ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ $\mathbb{C}$

$$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1 \quad i^2=-1 \Leftrightarrow i=\sqrt{-1}$$

$$z=a+bi \in \mathbb{C}$$

Πραγματικό και Φανταστικό μέρος μιγαδικού

$$a=\mathrm{Re}(z), b=\mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$$

Ισότητα μιγαδικών

$$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c \text{ και } b=d$$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0$$

$$z=0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0, \mathrm{Re}(z)=0$$

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ ΔΕΥΕΤΡΟΒΑΘΜΙΑΣ

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad\qquad b^2 - 4ac < 0$$

$$b^2 - 4ac = -\left|b^2 - 4ac\right| = i^2 \left|b^2 - 4ac\right|$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{\left|b^2 - 4ac\right|}}{2a}$$

Βασικές Αριθμητικές Πράξεις

$$z = a + bi \qquad\qquad w = c + di.$$

$$z, w \in \mathbb{C}$$

$$xz = xa + xbi$$

$$z \pm w = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$z^{-1} = \left(a + bi\right)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i \qquad z \cdot z^{-1} = (a + bi)\left(a + bi\right)^{-1} = 1$$

πότε ορίζεται; $a^2 + b^2 \neq 0 \Leftrightarrow a, b \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 0$

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$$

Μέτρο Μιγαδικού Αριθμού

$z = a + bi \qquad w = c + di. \qquad z, w \in \mathbb{C} \qquad x \in \mathbb{R}$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z| = |-z| \qquad |z \cdot w| = |z||w|$$

$$|xz| = |x||z| \qquad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad w \neq 0$$

Τριγωνική Ανισότητα

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Συζυγής Μιγαδικού Αριθμού

$$z = a + bi \qquad \bar{z} = a - bi$$

$$z + \bar{z} = 2a \in \mathbb{R} \qquad z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

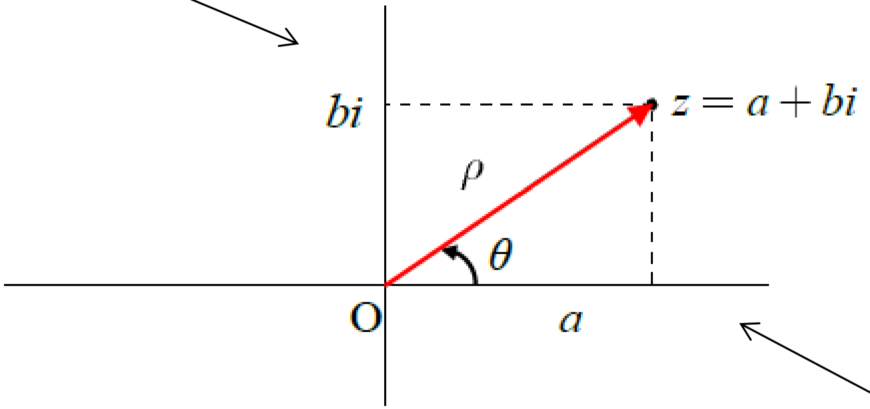
$$\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w} \qquad \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \qquad w \neq 0$$

Τριγωνομετρική Μορφή Μιγαδικού Αριθμού

άξονας φανταστικών αριθμών

ρ μέτρο, θ όρισμα του z



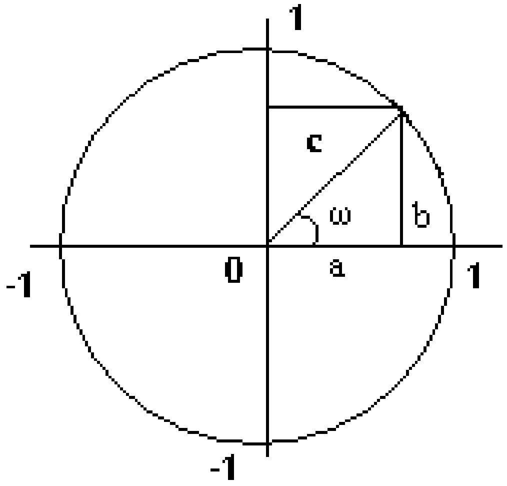
άξονας πραγματικών αριθμών

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \rho\cos\theta, b = \rho\sin\theta, 0 \le \theta < 2\pi$$

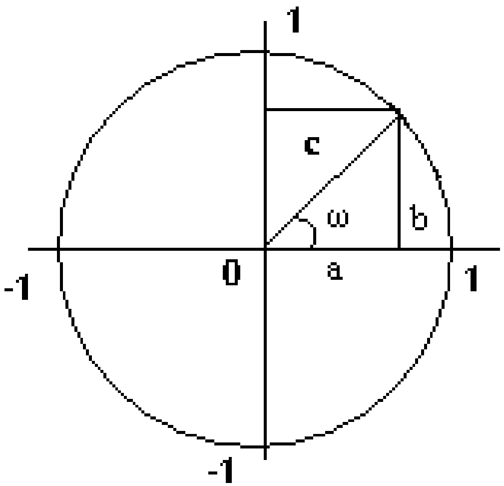
$$\tan\theta = b/a \Rightarrow \theta = \arctan(b/a), \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

$$z = a + bi = \left|OM\right|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = \rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

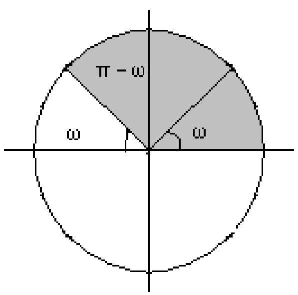


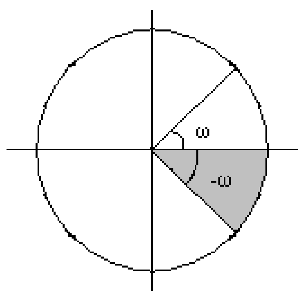
Ημίτονο	$\sin(\omega)$	$\eta\mu(\omega)$	$\frac{b}{c}$
Συνημίτονο	$\cos(\omega)$	$\sigma\upsilon\nu(\omega)$	$\frac{a}{c}$
Εφαπτομένη	$\tan(\omega)$	$\varepsilon\phi(\omega)$	$\frac{b}{a}$
Συνεφαπτομένη	$\cot(\omega)$	$\sigma\phi(\omega)$	$\frac{a}{b}$

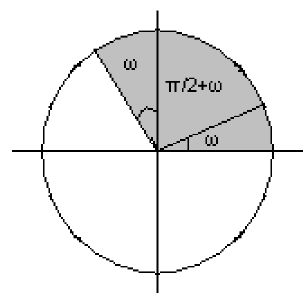
1 ακτίνιο = 180^o / π	2π ακτίνια = 360^o	1^o =π/180 ακτίνια

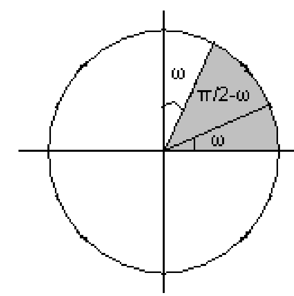


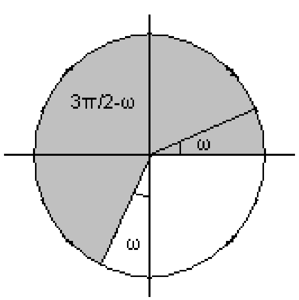
Γωνία ω ακτίνια	**Γωνία ω μοίρες**	$\sin(\omega)$	$\cos(\omega)$
0	0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	90	1	0

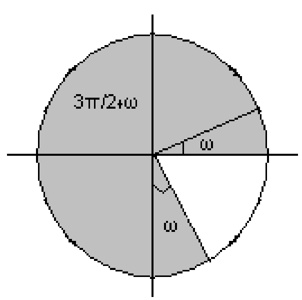


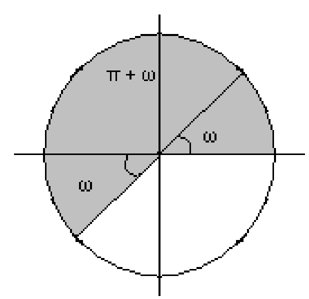












Τύπος του **Euler**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$z = a + bi = \left|OM\right|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = \left|OM\right|e^{i\theta} = \rho e^{i\theta}$$

$$z_1 = \rho_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right) \qquad z_2 = \rho_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$$

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\left(\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right)$$

Θεώρημα του De Moivre

$$z^n = \rho^n \left(\cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)\right)$$

Λύση εξίσωσης

$$z^n = a$$

$a \in \mathbb{C}, a \neq 0$ ρ μέτρο, θ όρισμα του α

$$a = \rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,\ldots,n-1,$$

Μία εφαρμογή χρήσιμη για Ηλεκτρονικούς

Ένα μέγεθος $y(x)$ μεταβάλλεται αρμονικά προς x όταν

$$y(x) = A\cos(\omega x + \theta) \text{ (ή αντίστοιχα } y(x) = A\sin(\omega x + \theta)\text{)}$$

όπου A το πλάτος, ω η κυκλική συχνότητα και θ η φάση.

Τότε μπορούμε να ορίσουμε την αντίστοιχη μιγαδική εξίσωση

$$\tilde{y}(x) = Ae^{i(\omega x + \theta)}$$

Το αποτέλεσμα μίας γραμμικής πράξης (π.χ. πρόσθεση, αφαίρεση, παραγώγιση) δύο μεγεθών που μεταβάλλονται αρμονικά με την ίδια κυκλική συχνότητα είναι μέγεθος που μεταβάλλεται αρμονικά και ισούται με το πραγματικό (ή το μιγαδικό μέρος εάν πρόκειται για ημιτονοειδή μεγέθη) του αποτελέσματος της γραμμικής πράξης όταν εφαρμόζεται στα αντίστοιχα μιγαδικά μεγέθη.