ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ-ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ

ΦΥΣΙΚΗ
(ΜΗΧΑΝΙΚΗ-ΚΥΜΑΤΙΚΗ)

ΤΜΗΜΑ Α.2

ΚΑΘΗΓ. ΖΑΧΑΡΙΑΔΟΥ ΚΑΤΕΡΙΝΑ

ΓΡΑΦΕΙΟ ΖΒ114 (ΡΑΓΚΟΥΣΗ-ΖΑΧΑΡΙΑΔΟΥ)

E-mail: zacharia@uniwa.gr

Βιβλιογραφία

SERWAY, PHYSICS FOR SCIENTISTS AND ENGINEERS

YOUNG H.D., UNIVERSITY PHYSICS,
BERKELEY PHYSICS COURSE

Μελέτη κίνησης με ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΣΗ σώματος

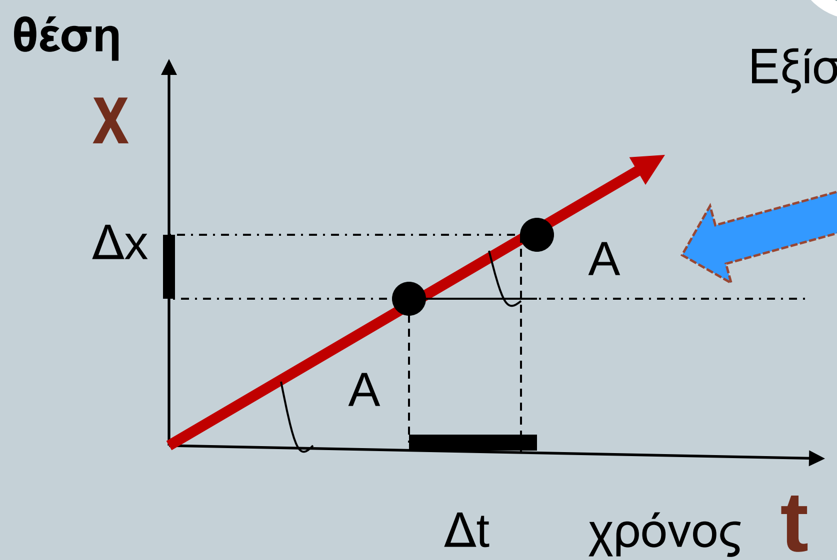
Η γραφική παράσταση **θέσης-χρόνου** εξαρτάται από τον παρατηρητή

Διότι

- αλλάζει η διεύθυνση του άξονα x-θέσης και y θέσης
- καθώς και η αρχή μέτρησης του χρόνου

Ορίζουμε πάντα ένα σύστημα αναφοράς

Ευθύγραμμη **ΟΜΑΛΗ** κίνηση



Εξίσωση ευθείας:

$$x(t) = A \cdot t$$

α=κλίση της ευθείας

$$\kappa\lambda\acute{\iota}\sigma\eta = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\eta$$

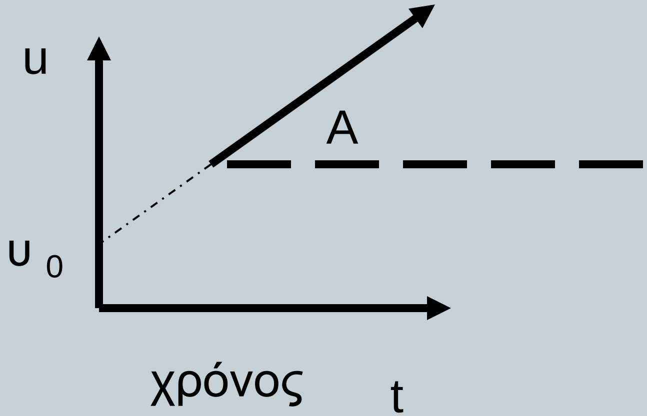
$$\tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

η ταχύτητα είναι η κλίση της ευθείας
Και είναι σταθερή

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΟΜΑΛΗ ΚΙΝΗΣΗ

$$x(t) = \upsilon \cdot t$$

Ευθύγραμμη **ομαλά επιταχυνόμενη** κίνηση



$$Y = A \cdot x + B$$

$$u = \alpha \cdot t + u_0$$

επιτάχυνση

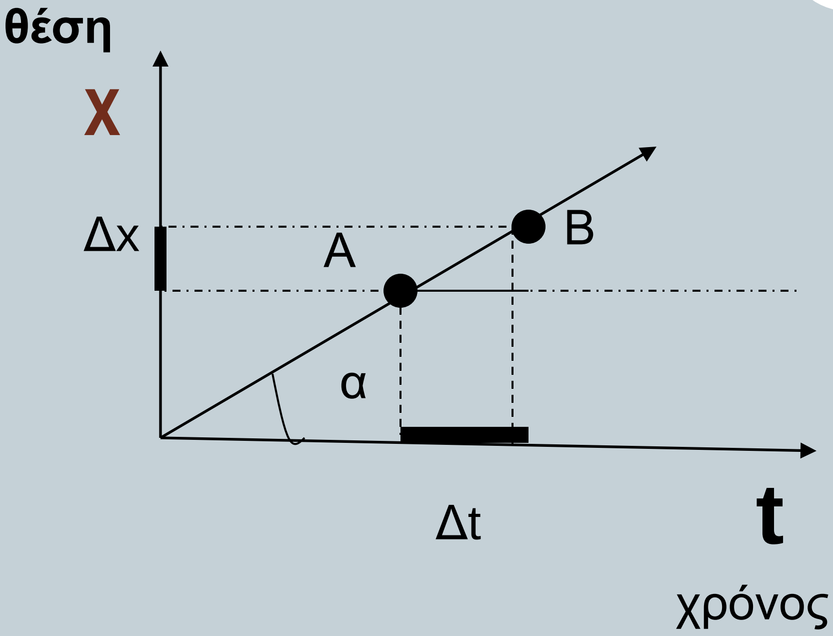
$$\alpha = \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

Εξίσωση ταχύτητας σώματος στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

SOS

ΑΝ και μόνο ΑΝ η επιτάχυνση είναι σταθερή

Μέση ταχύτητα



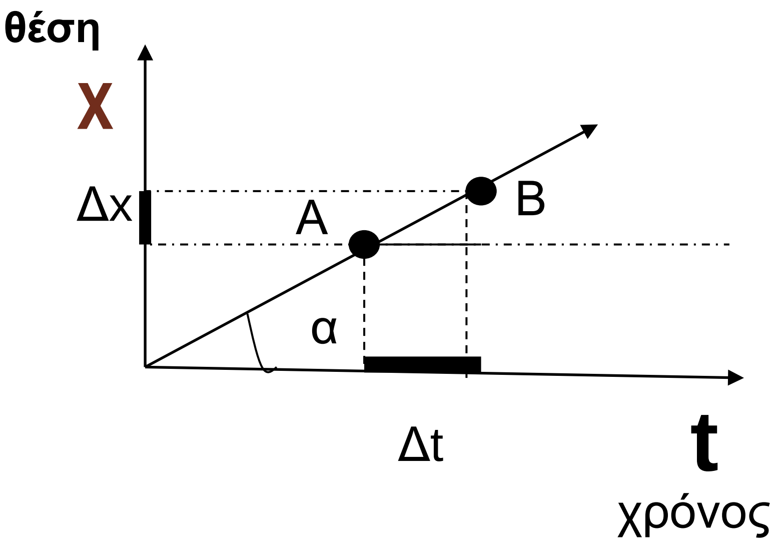
$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Μέση ταχύτητα : μέσος ρυθμός μεταβολής της θέσης

Στιγμιαία ταχύτητα : στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της θέσης

στα προσεχώς...

Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση-Μέση ταχύτητα



$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathrm{x}}{\Delta \mathrm{t}}$$

$$\Delta \mathrm{x} = u \cdot \Delta \mathrm{t} \Rightarrow$$

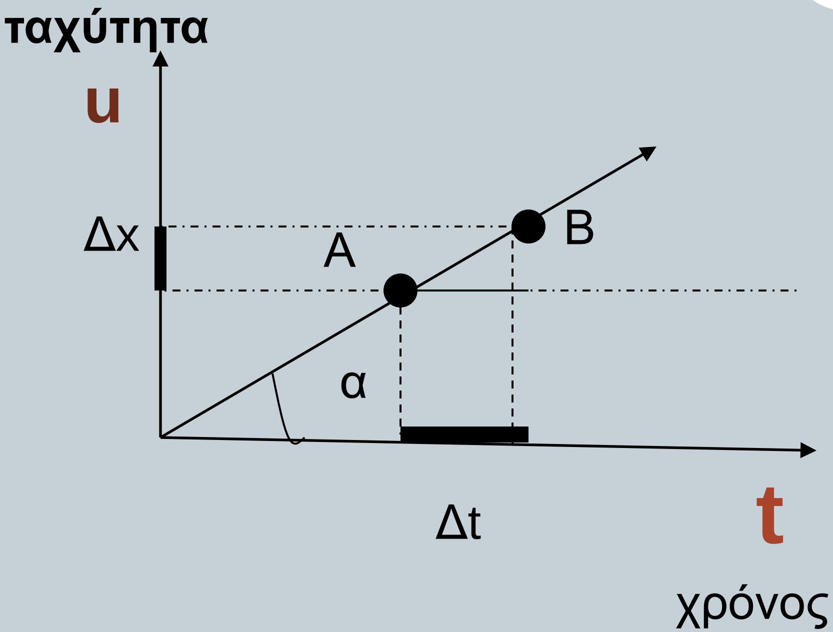
$$x = x_0 + u(t - t_0)$$

$$t_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta \mathrm{x} = u \cdot \Delta \mathrm{t} \Rightarrow$$

$$x = x_0 + ut$$

Ευθύγραμμα ομαλή επιταχυνόμενη κίνηση
Μέση επιτάχυνση



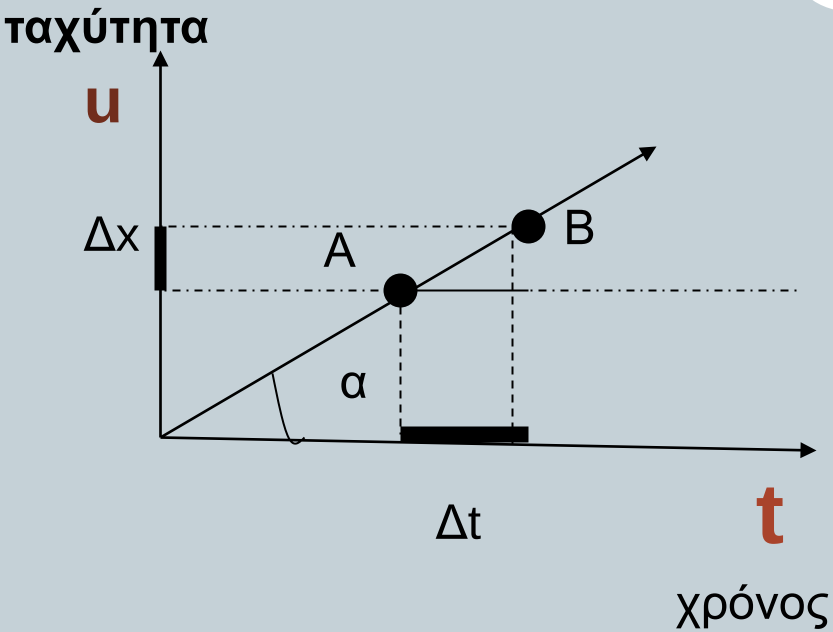
$$a = \frac{u_2 - u_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

Μέση επιτάχυνση : μέσος ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας

Στιγμιαία επιτάχυνση: στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας

στα προσεχώς...

Ευθύγραμμα ομαλή επιταχυνόμενη κίνηση
Μέση επιτάχυνση



$$a = \frac{u_2 - u_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathrm{u}}{\Delta \mathrm{t}}$$

Μέση επιτάχυνση :

μέσος ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας

$$\Delta \mathrm{u} = a \cdot \Delta \mathrm{t} \Rightarrow$$

$$u = u_0 + a(t - t_0)$$

$$t_0 = 0 \Rightarrow$$

$$u = u_0 + a \cdot t$$

Ευθύγραμμα ομαλή επιταχυνόμενη κίνηση
Μέση επιτάχυνση

$$\Delta x = u \cdot \Delta t$$

Μέση ταχύτητα:

$$\bar{u} = \frac{u_0 + u}{2}$$

$$t_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta x = \frac{u_0 + u}{2} \cdot t$$

$$x = x_0 + \frac{u_0 + u}{2} \cdot t$$

$$u = u_0 + a \cdot t$$

$$x = x_0 + u_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

Ευθύγραμμα ομαλή επιταχυνόμενη κίνηση
Μέση επιτάχυνση

Ταχύτητα συναρτήσει της θέσης στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

$$\Delta x = \frac{u_0 + u}{2} \cdot t$$

$$u = u_0 + a \cdot t$$

$$\Delta x = \frac{u_0 + u}{2} \cdot \left(\frac{u - u_0}{a} \right) = \frac{u^2 - u_0^2}{2a}$$

$$u^2 = u_0^2 + 2a\left(x - x_0\right)$$

Τρένο ξεκινά από ηρεμία και κινείται με σταθερή επιτάχυνση. Σε κάποια στιγμή ταξίδευε με ταχύτητα 30m/s και 160m πιο πέρα με ταχύτητα 50m/s. Υπολογίστε:

Την επιτάχυνση

$$u_{x_2}^2 = u_{x_1}^2 + 2a_x x \Rightarrow a_x = \frac{u^2_{x_2} - u^2_{x_1}}{2x} = \frac{50^2 - 30^2}{2 \cdot 160} = 5m/s^2$$

Τον χρόνο που χρειάζεται το τρένο για να διανύσει τα 160m

$$u_{x_2} = u_{x_1} + a_x t \Rightarrow t = \frac{u_{x_2} - u_{x_1}}{a_x} = 4s$$

Τον χρόνο που χρειάζεται το τρένο για να αναπτύξει την ταχύτητα 30m/s

$$u_{x_1} = a_x t \Rightarrow t = \frac{u_{x_1}}{a_x} = \frac{30m/s}{5m/s^2} = 6s$$

Την απόσταση που διένησε το τρένο από τη στάση μέχρι το σημείο που ανέπτυξε την ταχύτητα 30m/s

$$x = \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{1}{2} 5m/s^2 \cdot 6^2 s^2 = 90m$$

Παράδειγμα μέσης επιτάχυνσης

Σωματίδιο έχει ταχύτητα 18m/s. Μετά από 2.4s η ταχύτητά του είναι 30m/s στην αντίθετη κατεύθυνση. Ποιά η μέση επίτάχυνση του σωματιδίου κατά τη διάρκεια του διαστήματος 2.4s

$$a_x = \frac{u_{x2} - u_{x1}}{t} = \frac{-30m/s - 18m/s}{2.4s} = -20m/s^2$$

Παράδειγμα

Βέλος επιταχύνθηκε σε απόσταση 60cm.Αν η ταχύτητά του τη στιγμή που άφησε το τόξο ήταν 60m/s ποιά είναι η μέση επιτάχυνση που του προσέδωσε το τόξο

$$u_x = a_x \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{u_x}{a_x}$$

$$x = \frac{1}{2} a_x \cdot t^2$$

$$a_x = \frac{u_x^2}{2x}$$

$$a_x = \frac{u_x^2}{2x} = 3000 m / s^2$$

Δύο τρένα που ταξιδεύουν με ταχύτητα 95Km/h και 130Km/h κατευθύνονται το ένα προς το άλλο πάνω σε επίπεδες και ευθύγραμμες τροχιές. Όταν απέχουν 3.2Km φρενάρουν με ρυθμό 1m/s² . Βρείτε αν θα γίνει σύγκρουση.

$$u^2 = u_0^2 + 2a\left(x - x_0\right)$$

$$x_{1\max} = \frac{u_{x1}^2}{2a_x}$$

?

Αν $$x_{1\max} + x_{2\max} \le x = 3200m$$ τότε **ΔΕΝ** θα συγκρουστούν

$$x_{1\max} = \frac{u_{x1}^2}{2a_x}$$

$$x_{2\max} = \frac{u_{x2}^2}{2a_x}$$

$$u_{x1} = 26.4m/s$$

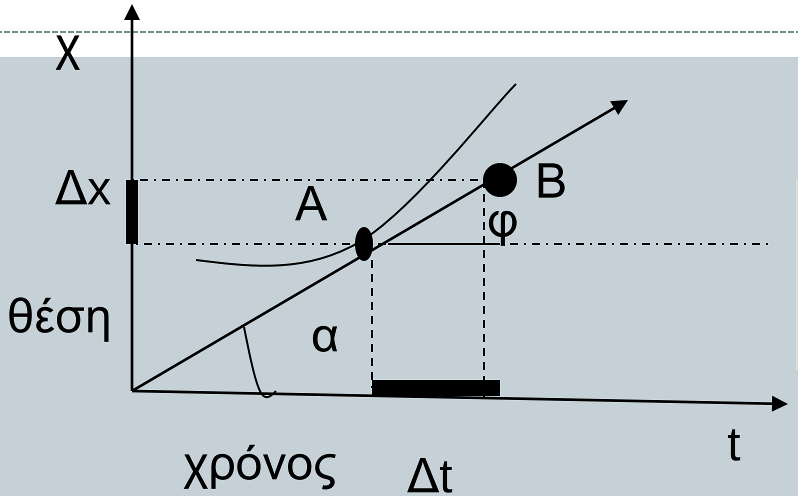
$$u_{x2} = 36.1m/s$$

$$x_{1\max} = \frac{u_{x1}^2}{2\cdot a_x} = \frac{\left(26.4m/s\right)^2}{2\cdot 1m/s^2} = 697m$$

$$x_{2\max} = 1303m$$

ΔΕΝ θα συγκρουστούν

Ευθύγραμμη κίνηση σε μια διάσταση



Μέση ταχύτητα

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathrm{x}}{\Delta \mathrm{t}} = \kappa\lambda\acute{\iota}\sigma\eta\, \tau\eta\varsigma\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\varsigma\ \phi$$

παράγωγος

$$u = \frac{\lim \Delta \mathrm{x}}{\Delta \mathrm{t} \to 0} \frac{\Delta \mathrm{x}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{dx}{\mathrm{dt}}$$

Κλίση της εφαπτομένης

Στιγμιαία ταχύτητα

Στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της θέσης με το χρόνο

$$dx = u \cdot \mathrm{dt}$$

2ος τρόπος υπολογισμού της στιγμιαίας ταχύτητας

$$u = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = u \cdot dt \Rightarrow x = \int u \cdot dt + c = u \cdot t + c$$

Όπου η σταθερά c βρίσκεται από τις αρχικές συνθήκες

Για t=0 x=x $_0$

$$x(\mathrm{t}) = u \cdot t + x_0$$

Σώμα κινείται κατά τον άξονα χ σύμφωνα με την εξίσωση:

$$x = 50t + 10t^2$$

Υπολογίστε

- τη μέση ταχυτητα κατά τη διάρκεια των 3 πρώτων δευτερολέπτων
- Τη στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή t=3s
- και την στιγμιαία επιτάχυνση για t=3s

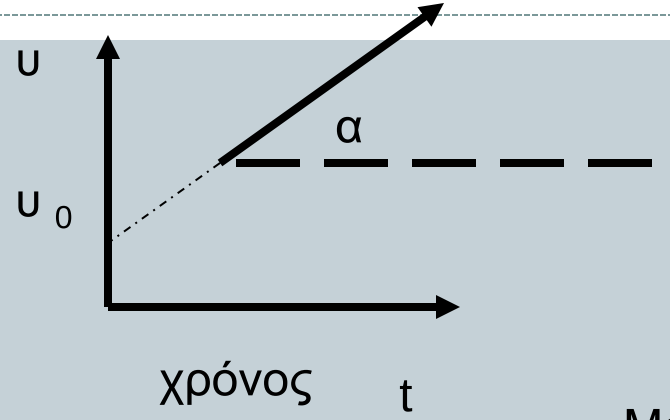
Μέση ταχύτητα:

$$u = \frac{\Delta \mathrm{x}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\mathrm{x_f} - \mathrm{x_a}}{\mathrm{t_f} - \mathrm{t_a}} = \frac{240 - 0}{3 - 0} = 80 m/s$$

$$u = \frac{d\mathrm{x}}{\mathrm{dt}} = 50 + 20t \Rightarrow u(3) = 50 + 20 \cdot 3 = 110 m/s$$

$$a = \frac{d\mathrm{u}}{\mathrm{dt}} = 20 m/s$$

Εύθυραμμη μονοδιάσταση ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση



$$Y = a \cdot x + \beta$$

$$u = a \cdot t + u_0$$

ΑΝ και μόνο ΑΝ η επιτάχυνση είναι σταθερή

Μέση επιτάχυνση = $$a = \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

Στιγμιαία επιτάχυνση = $$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt}$$

$$a(t) = \frac{du}{dt} = \frac{d^2 x}{dt}$$

$$a = \frac{du}{dt} \Rightarrow du = a \cdot dt \Rightarrow$$

$$u = \int a \cdot dt + c = a \cdot t + u_0$$

Ευθύγραμμη μονοδιάστατη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

$$u(t) = a \cdot t + u_0$$

$$u = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = \int u \cdot dt \Rightarrow x = \int (u_0 + at) \cdot dt \Rightarrow$$

$$x(t) = u_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + C$$

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2} a t^2$$

Με τις εξισώσεις κίνησης προβλέπουμε τη θέση και την ταχύτητα ΄για κάθε χρονική στιγμή της κίνησης

Παράδειγμα 2ο

Μια βαρειά πέτρα εκσφεντονίζεται προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα 48 m/s^2 και φτάνει σε ύψος $s(t)=48t-4.8t^2$ μέσα σε χρόνο t sec

Πόσο ψηλά φτάνει η πέτρα ?

Μέγιστο ύψος αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα

$$u(t)=\frac{dy}{dt}=\frac{d(48t-4.8t^2)}{dt}=48\,{}^{m}\!/\!{}_{s}-2\cdot 4.8t=48-9.6\cdot t \quad =0$$

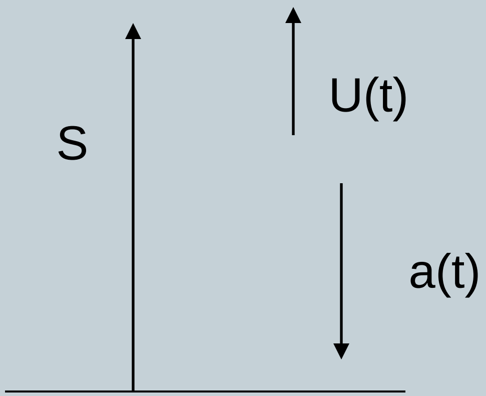
Συνεπώς η πέτρα φτάνει στο μέγιστο ύψος τη χρονική στιγμή:

$$t=\frac{48}{9.6}=5\ s$$

$$y_{\max}=y(5)=48\cdot 5-4.8\cdot 5^2$$

Μια σφαίρα εκτοξεύεται προς τα πάνω από μια εξέδρα που βρίσκεται 30.48 μέτρα από το έδαφος με αρχική ταχύτητα 48.75 m/s και επιβράδυνση λόγω βαρύτητας ιση με 9.75 m/s^2

Θεωρείστε ότι η σφαίρα εκτοξεύεται τη χρονική στιγμή ίση με μηδέν για να βρείτε τη θέση της σφαίρας κάθε χρονική στιγμή



$$u(t) = \frac{dy}{dt}$$

$$a(t) = \frac{du}{dt} = \frac{d^2 y}{dt} = -9.75 \, {}^{m}\!/_{s^2}$$

$$du = -9.75 \, {}^{m}\!/_{s^2} \, dt \Rightarrow u = -9.75 \cdot t \, {}^{m}\!/_{s^2} + c$$

Για t=0 $u=c=u_0$=48.75m/s

$$u = -9.75 \, {}^{m}\!/_{s^2} \, t + 48.75 \, {}^{m}\!/_{s^2}$$

$$u = \frac{dy}{dt} \Rightarrow dy = udt \Rightarrow y = -9.75 \int tdt + 48.75 \int dt + c$$

$$\Rightarrow y = -9.75 \frac{t^2}{2} \frac{m}{s^2} + 48.75 \frac{m}{s} t + 30.48m$$

Χρήση ολοκληρωμάτων στην κινηματική

Η ταχύτητα ενός κινητού δίδεται από τον τύπο:

$$u(t) = \frac{ds}{dt} = k \cdot t^2$$

κ είναι μια σταθερά

Βρείτε τη θέση του σώματος κάθε χρονική στιγμή

Θεωρώντας ότι τη χρονική στιγμή μηδέν το σώμα βρίσκεται στη θέση So

$$u(t) = \frac{ds}{dt} = k \cdot t^2 \Rightarrow ds = k \cdot t^2 \cdot dt$$

$$\Rightarrow \int ds = \int k \cdot t^2 \cdot dt \Rightarrow s = k\frac{t^3}{3} + c$$

Η σταθερή c της ολοκλήρωσης υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες

Για t=0 S=c=So

$$S = k \cdot \frac{t^3}{3} + c = k \cdot \frac{t^3}{3} + So$$

Χρήση ολοκληρωμάτων στην κινηματική

Η ταχύτητα ενός κινητού δίδεται από τον τύπο:

$$u(t) = \frac{ds}{dt} = k \cdot t^2$$

κ είναι μια σταθερά

Βρείτε τη θέση του σώματος κάθε χρονική στιγμή

Θεωρώντας ότι τη χρονική στιγμή μηδέν το σώμα βρίσκεται στη θέση So

$$u(t) = \frac{ds}{dt} = k \cdot t^2 \Rightarrow ds = k \cdot t^2 \cdot dt$$

$$\Rightarrow \int ds = \int k \cdot t^2 \cdot dt \Rightarrow s = k\frac{t^3}{3} + c$$

Η σταθερή c της ολοκλήρωσης υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες

Για t=0 S=c=So

$$S = k \cdot \frac{t^3}{3} + c = k \cdot \frac{t^3}{3} + So$$

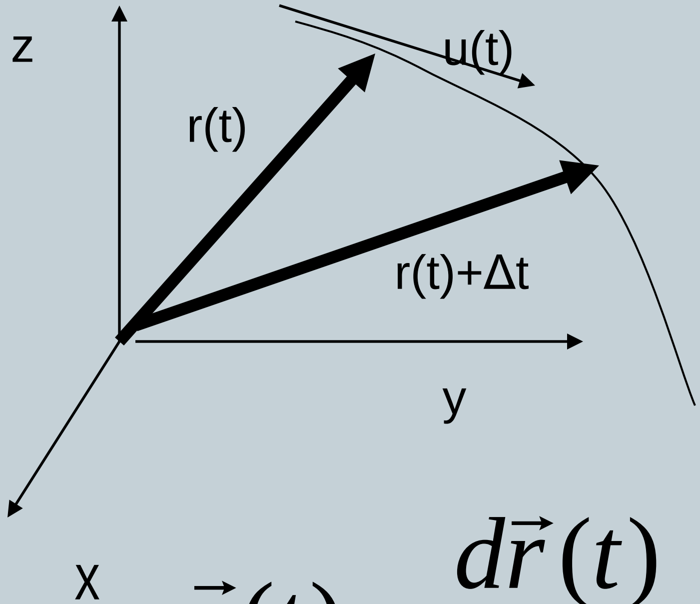
Κίνηση στον χώρο

$$u = \frac{dx}{dt} \Rightarrow u_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \vec{u}_x = \frac{dx}{dt} \cdot \hat{i}$$

$$u = \frac{dy}{dt} \Rightarrow u_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \vec{u}_y = \frac{dy}{dt} \cdot \hat{j}$$

$$u = \frac{dz}{dt} \Rightarrow u_z = \frac{dz}{dt} \Rightarrow \vec{u}_z = \frac{dz}{dt} \cdot \hat{k}$$

Κίνηση στο χώρο



$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

$$\vec{u}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dz(t)}{dt}\hat{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}(t) = u_x(t)\hat{i} + u_y(t)\hat{j} + u_z(t)\hat{k}$$

Η ταχύτητα είναι σε **κάθε** χρονική στιγμή εφαπτόμενη της τροχιάς

$$\vec{u}(t) = u_x(t)\hat{i} + u_y(t)\hat{j} + u_z(t)\hat{k}$$

Κατ' αντιστοιχία, η επιτάχυνση στο χώρο είναι:

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j} + a_z(t)\hat{k} \Rightarrow$$

$$\vec{a}(t) = \frac{du_x}{dt}\hat{i} + \frac{du_y}{dt}\hat{j} + \frac{du_z}{dt}\hat{k}$$

Αν για παράδειγμα ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση στη διεύθυνση του άξονα χ, και ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενη στον άξονα y και κινείται σε επίπεδο , θα είναι:

$$\mathrm{u}_x(t)\hat{i} = c$$

$$\mathrm{u}_y(t)\hat{j} = \frac{dy}{dt}\hat{j} = \mathrm{u}_{0y} + a_y t$$

$$x = x_0 + \mathrm{u}_x t$$

$$y = y_0 + u_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} a_y \cdot t^2$$

Παράδειγμα

Η θέση ενός κινητού σε σύστημα αξόνων OXYZ έχει συντεταγμένες :

$$x(t) = (6t^2 - 4t)m$$

$$y(t) = (-3t^3)m$$

$$z(t) = 3m$$

Ποιά είναι η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος σε t=2s

Οι εξισώσεις κίνησης ενός σώματος είναι:

$$x(t) = 5t^2 + 10$$

$$y(t) = 10t^2 + 3$$

Αποδείξτε ότι εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

Για να διαπιστώσω αν είναι ευθύγραμμη η κίνηση βρίσκω την τροχιά απαλείφοντας το χρόνο

$$t^2 = \frac{x-10}{5}$$

$$y(t) = 10(\frac{x-10}{5}) + 3 = 2x - 20$$

Ευθύγραμμη κίνηση

$$u_x(t) = 10t \Rightarrow a_x(t) = 10$$

$$u_y(t) = 20t \Rightarrow a_y(t) = 20$$

Σταθερή επιτάχυνση με μέτρο :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{10^2 + 20^2}$$

Παράδειγμα

Σωματίδιο κινείται στο χώρο. Η διανυσματική συνάρτηση της θέσης του είναι:

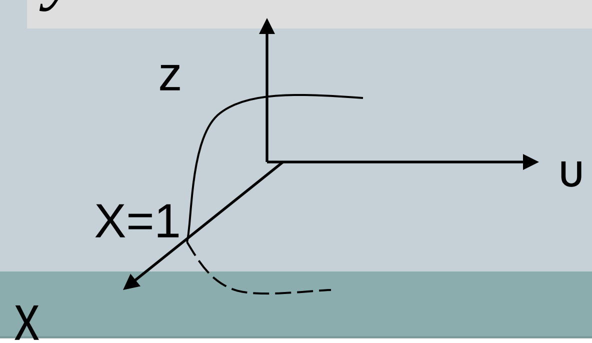
$$\vec{r}(t) = \hat{i} + 4t^2\hat{j} + t\hat{k}$$

Βρείτε τη ταχύτητα , την επιτάχυνση

και την τροχιά του σωματιδίου

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d(8t\hat{j} + \hat{k})}{dt} = 8\hat{j}$$

Τροχιά: $z = t$ ⇒ $y = 4t^2 = 4z^2 \quad kai \quad x = 1$



Η τροχιά είναι παραβολή στο επίπεδο YOZ και διέρχεται από το x=1

Παράδειγμα

Ένα αντικείμενο κινείται στο επίπεδο χy ακολουθώντας την καμπύλη $y = \frac{x^3}{3}$

Η συνιστώσα της ταχύτητας είναι σταθερή: $u_x = 2$

Βρείτε τις διανυσματικές συναρτήσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης και τα μέτρα τους στη θέση χ=3

$$\vec{u}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = u_x(t)\hat{i} + u_y(y)\hat{j}$$

$$u_x = 2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2$$

$$u_{y=} \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot 2$$

$$y = \frac{x^3}{3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{3} = x^2$$

$$u_y = 2 \cdot x^2$$

$$u(t) = 2\hat{i} + 2x^2\hat{j}$$

$$a(t) = \frac{d(2\hat{i} + 2x^2\hat{j})}{dt} = 0 + \frac{d(2x^2)}{dt}$$

$$\frac{du_y}{dt} = \frac{d(u_y)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d(2x^2)}{dx} \cdot 2 = 8x$$

Ένα αεροπλάνο για να απογειωθεί πρέπει να αναπτύξει ταχύτητα u=360Km/h. Υποθέστε ότι η επιτάχυνσή του είναι σταθερή και ότι ο διάδρομος απογείωσης έχει μήκος 1.8Km. Ποιά είναι η ελάχιστη επιτάχυνση που πρέπει να αναπτύξει προκειμένου να απογειωθεί ?

Επιτάχυνση σταθερή

$$u(t) = a \cdot t$$

$$x = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Αν γνωρίζω τη χρονική στιγμή της απογείωσης τότε μπορώ να βρω την επιτάχυνση

Επειδή δεν γνωρίζω τη χρονική στιγμή απογείωσης απαλείφω τον χρόνο:

$$t = \frac{u}{a}$$

$$x = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} a \frac{u^2}{a^2} = \frac{u^2}{2a}$$

Για x=L , όπου L είναι το μήκος του διαδρόμου απογείωσης η παραπάνω σχέση δίδει

$$L = \frac{u^2}{2a} \Rightarrow a = \frac{u^2}{2L}$$

$$a = 5.56 \, {}^{m}\!/_{s^2}$$