A^{-2}$  ως

πολυώνυμο του  $A$ .

## Λύση

Τα χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$  είναι  $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$ . Αφού ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου δεν είναι μηδέν, το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του πίνακα οπότε ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος.

Από το Θεώρημα Cayley - Hamilton έχουμε  $A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0$  και πολλαπλασιάζοντας με τον  $A^{-1}$  παίρνουμε

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(-A^2 + 2A + I).$$

Με ανάλογο τρόπο πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω με  $A^{-1}$  παίρνουμε

$$A^{-2} = \frac{1}{2}(-A + 2I + A^{-1}).$$

$$\text{Άρα } A^{-2} = \frac{1}{2}\left(-A + 2I + \frac{1}{2}(-A^2 + 2A + I)\right) = -\frac{1}{4}A^2 + \frac{5}{4}I.$$

## Παράδειγμα

Να βρεθεί ο αντίστροφος των πινάκων  $A$  και  $B$  με τη χρήση του θεωρήματος Cayley-Hamilton

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha) p(\lambda) = (-1)^2 \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = P(\lambda).$$

Αφού ο σταθερός όρος δεν είναι μηδέν, το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του A οπότε ο A είναι αντιστρέψιμος. Τότε

$$\begin{aligned} P(\mathbf{A}) = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}) = 2\mathbf{I} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} p(\lambda) = (-1)^3 \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 3 \\ 4 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -((1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 6) + 2(2+4+4\lambda)) = \\ &= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 12\lambda - 6 \end{aligned}$$

Αφού ο σταθερός όρος δεν είναι μηδέν, το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του B οπότε ο B είναι αντιστρέψιμος. Άρα

$$P(\mathbf{B}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{B}^3 - 3\mathbf{B}^2 - 12\mathbf{B} - 6\mathbf{I} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{B}(\mathbf{B}^2 - 3\mathbf{B} - 12\mathbf{I}) = 6\mathbf{I} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{-1} &= \frac{1}{6}(\mathbf{B}^2 - 3\mathbf{B} - 12\mathbf{I}) = \\ &= \frac{1}{6} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} - 12 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left( \begin{bmatrix} 9 & 2 & 8 \\ 12 & 4 & 10 \\ 18 & 2 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 6 & -3 & 9 \\ 12 & 3 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### Παράδειγμα

Για το παράδειγμα που είχαμε δει με  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  να υπολογισθεί ο πίνακας

$$A^{2006} - A^{-2}.$$

$$\text{Είχαμε δει ότι } \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε

$$P(\mathbf{A}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 + \mathbf{I} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 = -\mathbf{I},$$

ΟΠότε

$$\mathbf{A}^{2006} - \mathbf{A}^{-2} = (\mathbf{A}^2)^{1003} - (\mathbf{A}^2)^{-1} = (-\mathbf{I})^{1003} - (-\mathbf{I})^{-1} = -\mathbf{I} + \mathbf{I} = \mathbf{0}.$$

Άλλος τρόπος: Αν  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  έχουμε  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ .

Άρα

$$\mathbf{A}^{2006} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}^{2006} \cdot \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & i \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$\mathbf{A}^{-2} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}^{-2} \cdot \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & i \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Τότε } \mathbf{A}^{2006} - \mathbf{A}^{-2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

### Ασκήσεις:

1. Έστω  $f: \square^3 \rightarrow \square^3$  μια γραμμική απεικόνιση με τύπο

$$f([x \ y \ z]^T) = [x + 2y - 2z \quad 2x + 4y - 4z \quad -2x - 4y + 4z]^T$$

α) Να βρεθεί ο πίνακας  $A$  της  $f$  ως προς τη συνήθη βάση  $(e_1, e_2, e_3)$  του  $\square$  και να βρεθούν τα χαρακτηριστικά του μεγέθου.

β) Δείξτε ότι ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιείται και βρείτε μια διαγωνοποίησή του. Στη συνέχεια βρείτε έναν τύπο για τον πίνακα  $A^n$ .

$$\text{Λύση: } f([1 \ 0 \ 0]^T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = e_1 + 2e_2 - 2e_3, \quad f([0 \ 1 \ 0]^T) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} = 2e_1 + 4e_2 - 4e_3 \quad \text{και}$$

$$f([0 \ 0 \ 1]^T) = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = -2e_1 - 4e_2 + 4e_3. \text{ Άρα ο πίνακας } A \text{ ισούται με } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Θα βρούμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα αυτού.

$$\text{Έχουμε } p(\lambda) = (-1)^3 \det(A - \lambda I) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 4-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 9). \text{ Ιδιοτιμές είναι}$$

λοιπόν το 0 και το 9.

Ιδιοδιανύσματα για το 0:  $(A-0 I) \cdot \tilde{x} = 0$  ή  $A \cdot \tilde{x} = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-2z=0 \\ 2x+4y-4z=0 \\ -2x-4y+4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = -2y + 2z. \text{ Άρα}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y+2z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ιδιοδιανύσματα για το 9:  $(A-9 I) \cdot \tilde{x} = 0$

$$\begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x+2y-2z=0 \\ 2x-5y-4z=0 \\ -2x-4y-5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8x+2y-2z=0 \\ 2x-5y-4z=0 \\ -9y-9z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x=4z \\ 2x=-z \\ y=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2x \\ y=2x \end{cases}$$

Άρα  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -2x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$

B) Θεωρούμε τον πίνακα  $P$  που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα  $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  και  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$

Τότε έπειτα από υπολογισμούς μπορούμε να βρούμε ότι:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2/9 & 5/9 & 4/9 \\ 2/9 & 4/9 & 5/9 \\ 1/9 & 2/9 & -2/9 \end{bmatrix}.$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}^n P^{-1} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9^n \end{bmatrix} P^{-1} = 9^{n-1} P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} P^{-1} = \\ &= 9^{n-1} P D P^{-1} = 9^{n-1} A = 9^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

(α) Να βρείτε έναν πίνακα  $P$  τέτοιον ώστε ο  $P^{-1}AP$  να είναι διαγώνιος.

(β) Να υπολογίσετε τον πίνακα  $A^{2003}$

Λύση: (α) Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$ .

$$p(\lambda) = (-1)^3 \det(A - \lambda I) = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1-\lambda & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1).$$

Οι ιδιοτιμές του είναι διακεκριμένες και συνεπώς ο πίνακας διαγωνιοποιείται.

Ιδιοδιανύσματα:  $\lambda=0$ .

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = \frac{1}{2}z \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4}z \\ y = \frac{1}{2}z \end{cases}$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 0 είναι της μορφής

$$z \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \neq 0.$$

$\lambda=1$ .

$$\begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \\ 2x = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 0 είναι της μορφής

$$z \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \neq 0.$$

$\lambda=-1$ .

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 0 είναι της μορφής

$$z \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \neq 0.$$

Σχηματίζουμε από τα ιδιοδιανύσματα τον πίνακα  $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

Τότε  $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ .

Επαληθεύουμε ότι  $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

(β) Ισχύει  $D^{2003} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{2003} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^{2003} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{2003} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = D$ .

Επομένως

$$A^{2003} = (PDP^{-1})^{2003} = PD^{2003}P^{-1} = PDP^{-1} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} P^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

3. Έστω ο πραγματικός πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ .

(α) Εξετάστε αν ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιείται. Αν ναι, να βρεθεί ένας πίνακας  $P$  τέτοιος ώστε ο  $P^{-1}AP$  να είναι διαγώνιος.

(β) Να βρεθεί τα χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$  και να υπολογίστε τον πίνακα  $A^n$ ,  $n=1,2,\dots$

Λύση:

α) Υπολογίζοντας την ορίζουσα  $\det(A-\lambda I)$  βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ . Οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του, συνεπώς  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$ .

Επειδή ο  $A$  είναι ένας  $2 \times 2$  πίνακας που έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές, ο  $A$  διαγωνοποιείται. Τα ιδιοδιανύσματα είναι οι λύσεις των αντίστοιχων  $2 \times 2$  συστημάτων της μορφής  $(A - \lambda I) \cdot \tilde{x} = 0$  που μετά από γραμμοπράξεις δίνουν, για  $\lambda = -1$  το ιδιοδιάνυσμα  $\{[-a \ a]^T / a \in \mathbb{R} - \{0\}\}$  και για  $\lambda = 1$  το  $\{[-3a \ a]^T / a \in \mathbb{R} - \{0\}\}$ .

Έστω ο πίνακας  $P = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  οι στήλες του  $P$  είναι τα ιδιοδιανύσματα του  $A$ .

Κάνοντας τις πράξεις έχουμε ότι ο πίνακας  $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  είναι πράγματι

διαγώνιος.

β) Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που υπολογίσθηκε στο α) ερώτημα και το Θεώρημα Cayley-Hamilton, έχουμε

$$A^2 - I = 0 \Rightarrow A^2 = I$$

Πολλαπλασιάζοντας με  $A$  την τελευταία σχέση επανειλημμένα με  $A$  έχουμε,

$$A^2 = I, \quad A^3 = A, \quad A^4 = A^2 = I, \quad A^5 = A, \quad A^6 = A^2 = I$$

κλπ. Από εδώ παρατηρούμε (εύκολα αποδεικνύεται με επαγωγή) ότι για  $n = 1, 2, \dots$

ισχύει  $A^n = \begin{cases} A, & \text{όταν } n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \\ I, & \text{όταν } n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$

4. Δίνονται οι πίνακες  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  και  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

1. Δείξτε ότι ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιείται και εκτελέστε την διαγωνοποίησή του.
2. Δείξτε ότι ο πίνακας  $B$  δεν διαγωνοποιείται.
3. Να υπολογιστεί ο  $A^n$  και με βάση το αποτέλεσμα αυτό να υπολογίστε το  $I + A + A^2 + \dots + A^{2004}$ .

Λύση

Σύμφωνα με τη θεωρία έχουμε:

1. Για τον  $A$  το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι

$$p(\lambda) = (-1)^2 \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1) + 3 \cdot 0 = (\lambda+1)(\lambda-1)$$

Οπότε έχουμε ιδιοτιμές 1 και -1. (Σημείωση: Επειδή ο πίνακας είναι τριγωνικός, θα μπορούσαμε να πούμε άμεσα ότι οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία).

Για  $\lambda = 1$  τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$$(A - 1 \cdot I) \cdot \tilde{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ και το } x_2 \text{ παίρνει αυθαίρετες τιμές}$$

οπότε για την ιδιοτιμή 1 έχουμε ιδιοδιάνυσμα  $\mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mu \neq 0$ .

Για  $\lambda = -1$  τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$$(A + 1 \cdot I) \cdot \tilde{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{2}{3}x_2 \text{ και το } x_2 \text{ παίρνει αυθαίρετες τιμές}$$

οπότε για την ιδιοτιμή -1 έχουμε ιδιοδιάνυσμα  $\mu \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \mu \neq 0$ .

Η ορίζουσα του πίνακα  $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  είναι διαφορετική από το μηδέν  $(-2/3)$  οπότε οι

στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα.

Η διαγωνοποίηση του  $A$  επιτυγχάνεται με τους πίνακες

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ όπου } P^{-1}AP = D.$$

2. Για τον  $B$  το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι

$$p(\lambda) = (-1)^2 \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-1) + 3 \cdot 0 = (\lambda-1)^2$$

Οπότε έχουμε ιδιοτιμή διπλή  $1$ .

Για  $\lambda = 1$  τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$$(B - 1 \cdot I) \cdot \tilde{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ και το } x_2 \text{ παίρνει αυθαίρετες τιμές οπότε}$$

για την ιδιοτιμή  $1$  έχουμε ιδιοδιάνυσμα  $\mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  οπότε ο πίνακας δεν διαγωνοποιείται

δεν διαγωνοποιείται γιατί η διάσταση του ιδιοχώρου της διπλής ιδιοτιμής είναι  $1$ .

3. Έχουμε ότι  $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$

$$\text{όπου } D^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{bmatrix} \text{ οπότε για } n \text{ άρτιο } D^n = I \text{ και για } n \text{ περιττό } D^n = D$$

Συνεπώς

$$\text{Για } n \text{ άρτιο } A^n = PIP^{-1} = I$$

$$\text{Για } n \text{ περιττό } A^n = PDP^{-1} = A$$

Οπότε

$$I + A + A^2 + \dots + A^{2004} = 1002A + 1003I$$

$$= 1002 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 1003I = \begin{bmatrix} -1002+1003 & 0 \\ 3 \cdot 1002 & 1002+1003 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3006 & 2005 \end{bmatrix}$$

**Σημείωση** Για τον υπολογισμό του  $A^n$  μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον εξής συλλογισμό. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$  είναι το  $\lambda^2 - 1$ . Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε  $A^2 - I = 0$ , δηλαδή  $A^2 = I$ .

#### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στο σύγγραμμα που διανέμεται και στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος. Το περιεχόμενο του αρχείου απλά αποτελεί περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα για δική του χρήση και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί και να μην αναπαραχθεί και διανεμηθεί για άλλο σκοπό.