Κεφάλαιο 7 Ορθογώνιοι Πίνακες

Εσωτερικό Γινόμενο και ορθογωνιότητα

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος, υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Κάθε συνάρτηση ορισμένη στο $V\times V\to\mathbb{R}$ (την οποία θα συμβολίζουμε με $\cdot$) ορίζει ένα **εσωτερικό γινόμενο** εάν $\forall x,y,z\in V$ και $k,m\in\mathbb{R}$ ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $x\cdot y=y\cdot x$
2. $(kx+my)\cdot z=k(x\cdot z)+m(y\cdot z)$
3. $x\cdot x\geq 0$
4. $x\cdot x=\mathbf{0}\Leftrightarrow x=\mathbf{0}$ όπου $\mathbf{0}$ το μηδενικό διάνυσμα.

Συχνά το εσωτερικό γινόμενο έχει τον ισοδύναμο συμβολισμό $(x,y)\equiv x\cdot y$. Εμείς θα χρησιμοποιούμε και τους δύο συμβολισμούς και θα θεωρούμε ότι είναι ταυτόσιμοι.

Το **Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο** δύο διανυσμάτων $x=[x_1 \quad x_2 \quad x_3]^{\mathrm{T}}$, $y=[y_1 \quad y_2 \quad y_3]^{\mathrm{T}}$ του $\mathbb{R}^3$ ορίζεται ως

$$x\cdot y=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

Είναι σχετικά απλό να αποδείξουμε τις ιδιότητες του ορισμού. Έστω $x=[x_1 \quad x_2 \quad x_3]^{\mathrm{T}}$, $y=[y_1 \quad y_2 \quad y_3]^{\mathrm{T}}$ και $z=[z_1 \quad z_2 \quad z_3]^{\mathrm{T}}$ και $k,m\in\mathbb{R}$.

1. $x\cdot y=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=y\cdot x$
2. Αφού $(kx+my)=[kx_1+my_1 \quad kx_2+my_2 \quad kx_3+my_3]^{\mathrm{T}}$

$$\begin{aligned}(kx+my)\cdot z&=\left(kx_1+my_1\right)z_1+\left(kx_2+my_2\right)z_2+\left(kx_3+my_3\right)z_3=\\&=kx_1z_1+my_1z_1+kx_2z_2+my_2z_2+kx_3z_3+my_3z_3=\\&=kx_1z_1+kx_2z_2+kx_3z_3+my_1z_1+my_2z_2+my_3z_3=\\&=k\left(x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3\right)+m\left(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3\right)=k(x\cdot z)+m(y\cdot z)\end{aligned}$$

3. $x\cdot x=x_1x_1+x_2x_2+x_3x_3=x_1^2+x_2^2+x_3^2\geq 0$
4. $x\cdot x=0\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=0\Leftrightarrow x_1=0,x_2=0,x_3=0\Leftrightarrow x=[0 \quad 0 \quad 0]^T=\mathbf{0}$

Για τον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε $x\cdot y=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$ όπου $x=\left[x_1 \quad x_2 \quad .... \quad x_n\right]^{\mathrm{T}}$, $y=\left[y_1 \quad y_2 \quad .... \quad y_n\right]^{\mathrm{T}}$

Παράδειγμα:

Αποδείξτε για τα διανύσματα $\mathbf{x}=\left[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\right]^{\mathrm{T}}$ και $\mathbf{y}=\left[\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\right]^{\mathrm{T}}$ του $\mathbb{R}^3$ ότι η σχέση

$$\left(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\right)=10\alpha_1\beta_1+3\alpha_1\beta_2+3\alpha_2\beta_1+2\alpha_2\beta_2+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_3\beta_3$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στο χώρο.

Για να αποτελεί η δοθείσα σχέση εσωτερικό γινόμενο αρκεί να επαληθεύει τις ιδιότητες του ορισμού. Πράγματι, για $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ και $\mathbf{x}=\left[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\right]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y}=\left[\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\right]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{z}=\left[\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^3$ είναι

$\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}=\lambda\left[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\right]^{\mathrm{T}}+\mu\left[\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\right]^{\mathrm{T}}=\left[\lambda\alpha_1+\mu\beta_1\ \lambda\alpha_2+\mu\beta_2\ \lambda\alpha_3+\mu\beta_3\right]^{\mathrm{T}}$ οπότε κάνοντας πράξεις έχουμε

$$
\begin{aligned}
\left(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}\right)\cdot\mathbf{z}&=10\hat{\alpha}_1\gamma_1+3\hat{\alpha}_1\gamma_2+3\hat{\alpha}_2\gamma_1+2\hat{\alpha}_2\gamma_2+\hat{\alpha}_2\gamma_3+\hat{\alpha}_3\gamma_2+\hat{\alpha}_3\gamma_3\\
&=10\left(\lambda\alpha_1+\mu\beta_1\right)\gamma_1+3\left(\lambda\alpha_1+\mu\beta_1\right)\gamma_2+3\left(\lambda\alpha_2+\mu\beta_2\right)\gamma_1\\
&\quad+2\left(\lambda\alpha_2+\mu\beta_2\right)\gamma_2+\left(\lambda\alpha_2+\mu\beta_2\right)\gamma_3+\left(\lambda\alpha_3+\mu\beta_3\right)\gamma_2+\left(\lambda\alpha_3+\mu\beta_3\right)\gamma_3\\
&=\lambda\left(10\alpha_1\gamma_1+3\alpha_1\gamma_2+3\alpha_2\gamma_1+2\alpha_2\gamma_2+\alpha_2\gamma_3+\alpha_3\gamma_2+\alpha_3\gamma_3\right)\\
&\quad+\mu\left(10\beta_1\gamma_1+3\beta_1\gamma_2+3\beta_2\gamma_1+2\beta_2\gamma_2+\beta_2\gamma_3+\beta_3\gamma_2+\beta_3\gamma_3\right)\\
&=\lambda\left(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}\right)+\mu\left(\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}\right)
\end{aligned}
$$

η αντιμεταθετική ιδιότητα που ισχύει στην πρόσθεση και στον πολλαπλασιασμό των πραγματικών αριθμών δίνει

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}&=10\beta_1\alpha_1+3\beta_1\alpha_2+3\beta_2\alpha_1+2\beta_2\alpha_2+\beta_2\alpha_3+\beta_3\alpha_2+\beta_3\alpha_3\\
&=10\alpha_1\beta_1+3\alpha_2\beta_1+3\alpha_1\beta_2+2\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_2+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_3\\
&=10\alpha_1\beta_1+3\alpha_1\beta_2+3\alpha_2\beta_1+2\alpha_2\beta_2+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_3\beta_3=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}
\end{aligned}
$$

και τέλος

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}&=10\alpha_1^2+3\alpha_1\alpha_2+3\alpha_2\alpha_1+2\alpha_2^2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_2+\alpha_3^2\\
&=10\alpha_1^2+6\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2+\alpha_2^2+2\alpha_2\alpha_3+\alpha_3^2\\
&=\alpha_1^2+\left(3\alpha_1+\alpha_2\right)^2+\left(\alpha_2+\alpha_3\right)^2\geq 0
\end{aligned}
$$

και μάλιστα $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=0\Leftrightarrow\alpha_1^2+\left(3\alpha_1+\alpha_2\right)^2+\left(\alpha_2+\alpha_3\right)^2=0$, όπου συμπεραίνουμε $\alpha_1=0,\quad 3\alpha_1+\alpha_2=0$ και $\alpha_2+\alpha_3=0\ \Leftrightarrow\ \alpha_1=0,\quad \alpha_2=0,\quad \alpha_3=0$. Άρα $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Με βάση ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο ορίζουμε το **μέτρο** διανύσματος $x=\left[x_1\quad x_2\quad ....\quad x_n\right]^{\mathrm{T}}$

$$\|x\|=\sqrt{x\cdot x}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}$$

Παράδειγμα

Βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των $x=\left[1\quad -2\quad -2\right]^T$ και $y=\left[6\quad 3\quad 2\right]^T$ το μέτρο τους.

$x\cdot y=\left(1\right)\left(6\right)+\left(-2\right)\left(3\right)+\left(-2\right)\left(2\right)=-4$, $\|x\|=\sqrt{9}=3$, $\|x\|=\sqrt{49}=7$

Δύο διανύσματα είναι **κάθετα (ορθογώνια)** μεταξύ τους **εάν και μόνο αν**

$$x \cdot y = 0$$

Μία βάση $\{v_1, ..., v_m\}$ενός διανυσματικού χώρου V ονομάζεται **ορθοκανονική** όταν τα διανύσματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους ανά δύο $v_1 \cdot v_2 = 0$ και καθένα από αυτά έχουν μέτρο 1.

Η συνήθης βάση δηλαδή το σύνολο $\{e_1, ..., e_n\}$, όπου $e_1 = [1, 0, ..., 0]^T$, $e_2 = [0, 1, 0, ..., 0]^T$, $..., e_n = [0, ..., 0, 1]^T$, είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα

Εξετάστε αν τα διανύσματα $\mathrm{v}_1 = 1\ -1\ 1^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{v}_2 = 3\ \ 2\ -1^{\mathrm{T}}$ του χώρου $\mathbb{R}^3$ είναι ορθογώνια.

Δύο διανύσματα είναι ορθογώνια αν το εσωτερικό τους γινόμενο ισούται με μηδέν. Επειδή

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 3 - 2 - 1 = 0$$

τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ είναι ορθογώνια.

Παράδειγμα

Βρείτε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{v}_3$ του χώρου $\mathbb{R}^3$, το οποίο να είναι ορθογώνιο προς τα διανύσματα $\mathbf{v}_1$ και $\mathbf{v}_2$.

Έστω ένα τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{v}_3 = [\mathrm{x} \quad \mathrm{y} \quad \mathrm{z}]^{\mathrm{T}}$ του χώρου $\mathbb{R}^3$. Για να είναι το $\mathbf{v}_3$ ορθογώνιο προς τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ πρέπει :

$$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad \text{και} \quad \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Για το ομογενές σύστημα έχουμε :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 3\gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \to \frac{1}{5}\gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 + \gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

που αντιστοιχεί στο ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{cases} x + \frac{1}{5} z = 0 \\ y - \frac{4}{5} z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5} z \\ y = \frac{4}{5} z \end{cases}$$

Άρα το $\mathbf{v}_3$ που αναζητούμε είναι της μορφής $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5}z & \frac{4}{5}z & z \end{bmatrix}^T$ και ένα τέτοιο είναι το $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T$, για $z = 5$.

Από οποιαδήποτε βάση ενός δ.χ. μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ορθοκανονική βάση με τη διαδικασία **ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt** .

Έστω $\{\eta_1, \eta_2, ..., \eta_\nu\}$ μία βάση ενός διανυσματικού χώρου V στο οποίο ορίζεται ένα εσωτερικό γινόμενο τότε τα διανύσματα $\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}, \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}, ..., \frac{\xi_\nu}{\|\xi_\nu\|}$ όπου

$$\xi_1 = \eta_1$$

$$\xi_2 = \eta_2 - \frac{\eta_2 \cdot \xi_1}{\xi_1 \cdot \xi_1} \xi_1$$

$$\xi_3 = \eta_3 - \frac{\eta_3 \cdot \xi_1}{\xi_1 \cdot \xi_1} \xi_1 - \frac{\eta_3 \cdot \xi_2}{\xi_2 \cdot \xi_2} \xi_2$$

...

$$\xi_\nu = \eta_\nu - \frac{\eta_\nu \cdot \xi_1}{\xi_1 \cdot \xi_1} \xi_1 - \frac{\eta_\nu \cdot \xi_2}{\xi_2 \cdot \xi_2} \xi_1 - ... - \frac{\eta_\nu \cdot \xi_{\nu-1}}{\xi_{\nu-1} \cdot \xi_{\nu-1}} \xi_{\nu-1}$$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του χώρου V.

Η διαδικασία διαίρεσης ενός διανύσματος με το μέτρο του ονομάζεται **κανονικοποίηση** και ως αποτέλεσμα προκύπτει ένα διάνυσμα με μέτρο 1.

Παράδειγμα

Έστω $\eta_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \eta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ μία βάση του $\mathbb{R}^3$

Σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία:

$$\xi_1 = \eta_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } \xi_1 \cdot \xi_1 = 5, \quad \eta_2 \cdot \xi_1 = 2 \text{ οπότε}$$

$$\xi_2 = \eta_2 - \tfrac{\eta_2 \cdot \xi_1}{\xi_1 \cdot \xi_1} \xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \tfrac{2}{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ και } \eta_3 \cdot \xi_1 = 0, \xi_2 \cdot \xi_2 = \tfrac{6}{5} \quad \eta_3 \cdot \xi_2 = 0$$

$$\xi_3 = \eta_3 - \tfrac{\eta_3 \cdot \xi_1}{\xi_1 \cdot \xi_1} \xi_1 - \tfrac{\eta_3 \cdot \xi_2}{\xi_2 \cdot \xi_2} \xi_2 = \eta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Επίσης $\|\xi_1\| = \sqrt{(\xi \cdot \xi_1)} = \sqrt{5}$, $\|\xi_2\| = \sqrt{(\xi_2 \cdot \xi_2)} = \sqrt{\frac{6}{5}}$, $\|\xi_3\| = \sqrt{(\xi_3 \cdot \xi_3)} = \sqrt{6}$

Η ορθοκανονική βάση του χώρου είναι:

$$\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\xi_1=\begin{bmatrix}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\\ \frac{\sqrt{5}}{5}\\ 0\end{bmatrix},\ \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\frac{1}{\sqrt{\frac{6}{5}}}\xi_2=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{30}}{30}\\ -\frac{\sqrt{30}}{15}\\ \frac{\sqrt{30}}{6}\end{bmatrix},\ \frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\xi_3=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{6}\end{bmatrix}$$

Ένας πίνακας nxn Q με πραγματικά στοιχεία καλείται **ορθογώνιος (ορθομοναδιαίος ή οθοκανονικός** ισοδύναμοι ορισμοί για πραγματικούς πίνακες**)** εάν είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του ισούται με τον ανάστροφό του:

$$Q^{-1}=Q^T$$

Ισοδύναμα πρέπει να ισχύει ότι $QQ^T=Q^TQ=I$.

Ένας πίνακας nxn Q με πραγματικά στοιχεία είναι **ορθογώνιος** εάν και μόνο εάν τόσο οι στήλες του όσο και οι γραμμές του είναι ορθοκανονικές βάσεις του $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί ένας ορθογώνιος πίνακας με 1η γραμμή τη $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Έστω $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ x & y\end{bmatrix}$. Για να είναι ορθογώνιος θα πρέπει

$A\cdot A^T=I$ ή $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ x & y\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & x\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Από το γινόμενο πινάκων έχουμε

$\begin{bmatrix}\frac{1}{5}+\frac{4}{5} & \frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{2y}{\sqrt{5}}\\ \frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{2y}{\sqrt{5}} & x^2+y^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Οπότε θα πρέπει

$$\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{2y}{\sqrt{5}}=0\Rightarrow x=-2y \quad (1)$$

Από την $x^2+y^2=1\Rightarrow(-2y)^2+y^2=1\underset{(1)}{\Rightarrow} y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

Οπότε από την (1) έχουμε $x=\mp\frac{2}{\sqrt{5}}$

Έχουμε λοιπόν 2 πίνακες τον $A_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$ και τον $A_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$

Συμμετρικοί πίνακες και ορθογώνια διαγωνοποίηση

Ένας nxn πίνακας A καλείται **ορθογώνια ή ορθομοναδιαία ή ορθοκανονικά διαγωνοποιήσιμος** εάν υπάρχει διαγώνιος nxn πίνακας D ορθογώνια όμοιος με τον A. Δηλαδή υπάρχει **ορθογώνιος** nxn πίνακας Q ώστε

$$D=Q^TAQ.$$

Μία ειδική κατηγορία πινάκων είναι οι **συμμετρικοί** για τους οποίους ισχύει $Q=Q^T$

Για τους συμμετρικούς nxn πίνακες με πραγματικά στοιχεία ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Όλες οι ιδιοτιμές τους είναι πραγματικές.
2. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους ορθογώνια.
3. Έχουν n ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα (δηλαδή ορθογώνια μεταξύ τους και με μέτρο 1).
4. Κάθε συμμετρικός πίνακας είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος και το αντίστροφο, δηλαδή, κάθε ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος πίνακας είναι συμμετρικός. (**Φασματικό Θεώρημα**)

Παράδειγμα

Δίνεται ο πίνακας $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{bmatrix}$. Βρείτε τα ιδιοποσά του πίνακα και έναν ορθο-

γώνιο πίνακα P, αν υπάρχει, τέτοιος ώστε P^TAP να είναι διαγώνιος πίνακας

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\det\left(A-\lambda I\right)=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&1\\2&4-\lambda&2\\1&2&1-\lambda\end{vmatrix}=$

$=-\lambda^2(\lambda-6)$. Ιδιοτιμές οι αριθμοί 0 και 6. Βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Για την ιδιοτιμή 0: Έστω $\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y+z=0\\2x+4y+2z=0\\x+2y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2y+z=0\Leftrightarrow x=-2y-z$. Άρα $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$. Επομένως ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0 παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$.

Για την ιδιοτιμή 6: Έστω $\begin{bmatrix} 1-6 & 2 & 1 \\ 2 & 4-6 & 2 \\ 1 & 2 & 1-6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+2y+z=0 \\ 2x-2y+2z=0 \\ x+2y-5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 12y-24z=0 \\ -6y+12z=0 \\ x+2y-5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2z \\ -12z+12z=0 \\ x+4z-5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2z \\ x=z \end{cases}.$

Άρα $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Επομένως ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί σην ιδιοτιμή

6 παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Στη συνέχεια ορθοκανονικοποιούμε τη βάση $\{ \eta_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\eta_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$\eta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ κατά Gram-Schmidt.

Θέτουμε $\xi_1 = \eta_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Άρα $\xi_1 \cdot \xi_1 = 5$, $\eta_2 \cdot \xi_1 = 2$ και $\eta_3 \cdot \xi_1 = 0$. Θέτουμε

$\xi_2 = \eta_2 - \frac{\eta_2 \cdot \xi_1}{\xi_1 \cdot \xi_1}\xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$. Άρα $\xi_2 \cdot \xi_2 = \frac{6}{5}$ και $\eta_3 \cdot \xi_2 = 0$.

Θέτουμε $\xi_3 = \eta_3 - \frac{\eta_3 \cdot \xi_1}{\xi_1 \cdot \xi_1}\xi_1 - \frac{\eta_3 \cdot \xi_2}{\xi_2 \cdot \xi_2}\xi_2 = \eta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Άρα $\xi_3 \cdot \xi_3 = 6$. Επομένως η

ορθοκανονική βάση αποτελείται από τα διανύσματα $\frac{1}{\sqrt{5}}\xi_1 = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$,

$\frac{1}{\sqrt{\frac{6}{5}}}\xi_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{30}}{30} \\ -\frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{\sqrt{30}}{6} \end{bmatrix}$ και $\frac{1}{\sqrt{6}}\xi_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$. Ο πίνακας $P = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{30}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$ είναι

λοιπόν ορθογώνιος. Άμεσα επαληθεύουμε ότι ο πίνακας $P^T AP =$

$$=\begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ -\frac{\sqrt{30}}{30} & -\frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{\sqrt{30}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{30}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$ είναι διαγώνιος.

Παράδειγμα

Δίνεται ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

α) Χωρίς να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα *A*, μπορείτε να ελέγξετε αν διαγωνοποιείται ο πίνακας *A* ;

β) Να βρεθεί ορθομοναδιαίος πίνακας P τέτοιος ώστε $A=PDP^{-1}$ όπου D είναι διαγώνιος πίνακας που έχει τις ιδιοτιμές του πίνακα *A*.

α) Παρατηρούμε ότι ο πίνακας *A* είναι συμμετρικός και συνεπώς από το φασματικό θεώρημα είναι ορθομοναδιαία όμοιος με πραγματικό διαγώνιο πίνακα ή, με άλλα λόγια, είναι διαγωνοποιήσιμος με πραγματικές ιδιοτιμές.

β) Για να βρούμε ορθομοναδιαίο όμοιο πίνακα P τέτοιο ώστε $A=PDP^{-1}$ θα πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα *A*.

Πρώτα υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα *A* μέσω του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα A.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+5\lambda^2+14\lambda=-\lambda(\lambda+2)(\lambda-7)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα *A* είναι οι {0,-2,7}.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα *A* που αντιστοιχούν στις παραπάνω ιδιοτιμές :

$$(A-0I)x=0\Rightarrow\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}x$$

$$(A+2I)x=0\Rightarrow\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}y$$

$$(A-7I)x=0\Rightarrow\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}z$$

Άρα έχουμε τα ιδιοδιανύσματα

$$\eta_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\eta_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix};\eta_3=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας την μέθοδο ορθογωνιοποίησης που αναφέραμε παραπάνω έχουμε

$$\xi_1 = \eta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\xi_2 = \eta_2 - \frac{\eta_2 \cdot \xi_1}{\xi_1 \cdot \xi_1}\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{0}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\xi_3 = \eta_3 - \frac{\eta_3 \cdot \xi_1}{\xi_1 \cdot \xi_1}\xi_1 - \frac{\eta_3 \cdot \xi_2}{\xi_2 \cdot \xi_2}\xi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{0}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{0}{18}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

όπου $\cdot$ δηλώνει το εσωτερικό γινόμενο. Συνεπώς παρατηρούμε ότι τα ιδιοδιανύσματα ξ_1, ξ_2, ξ_3 είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Η βάση που αποτελείται από τα ορθογώνια ιδιοδιανύματα $\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}, \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}, \frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}$ θα είναι μια ορθοκανονική βάση του πίνακα A :

$$\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{18}} \end{bmatrix}, \frac{\xi_3}{\|\xi_3\|} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας P που ψάχνουμε έχει ως στήλες τα παραπάνω ιδιοδιανύσματα :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Πράγματι παρατηρούμε ότι $A = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}AP = D$:

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = D$$

Σημείωση. Επειδή ο πίνακας *P* είναι ορθοκανονικός ο αντίστροφος του είναι ο ανάστροφός του και συνεπώς δεν χρειάζεται να τον υπολογίσουμε.

Παράδειγμα

Δίνεται ο συμμετρικός πίνακας $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

1. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του *A*.
2. Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P τέτοιος ώστε ο $P^T AP$ να είναι διαγώνιος.

Σύμφωνα με τη θεωρία το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = ((3-\lambda)^2-2\cdot 2)(5-\lambda) =$$

$$(\lambda^2-6\lambda+9-4)(\lambda-5)=(\lambda^2-6\lambda+5)(\lambda-5)=(\lambda-5)^2(\lambda-1)$$

Οπότε έχουμε δύο ιδιοτιμές την $\lambda=1$ και τη διπλή $\lambda=5$.

Για $\lambda=1$τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$$(A-1\cdot I)\cdot x=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-1 & -2 & 0 \\ -2 & 3-1 & 0 \\ 0 & 0 & 5-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1-2x_2=0 \\ -2x_1+2x_2=0 \\ 4x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2 \\ x_3=0 \end{cases}$$

Οπότε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε αυτήν την ιδιοτιμή είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Για $\lambda=5$τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$$(A-5\cdot I)\cdot x=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-5 & -2 & 0 \\ -2 & 3-5 & 0 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1-2x_2=0 \\ -2x_1-2x_2=0 \\ 0x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-x_2 \\ x_3\ \alpha\upsilon\theta\alpha\acute{\iota}\rho\varepsilon\tau o \end{cases}$$

Οπότε τα ιδιοδιανύσμτα που αντιστοιχούν σε αυτήν την ιδιοτιμή ο ιδιοχώρος παράγεται από τα $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής είναι τα $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Ο πίνακας A είναι συμμετρικός, σύμφωνα με το Φασματικό Θεώρημα είναι ορθοκανονικά όμοιος με πραγματικό διαγώνιο πίνακα. Θα εφαρμόσουμε τη διαδικασία ορθογωνοποίησης Gram-Schmidt.

Από το ερώτημα 1 έχουμε ότι $\eta_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\eta_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\eta_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Σύμφωνα με τα όσα έχουμε αναφέρει έχουμε ότι

$\eta_1=\xi_1$

$\eta_2\cdot\xi_1=0\cdot(-1)+1\cdot 0+0\cdot 1=0,\xi_1\cdot\xi_1=(-1)^2+1^2+0=2$ οπότε

$\xi_2=\eta_2-\dfrac{\eta_2\cdot\xi_1}{\xi_1\cdot\xi_1}\xi_1=\eta_2$

$\eta_3\cdot\xi_1=1\cdot(-1)+1\cdot 1+0\cdot 0=0,\xi_2\cdot\xi_2=0^2+0^2+1=1,\eta_3\cdot\xi_2=1\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot 1=0$ οπότε

$\xi_3=\eta_3-\dfrac{\eta_3\cdot\xi_1}{\xi_1\cdot\xi_1}\xi_1-\dfrac{\eta_3\cdot\xi_2}{\xi_2\cdot\xi_2}\xi_2=\eta_3$.

Συμπεραίνουμε ότι $\xi_1=\eta_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\xi_2=\eta_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\xi_3=\eta_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Επίσης $\|\xi_1\|=\sqrt{\xi_1\cdot\xi_1}=\sqrt{2},\|\xi_2\|=\sqrt{\xi_2\cdot\xi_2}=\sqrt{1}=1,\|\xi_3\|=\sqrt{\xi_3\cdot\xi_3}=\sqrt{2}$

Ο πίνακας P έχει ως στήλες τα διανύσματα $\dfrac{\xi_1}{\|\xi_1\|},\dfrac{\xi_2}{\|\xi_2\|},\dfrac{\xi_3}{\|\xi_3\|}$.

Άρα $P=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},P^T=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$ και $D=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ώστε $P^TAP=D.$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στο σύγγραμμα που διανέμεται και στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος. Το περιεχόμενο του αρχείου απλά αποτελεί περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα για δική του χρήση και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί και να μην αναπαραχθεί και διανεμηθεί για άλλο σκοπό.