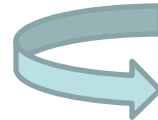


# Οι νόμοι του Νεύτωνα

## 1<sup>ος</sup> Νόμος



Αν η ολική εξωτερική δύναμη ( $F_{ολ}$ ) που ασκείται πάνω σε ένα σώμα είναι μηδέν τότε το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα

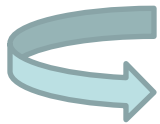


- Ομαλή ευθύγραμμη κίνηση  
 $u = \text{σταθερή}$
- Ακινησία  $u = 0$

## 2<sup>ος</sup> Νόμος



Αν σε ένα σώμα ασκείται συνολική εξωτερική δύναμη  $F_x$  τότε το σώμα αποκτά επιτάχυνση κατά την ίδια διεύθυνση:  $F_x = ma_x$



**Ορισμός μάζας (αδρανείας):**

Το φυσικό μέγεθος που εκφράζει την αντίσταση του σώματος στην αλλαγή της φυσικής του κατάστασης

Τρόπος μέτρησης μάζας:

$$F_0 = m_0 \cdot a_0$$

$$F_1 = m_1 \cdot a_1$$



$$m_1 = \frac{a_0}{a_1} \cdot m_0$$

## 3<sup>ος</sup> Νόμος

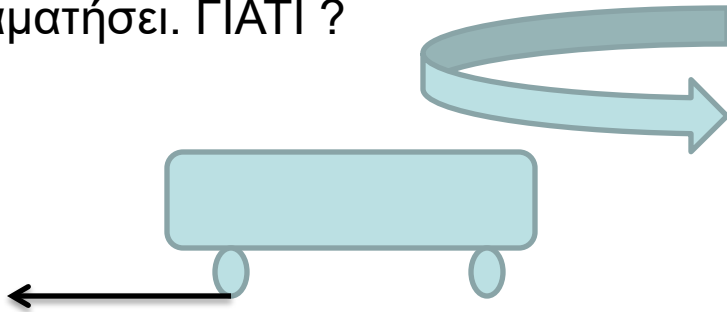


Αν το σώμα A ασκεί δύναμη στο σώμα B τότε το σώμα B ασκεί δύναμη στο σώμα A ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς

# Ο 1<sup>ος</sup> νόμος του Νεύτωνα

Ένα σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα (κατά μέτρο και διεύθυνση) εκτός και αν μια μη μηδενική ολική δύναμη ασκηθεί επάνω του

Καθημερινή εμπειρία: Ένα αυτοκίνητο που κινείται με σταθερή ταχύτητα και επάνω του δεν ασκείται δύναμη δεν θα συνεχίσει να κινείται αλλά αντίθετα θα σταματήσει. ΓΙΑΤΙ ?



Απάντηση: στην πραγματικότητα ασκείται επάνω του μια δύναμη (η τριβή) αντίθετης φοράς από την κίνησή του η οποία προκαλεί την επιβράδυνσή του.

Αν ένα σώμα  
παρεκκλίνει από ευθεία  
κίνηση



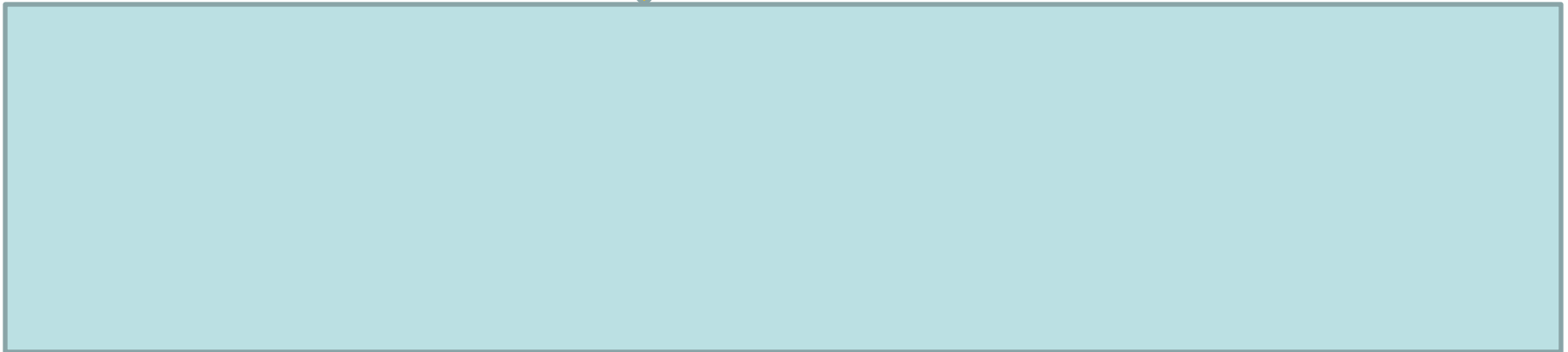
η ταχύτητά του  
δεν είναι  
σταθερή



Ασκείται  
επάνω του  
μία δύναμη  $F$

# Ο 1<sup>ος</sup> νόμος του Νεύτωνα

Μπορεί ένα σώμα να επιταχύνεται ενώ το μέτρο της ταχύτητάς του παραμένει σταθερό ?



# Ο 1<sup>ος</sup> νόμος του Νεύτωνα

Μπορεί ένα σώμα να επιταχύνεται ενώ το μέτρο της ταχύτητάς του παραμένει σταθερό ?



ΝΑΙ αν αλλάζει η διεύθυνση της ταχύτητάς του ( Η επιτάχυνση είναι η μεταβολή του **διανύσματος** της ταχύτητας

# Ο 2<sup>ος</sup> νόμος του Νεύτωνα

Όταν ένα σώμα επιταχύνεται σημαίνει ότι μια δύναμη ασκείται επάνω του.

Αυτή η δύναμη είναι η **συνισταμένη όλων των δυνάμεων που ασκούνται επάνω στο σώμα**

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

# Κανόνες για την εφαρμογή των νόμων του Νεύτωνα στο χώρο

- Επιλογή συστήματος συντεταγμένων
- Φτιάχνουμε τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος για κάθε σώμα
- Για κάθε σώμα χωριστά βρίσκουμε τις δυνάμεις που ασκούνται επάνω του. (Βρίσκουμε και τις δυνάμεις που συνδέονται μέσω δράσης-αντίδρασης)
- Αναλύουμε τις δυνάμεις στους άξονες
- Εφαρμόζουμε τον 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα σε κάθε άξονα για κάθε σώμα χωριστά

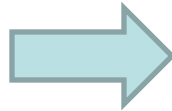
$$\sum F_x = ma_x$$

$$\sum F_y = ma_y$$

Μοτοσυκλέτα βάρους  $B$  επιταχύνει από την ηρεμία σε ταχύτητα  $υ$  μέσα σε χρόνο  $t$ . Ποιά είναι η μέση δύναμη που επενεργεί σε αυτή;

Η δύναμη  $F$  που επιταχύνει την μοτοσυκλέτα δίνεται από τη σχέση  $F = m \cdot a$

$$B = m \cdot g \Rightarrow m = \frac{B}{g}$$



$$a = \frac{υ}{t}$$

$$F = m \cdot a = \frac{B}{g} \cdot \frac{υ}{t}$$

Ένα ηλεκτρόνιο κινείται σε ευθύγραμμη τροχιά και επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση.

Η ταχύτητά του μεταβάλλεται από 0 έως τελική ταχύτητα σε απόσταση 1cm :  $6 \times 10^6$  m/s  
Υπολογίστε τη δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο. Δίδεται η μάζα του ηλεκτρονίου :  $9.1 \times 10^{-31}$  Kg

$$\begin{array}{l} v = at \\ x = \frac{1}{2} at^2 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \rightarrow a = \frac{v^2}{2x}$$
$$F = m \cdot a \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} F = m \cdot \frac{v^2}{2x}$$

$$F = m \cdot \frac{v^2}{2x} = \frac{9.1 \times 10^{-31} \text{ Kg} \times 6^2 \times 10^{12} \text{ m}^2 / \text{s}^2}{2 \times 10^{-2} \text{ m}}$$

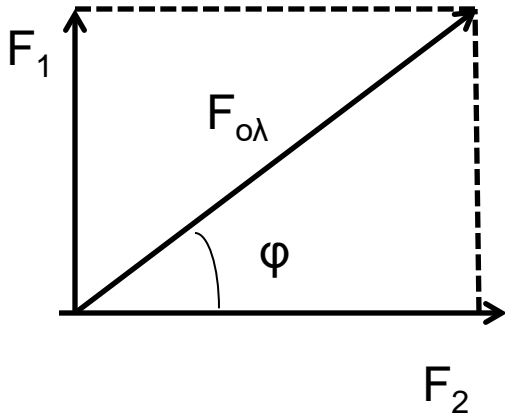
Υπολογίστε την αρχική προς τα πάνω επιτάχυνση πυραύλου μάζας  $1.3 \times 10^4$  Kg αν η αρχική προς τα πάνω δύναμη του κινητήρα είναι:  $2.6 \times 10^5$  N

$$F_{ολ} = F - B = ma$$

$$a = \frac{F - mg}{m} \longrightarrow a = \frac{2.6 \times 10^5 \text{ N} - 1.3 \times 10^4 \text{ Kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2}{1.3 \times 10^4 \text{ Kg}}$$

$$a = 10 \text{ m/s}^2$$

Σε σώμα μάζας  $m$  επιδρουν δύο δυνάμεις  $F_1$  και  $F_2$  κάθετες μεταξύ τους. Βρείτε τη διανυσματική επιτάχυνση αν  $m=5\text{Kg}$   $F_1=3\text{N}$   $F_2=4\text{N}$



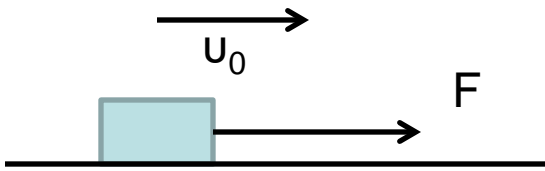
$$\alpha_x = \frac{F_2}{m}$$

$$\alpha_y = \frac{F_1}{m}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{F_2^2 + F_1^2}}{m} = 1\text{m/s}^2$$

$$\tan \phi = \frac{\alpha_y}{\alpha_x} = \frac{F_1}{F_2} = 0.75 \Rightarrow \phi = 37^\circ$$

Αντικείμενο 8.5Kg περνά από την αρχή των αξόνων με ταχύτητα 30m/s παράλληλα προς τον άξονα x. Δέχεται σταθερή δύναμη 17N στη διεύθυνση του θετικού άξονα x. Περιγράψτε την προκύπτουσα κίνηση και υπολογίστε την ταχύτητα και τη θέση του μετά από 15s



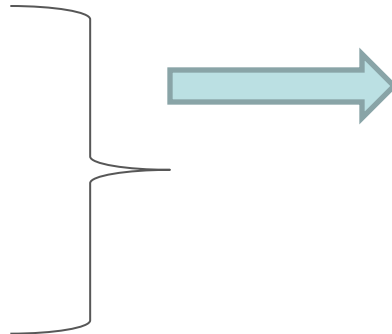
Η δύναμη που δρα πάνω στο σώμα είναι σταθερή  
Άρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

$$\alpha = \frac{F}{m} = 2m / s^2$$

$$v = v_0 + \alpha \cdot t$$

$$x = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

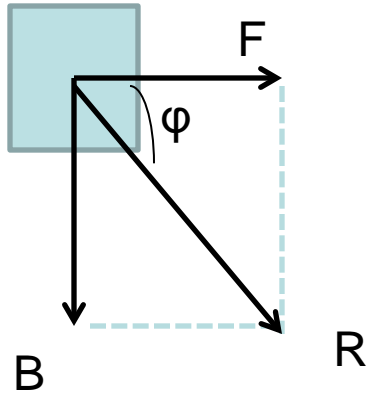
Για t=15s



$$v = 60m / s$$

$$x = 675m$$

Σώμα μάζας  $m$  δέχεται μια δύναμη βαρύτητας προς τα κάτω και μια οριζόντια δύναμη  $F$ . Βρείτε την επιτάχυνσή της και την ταχύτητά της σαν συνάρτηση του χρόνου υποθέτοντας ότι ξεκινά από την ηρεμία.



Η συνισταμένη δύναμη είναι:

$$R = \sqrt{F^2 + B^2}$$

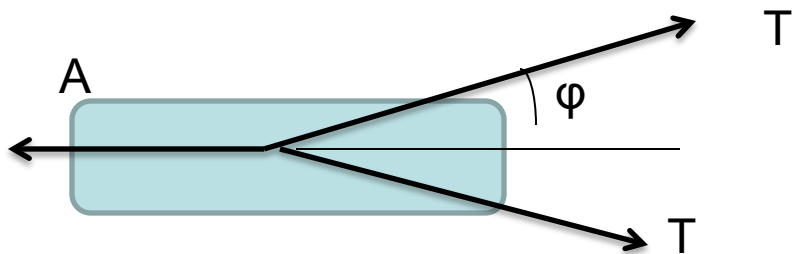
Η επιτάχυνση είναι:

$$\alpha = \frac{R}{m} = \frac{\sqrt{F^2 + m^2 g^2}}{m}$$

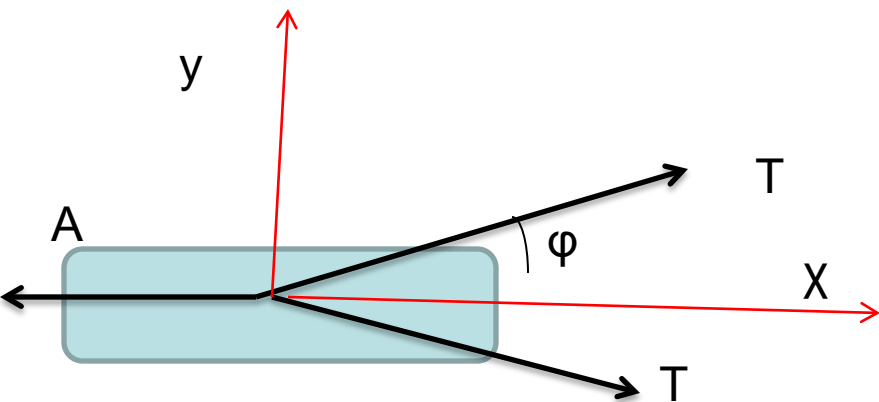
$$\tan \phi = \frac{B}{F}$$

$$U=at$$

**Παράδειγμα:** Έστω αντικείμενο στο οποίο ασκούνται οι δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα: Πόση είναι η δύναμη  $A$  που ασκείται στο αντικείμενο προκειμένου να κινείται με σταθερή ταχύτητα? Πόση είναι η δύναμη  $A$  αν το αντικείμενο επιταχύνεται με επιτάχυνση  $\alpha = 0.16 \text{ms}^{-2}$  Δίδονται:  $T_1 = T_2 = T = 1100 \text{N}$  και η μάζα του αντικείμενου ίση με  $3700 \text{Kg}$



$U = \text{σταθερό}$ :   $\alpha = 0$



**Κατά  $x$ :**  $T \cos 25^\circ + T \cos 25^\circ - A = 0 \Rightarrow$   
 $A = 2T \cos 25^\circ \Rightarrow A = \dots$

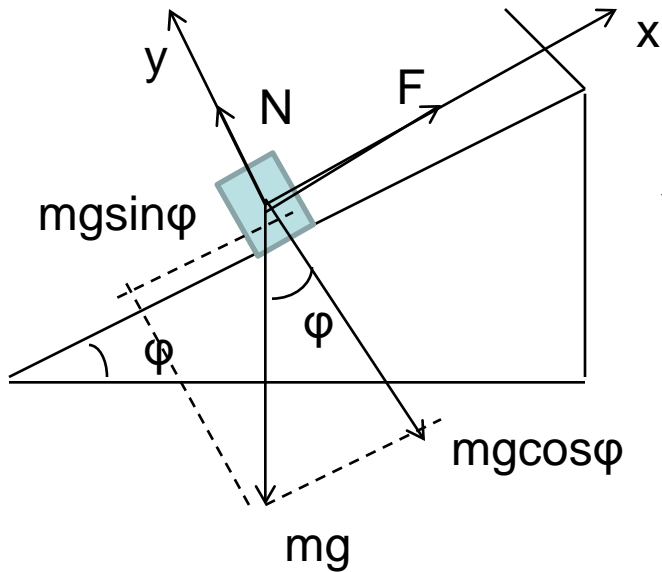
Αν το σώμα επιταχύνεται κατά τον άξονα  $x$ :



$$T \cos 25^\circ + T \cos 25^\circ - A = m\alpha \Rightarrow$$

$$A = 2T \cos 25^\circ - m\alpha \Rightarrow A = \dots$$

Αναφορικά με το σχήμα έστω η μάζα του κύβου είναι  $m$  και η γωνία είναι  $\phi$ . Βρείτε την τάση στο σκοινί και την κάθετη δύναμη που εξασκείται στον κύβο. Αν στο σκοινί κοπεί βρείτε την επιτάχυνση του κύβου



$$F - mg \sin \phi = 0$$

$$N - mg \cos \phi = 0$$



$$F = mg \sin \phi = \dots$$

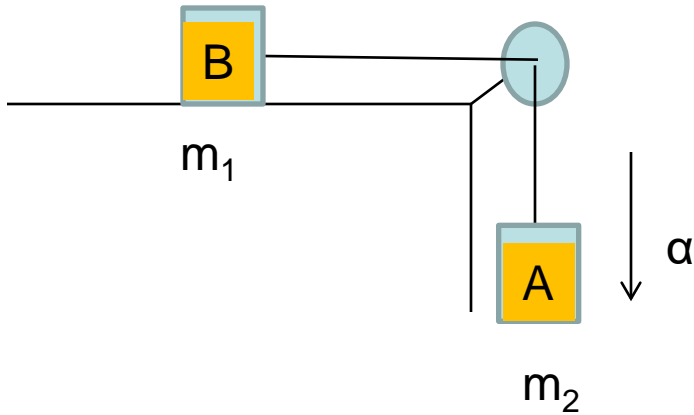
$$N = mg \cos \phi = \dots$$

Αν σπάσει το σκοινί η δύναμη  $F$  θα γίνει 0

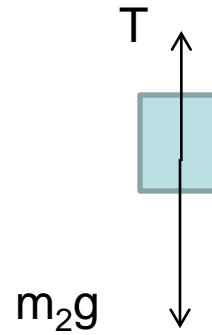


$$mg \sin \phi = m\alpha \Rightarrow \alpha = \dots$$

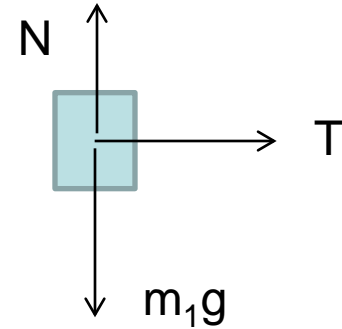
Βρείτε την τάση στο σκοινί και την επιτάχυνση των δύο κύβων



Σώμα A



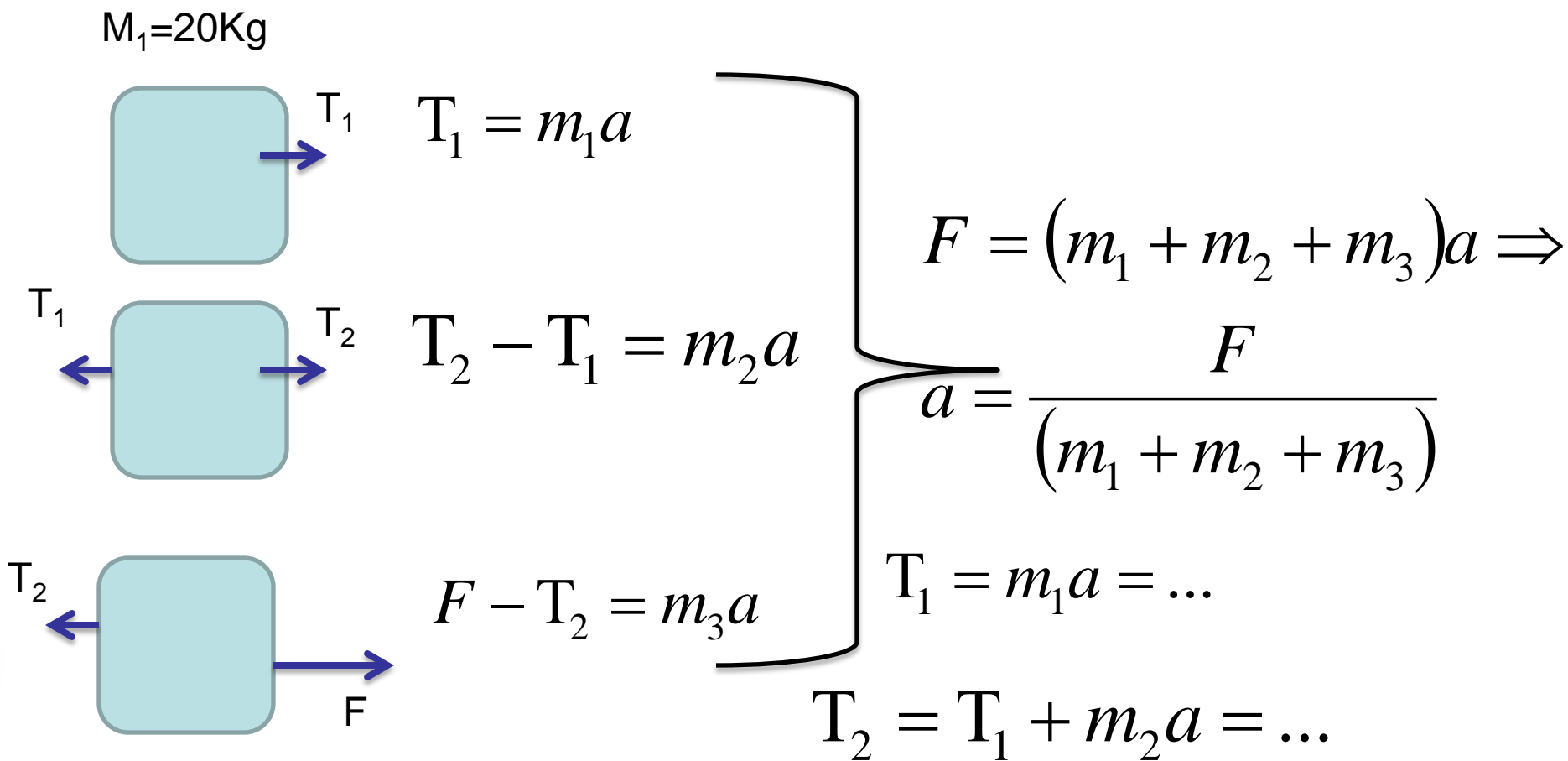
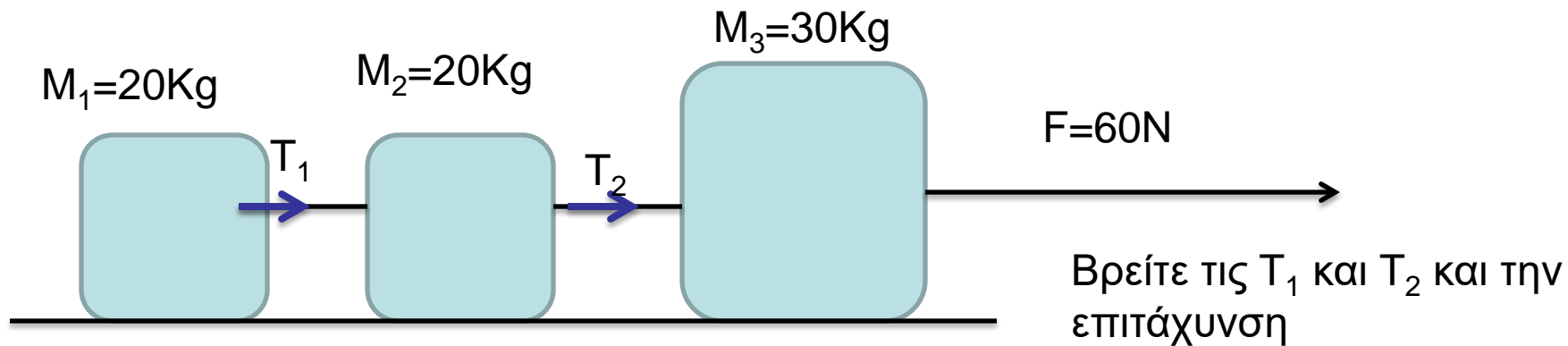
Σώμα B



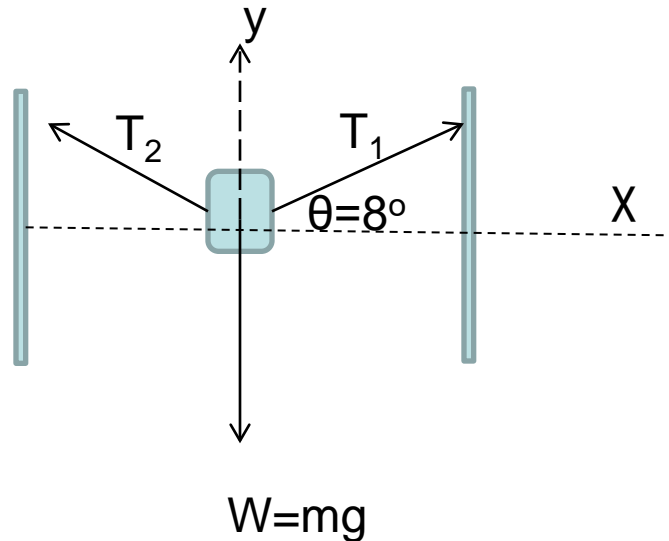
Σώμα B:  $T = m_1 \cdot a$

Σώμα A:  $m_2 g - T = m_2 \cdot a \implies m_2 g - m_1 \cdot a = m_2 \cdot a \implies a = \frac{m_2 g}{(m_1 + m_2)}$

$T = m_1 \cdot a \implies T = m_1 \cdot a = m_1 \cdot \frac{m_2 g}{(m_1 + m_2)}$



Παράδειγμα: Να βρεθούν οι τάσεις των σκοινιών που συγκρατούν το σώμα του σχήματος . Γνωστά: η μάζα του σώματος



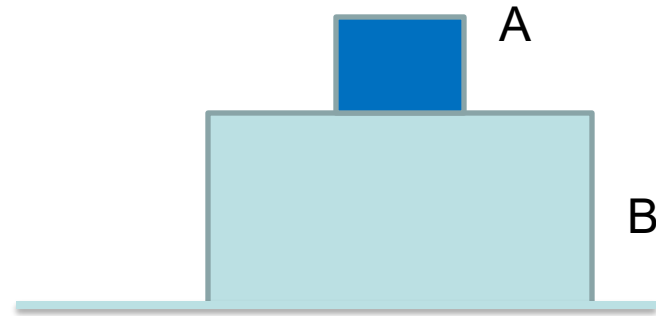
Στον άξονα  $x$  :

$$T_{1x} = T_{2x} \Rightarrow T_1 \cdot \cos 8^\circ = T_2 \cdot \cos 8^\circ \Rightarrow T_1 = T_2 = T$$

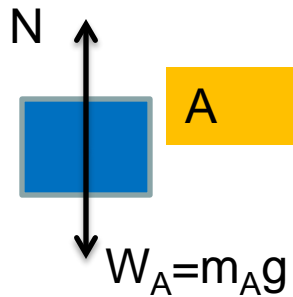
Στον άξονα  $y$  :

$$T_{1y} + T_{2y} - W = 0 \Rightarrow 2T \sin 8^\circ = W \Rightarrow T = \frac{W}{2 \sin 8^\circ} = \frac{mg}{2 \sin 8^\circ}$$

Να βρεθούν οι δυνάμεις πάνω στα δύο σώματα του σχήματος

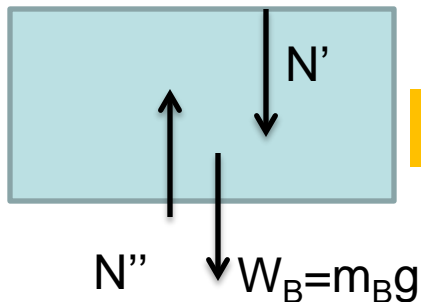


Στο σώμα A



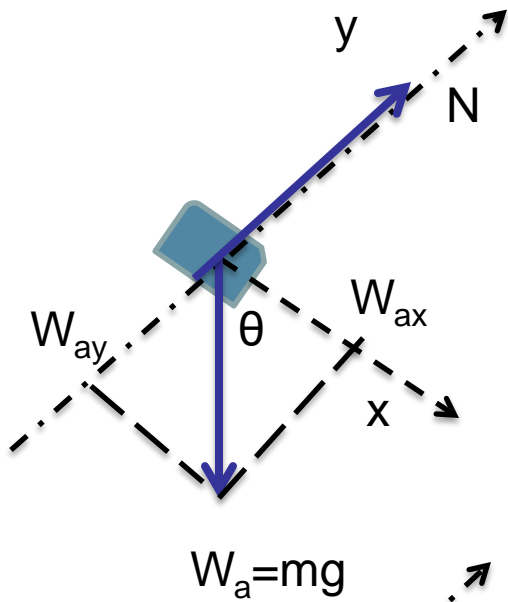
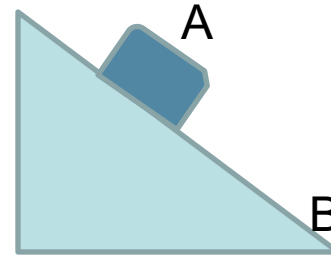
- Το βάρος του  $W_A$
- Η ελαστική δύναμη  $N$  που του ασκεί το σώμα B

Στο σώμα B



- Το βάρος του  $W_B$
- Η ελαστική δύναμη  $N'$  που του ασκεί το σώμα A
- Η ελαστική δύναμη  $N''$  που του ασκεί το πάτωμα

Να βρεθούν οι δυνάμεις πάνω στα δύο σώματα του σχήματος

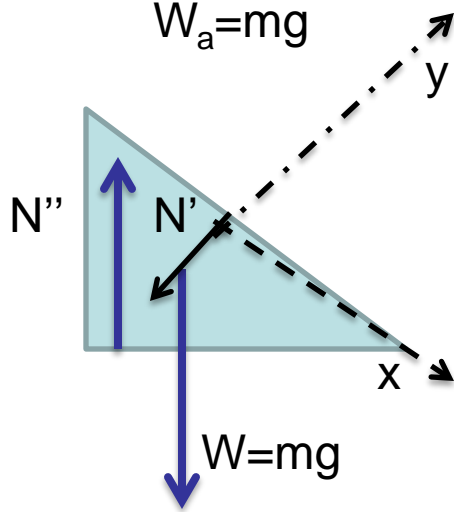


Στο σώμα A

- Το βάρος του  $W_a$
- Η ελαστική δύναμη  $N$  που του ασκεί το σώμα B

$$W_{ay} = W_a \sin\theta = N$$

Στο σώμα B

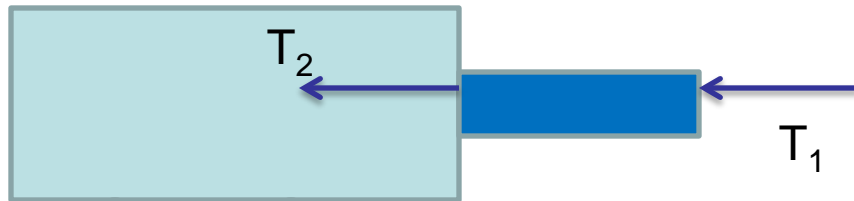


- Το βάρος του  $W_B$
- Η ελαστική δύναμη  $N''$  που του ασκεί το έδαφος
- Η ελαστική δύναμη  $N'$  που του ασκεί το σώμα
- Είναι  $N' = N$  (3<sup>ος</sup> νόμος του Νεύτωνα)

Αμαξίδιο μάζας 11Kg έχει κολλημένο στη μια άκρη του ξύλο μάζας 1.8Kg.  
 Να βρεθούν η δύναμη  $T_1$  με την οποία σπρώχνεται το ξύλο και η  $T_2$  με την οποία το ξύλο σπρώχνει το αμαξίδιο. Το αμαξίδιο αποκτά επιτάχυνση  $2.3 \text{ m/s}^2$  όπως στο σχήμα

←  $\alpha = 2.3 \text{ m/s}^2$

$$T_1 = (m_\beta + m_\xi) \cdot \alpha = 29.4 \text{ N}$$



**Δυνάμεις στο ξύλο:**

- $T_1$  δύναμη ώθησης
- $T'_2$  δύναμη που ασκεί το αμαξίδιο στο ξύλο

$$T_1 - T'_2 = m_\xi \cdot \alpha \quad 1)$$

**Δυνάμεις στο αμαξίδιο:**

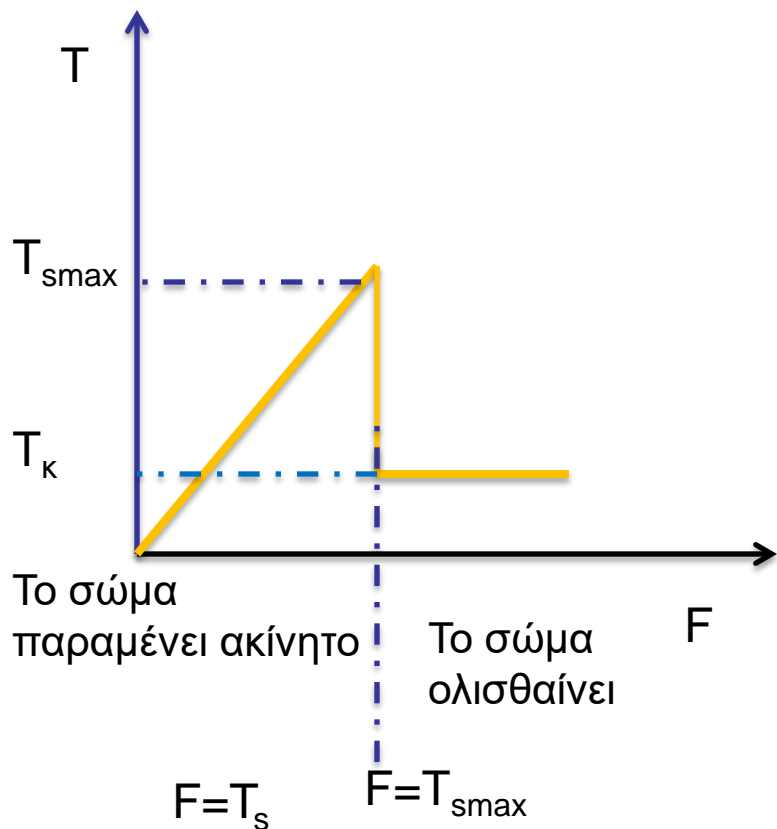
- $T_2$  δύναμη που ασκεί το ξύλο στο αμαξίδιο

$$T_2 = m_\beta \cdot \alpha \Rightarrow T_2 = 11 \cdot 2.3 = 25.3 \text{ N} \quad 2)$$

$$T_2 = -T'_2 \quad 3)$$

$$1)+2) \Rightarrow T_1 - T'_2 + T_2 = m_\xi \cdot \alpha + m_\beta \cdot \alpha \xrightarrow{3)} T_1 = (m_\beta + m_\xi) \cdot \alpha = 29.4 \text{ N}$$

# Η δύναμη της τριβής



**F**=δύναμη που ασκούμε για να κινήσουμε ένα σώμα το οποίο αρχικά ηρεμεί

**T<sub>s</sub>**= στατική τριβή (όσο το σώμα είναι ακίνητο)

**T<sub>k</sub>**= τριβή ολίσθησης

Ελαστική δύναμη

$$T_{smax} = \mu_s N$$

Συντελεστής στατικής τριβής

$$T_k = \mu_k N$$

Συντελεστής τριβής ολίσθησης

$$\mu_s < \mu_k$$

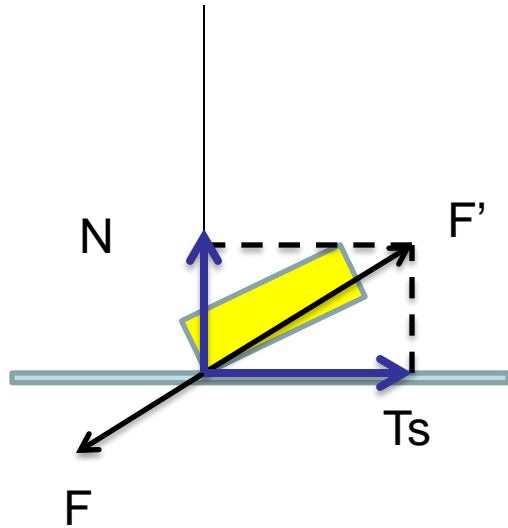
# Η δύναμη της τριβής

Τριβές:

Αν το σώμα δεν ολισθαίνει : στατική τριβή που δίδεται από τη σχέση :  $T_s < \mu_s N$

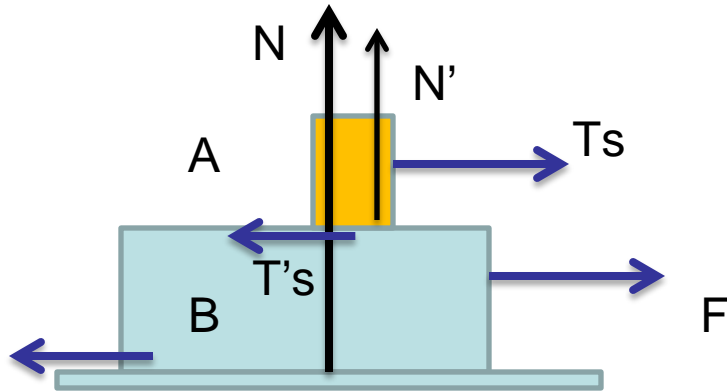
Αν το σώμα ολισθαίνει : τριβή ολίσθησης που δίδεται από τη σχέση :  $T_k = \mu_k N$

Παράδειγμα: χάρις στην τριβή περπατάμε.



- Το πόδι ασκεί στο έδαφος δύναμη  $F$
- Το έδαφος «ανταποδίδει» μια δύναμη  $F'$
- Η  $F'$  αναλύεται στην κάθετη αντίδραση  $N$  και στην στατική τριβή  $T_s$

Για ποιά τιμή της δύναμης F το επάνω κιβώτιο θα αρχίσει να ολισθαίνει ?



Πριν να αρχίσει την ολίσθηση κινείται μαζί με το κάτω κουτί (λόγω της στατικής τριβής μεταξύ τους). Συνεπώς μπορούμε να τα θεωρήσουμε ως ένα σώμα μάζας  $M_A + M_B$

Κατά την ολίσθηση ισχύει:

$$F - T_k = (M_A + M_B) \cdot a$$

$$T_k = \mu_K N$$

$$N = (M_A + M_B)g$$

$$T_k = \mu_K (M_A + M_B)g$$

$$\alpha = \frac{F - \mu_k (M_A + M_B)g}{M_A + M_B}$$

Όταν το κιβώτιο ολισθαίνει θεωρούμε τα δύο σώματα χωριστά  
 Η επιτάχυνση του A οφείλεται στη δύναμη της στατικής τριβής  $T_s$

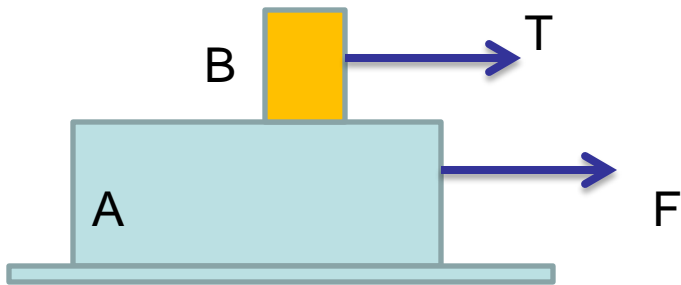
$$T_s = M_A \cdot a = M_A \cdot \frac{F - \mu_k (M_A + M_B)g}{M_A + M_B}$$

$$T_s^{\max} = \mu_s \cdot N' = \mu_s M_A g = M_A \alpha$$

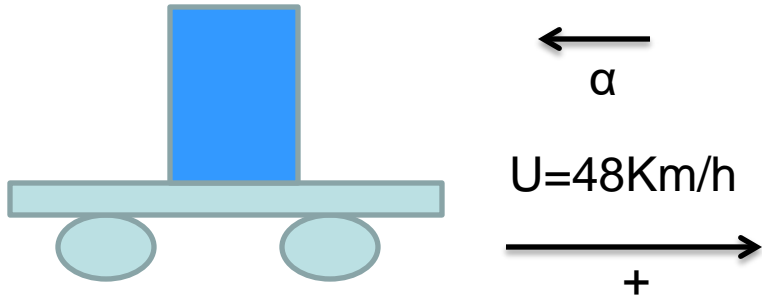
$$= M_A \cdot \frac{F - \mu_k (M_A + M_B)g}{M_A + M_B} \Rightarrow F = ..$$

Το σώμα A θα αρχίσει να ολισθαίνει όταν  $T_s = T_s^{\max}$

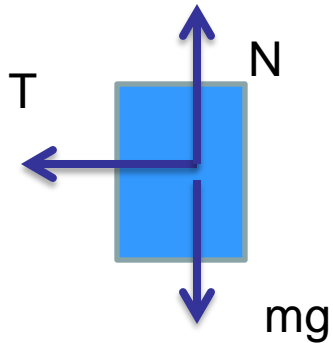
Το σώμα B του σχήματος είναι ακίνητο πάνω στο A , δηλαδή επιταχύνεται μαζί με το A. Η δύναμη που το επιταχύνει είναι η τριβή



Εστω κιβώτιο πάνω σε τραίνο που κινείται όπως στο σχήμα. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ κιβωτίου και πλατφόρμας είναι  $\mu=0.5$ . Ποιά είναι η μέγιστη επιβράδυνση ώστε το κιβώτιο να μην ολισθαίνει. Σε πόση απόσταση θα σταματήσει το τραίνο



$$a_{\text{τραίνου}} = a_{\text{κιβωτίου}} = a$$



$$-T = -m\alpha$$

$$T = m\alpha$$

$$N = mg$$

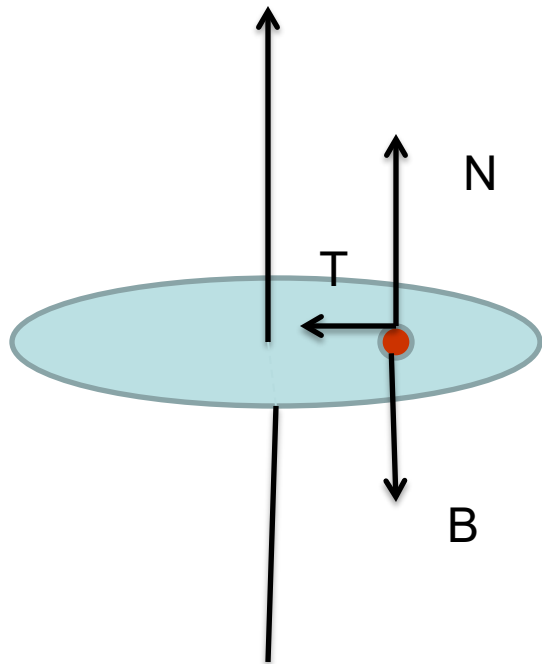
$$T \leq \mu \cdot N$$

$$\alpha \leq \mu \cdot g$$

$$\alpha_{\text{max}} = \mu \cdot g$$

$$x_{\text{max}} = \frac{u_0^2}{2a}$$

Αντικείμενο βρίσκεται σε απόσταση 10cm από το κέντρο περιστρεφόμενου δίσκου. Ο δίσκος περιστρέφεται με συχνότητα 33 στροφές/min. Ποιός ο συντελεστής τριβής μεταξύ αντικειμένου και δίσκου



Η Τριβή είναι κεντρομόλος δύναμη ( $F_k$ )

$$B = N$$

$$T = \mu N$$

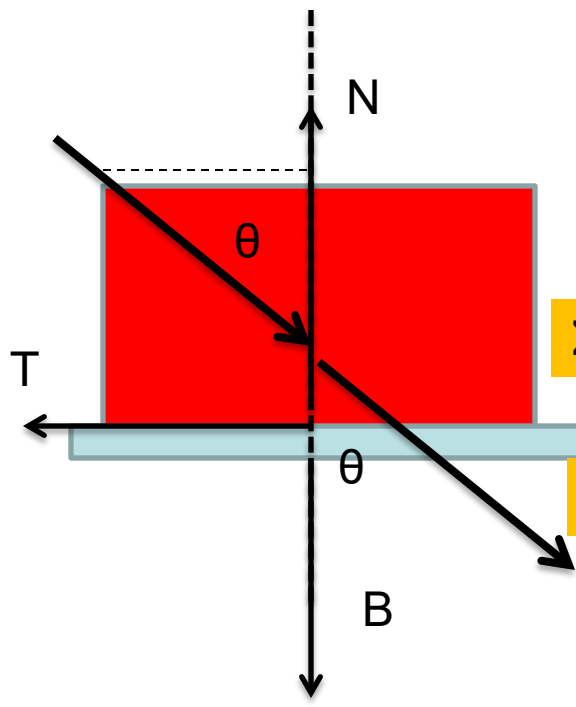
$$\longrightarrow T = \mu B = \mu mg$$

$$F_k = T = \mu mg = ma_k \Rightarrow \mu = \frac{a_k}{g}$$

$$f = 33 \frac{\text{στροφές}}{\text{min}} = 33 \frac{\text{στροφές}}{60\text{s}} = 0.55 \frac{\text{στροφές}}{\text{s}}$$

$$a_k = \omega^2 \cdot R = (2\pi f)^2 \cdot R = .. \longrightarrow \mu = \dots$$

Στο σώμα του σχήματος ασκείται δύναμη  $F$  η οποία σχηματίζει γωνία  $\theta$  με την κατακόρυφο. Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της ώστε να κινηθεί το σώμα με σταθερή ταχύτητα? Δίδεται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης  $\mu$



$υ = \text{σταθερό} \rightarrow \alpha = 0$

ΣΤΟΝ ΑΞΟΝΑ  $x$ :

$$F \sin \theta - T = 0 \Rightarrow T = F \sin \theta$$

ΣΤΟΝ ΑΞΟΝΑ  $y$ :

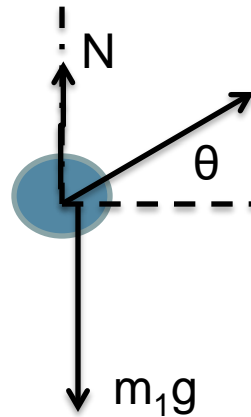
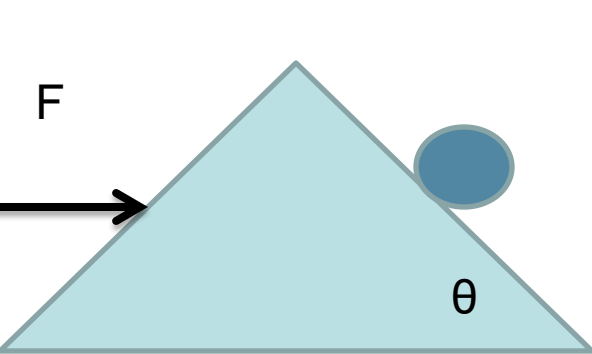
$$N - F \cos \theta - B = 0 \Rightarrow N = F \cos \theta + mg$$

$$T = \mu N$$

$$F \sin \theta = \mu N = \mu (F \cos \theta + mg)$$

$$F = \frac{\mu mg}{\sin \theta - \mu \cos \theta}$$

Ποιά είναι η δύναμη  $F$  που πρέπει να εφαρμοστεί στο σώμα μάζας  $m_2$  ώστε το σώμα μάζας  $m_1$  να μην ολισθαίνει ?



Για το σώμα μάζας  $m_1$  :

Κατά  $x$ :

$$N \sin \theta = m_1 a$$

Κατά  $y$ :

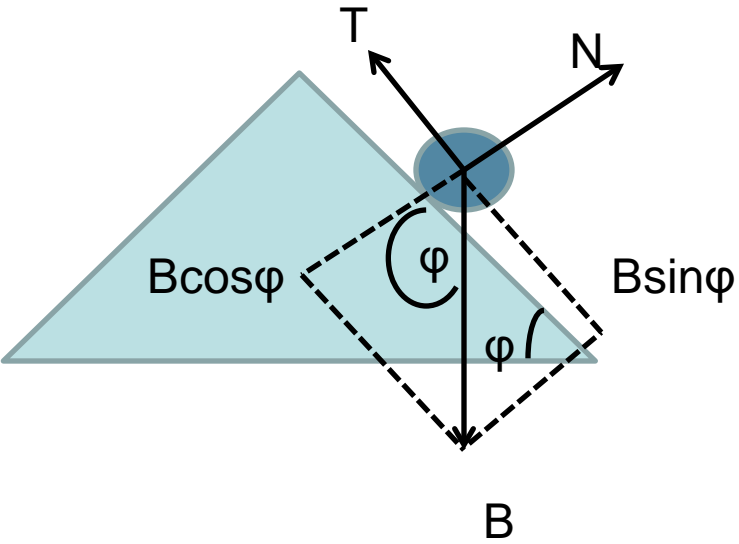
$$N \cos \theta = m_1 g$$

$$a = g \tan \theta$$

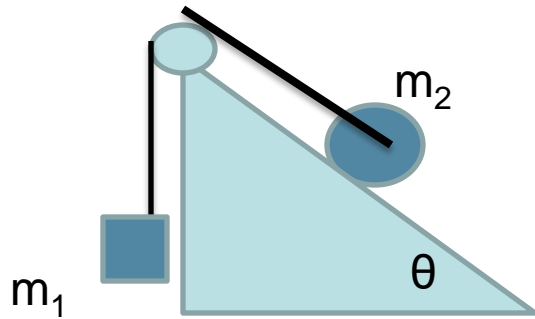
Αφού το σώμα δεν ολισθαίνει ως προς το κάτω σώμα, έπεται ότι τα δύο σώματα μπορούν να θεωρηθούν ως ένα σώμα μάζας  $m_1 + m_2$

$$F = (m_1 + m_2) a = (m_1 + m_2) g \tan \theta$$

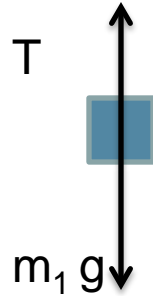
Το σώμα επιταχύνεται με επιτάχυνση  $a=0.11\text{m/s}^2$   
Υπολογίστε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης  $\mu$ .



Βρείτε την επιτάχυνση των δύο μαζών και την τάση του νήματος.  
 Το νήμα είναι μη εκτατό και συνεπώς τα δύο σώματα έχουν την ίδια επιτάχυνση



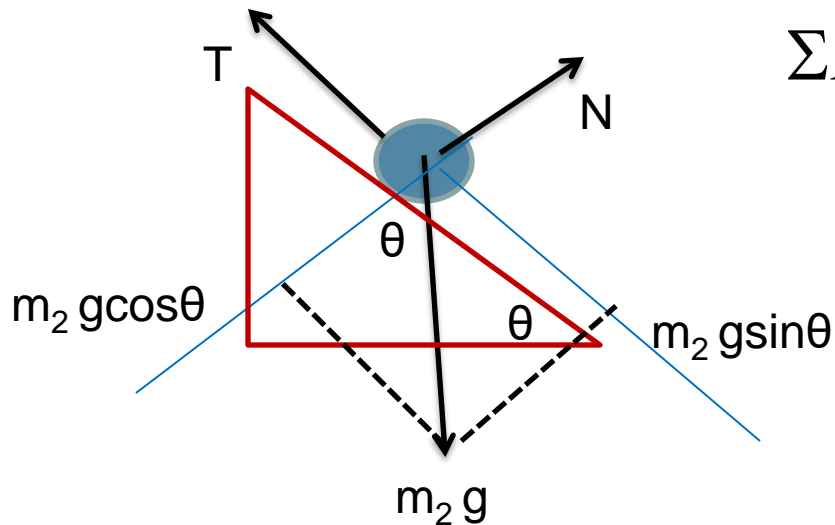
Σώμα  $m_1$



$$\Sigma F_x = 0$$

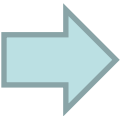
$$\Sigma F_y = T - m_1 g = m_1 a$$

Σώμα  $m_2$



$$\Sigma F_x = m_2 g \sin \theta - T = m_2 a$$

$$\Sigma F_y = N - m_2 g \cos \theta = 0$$



$$\Sigma F_x = 0$$

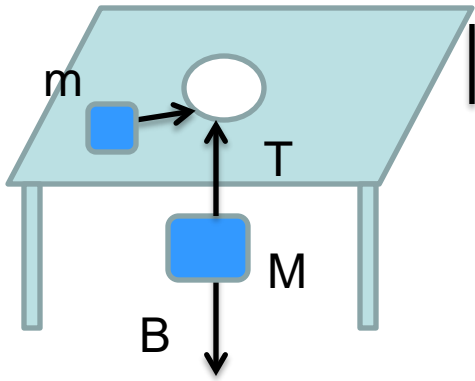
$$\Sigma F_y = T - m_1 g = m_1 a \implies T = m_1 a + m_1 g$$

$$\Sigma F_x = m_2 g \sin \theta - T = m_2 a \implies a = \frac{m_2 g \sin \theta - m_1 g}{m_1 + m_2}$$

$$\Sigma F_y = N - m_2 g \cos \theta = 0$$

$$T = m_1 \cdot \frac{m_2 g \sin \theta - m_1 g}{m_1 + m_2} + m_1 g$$

Το τραπέζι είναι λείο. Ποιά είναι η συνθήκη για την οποία η μάζα  $m$  περιστρέφεται με τέτοιον τρόπο ώστε η μάζα  $M$  να είναι ακίνητη



Το  $M$  πρέπει να ισορροπεί άρα:

$$T=B=Mg$$

Στο σώμα μάζας  $m$  η τάση του σκοινιού παίζει το ρόλο κεντρομόλου δύναμης. Άρα:

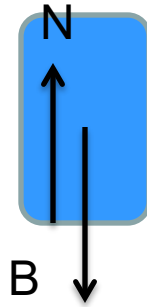
$$T = \frac{mu^2}{r}$$

$$T = \frac{mu^2}{r} = Mg \Rightarrow \frac{u^2}{r} = \frac{Mg}{m}$$

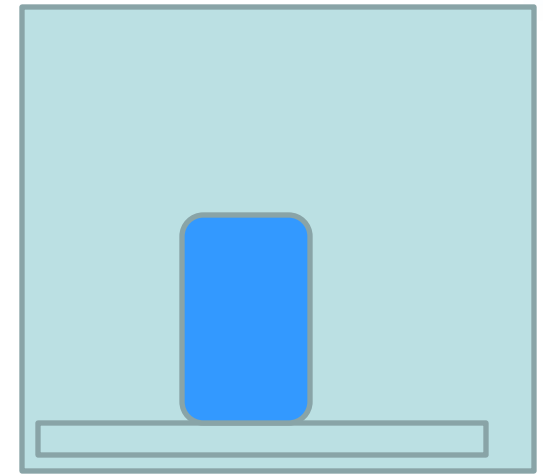
# Ζύγιση σώματος μέσα σε ανελκυστήρα

Έστω ότι ο ανελκυστήρας ακινητεί

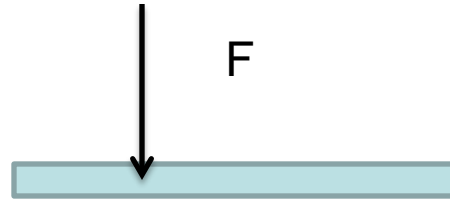
Δυνάμεις πάνω  
στο σώμα



- N = δύναμη που ασκεί η ζυγαριά
- B = βάρος του σώματος



Δυνάμεις πάνω στη ζυγαριά: Η δύναμη  $F$  που ασκεί το σώμα στη ζυγαριά και που δίνει την ένδειξη της ζυγαριάς



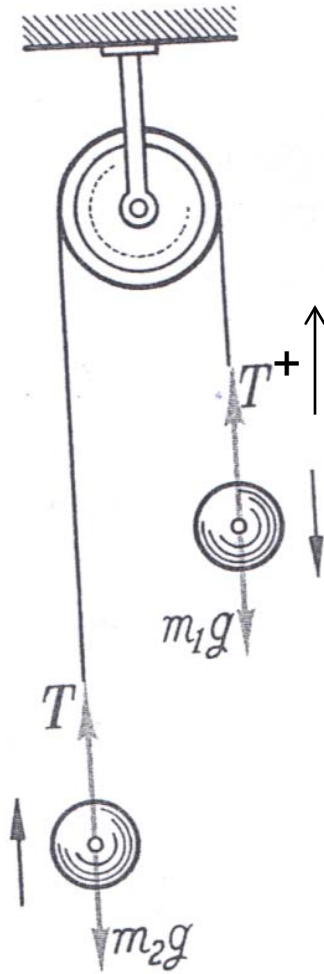
$$N = F$$

Έστω ότι ο ανελκυστήρας κινείται με σταθερή επιτάχυνση προς τα επάνω

$$\begin{aligned}\vec{N} + \vec{B} &= ma \Rightarrow N - B = ma \Rightarrow N = ma + B = ma + mg \\ \Rightarrow F &= ma + mg\end{aligned}$$

Έστω ότι ο ανελκυστήρας κινείται με σταθερή επιτάχυνση προς τα κάτω

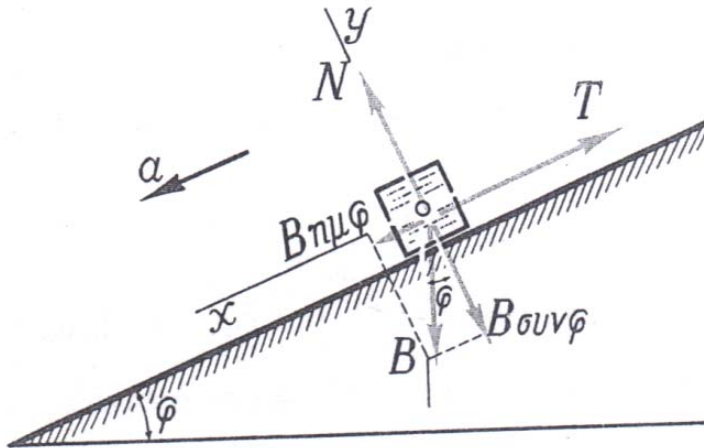
$$\begin{aligned}\vec{N} + \vec{B} &= ma \Rightarrow N - B = -ma \Rightarrow N = B - ma = mg - ma \\ \Rightarrow F &= mg - ma\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 T - m_1g &= -m_1a \\
 T - m_2g &= m_2a
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} T - m_1g &= -m_1a \\ T - m_2g &= m_2a \end{aligned}} \right\}$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$$

Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι  $\mu=0.2$ . Ποια είναι η επιτάχυνση του κύβου  
 $\phi=60^\circ$



$$B \sin \phi - T = ma \Rightarrow T = mg \sin \phi - ma$$

$$N - B \cos \phi = 0 \Rightarrow N = mg \cos \phi$$

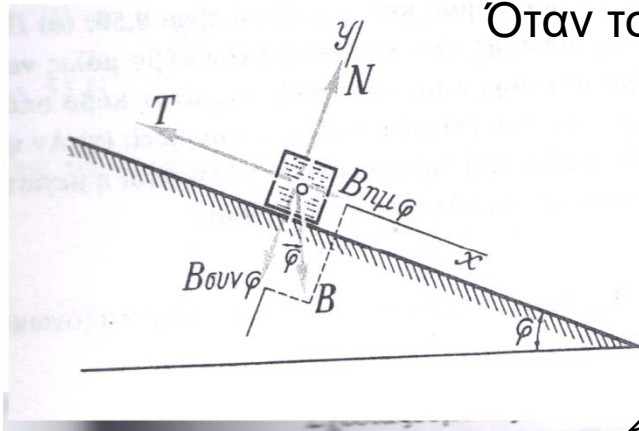
$$T = \mu_\sigma \cdot N$$

$$mg \sin \phi - ma = \mu_\sigma \cdot mg \cos \phi \Rightarrow$$

$$\alpha = g(\sin \phi - \mu_\sigma \cos \phi) = 7.5 \text{ m/s}^2$$

Σπουδαστής θέλει να βρει τους συντελεστές στατικής τριβής και τριβής ολίσθησης ενός κιβωτίου και μιας σανίδας. Τοποθετεί το κιβώτιο στη σανίδα και αρχίζει να την ανυψώνει σιγά σιγά.

Όταν η γωνία κλίσης ως προς την οριζόντιο γίνει  $30^\circ$  το κιβώτιο αρχίζει να ολισθαίνει και διανύει 4m μέσα σε 4 s. Ποιοί είναι η συντελεστές τριβής



Όταν το σώμα δεν κινείται έχουμε στατική τριβή και:

$$B \sin \phi - T = 0 \Rightarrow T = mg \sin \phi$$

$$N - B \cos \phi = 0 \Rightarrow N = mg \cos \phi$$

$$T \leq \mu_\sigma \cdot N$$

$$mg \sin \phi \leq \mu_\sigma \cdot mg \cos \phi$$



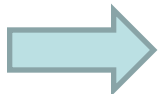
$$\sin \phi \leq \mu_\sigma \cos \phi$$

$$\tan \phi \leq \mu_\sigma$$



$$\tan \phi = \mu_\sigma \Rightarrow \mu_\sigma = 0.58$$

Όταν η γωνία γίνει μέγιστη  $\phi=30^\circ$



Όταν το κιβώτιο ολισθαίνει κάνει κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση προς τα κάτω

$$B \sin \phi - T = ma \Rightarrow T = mg \sin \phi - ma$$

$$N - B \cos \phi = 0 \Rightarrow N = mg \cos \phi$$

$$T = \mu_0 N$$

$$mg \sin \phi - ma = \mu_0 mg \cos \phi$$

$$\mu_0 = \tan \phi - \frac{a}{g \cos \phi}$$

Υπολογισμός επιτάχυνσης:

$$x = \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow a = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \cdot 4m}{4^2 s^2} = 0.5m/s^2$$

$$\mu_0 = \tan 30^\circ - \frac{0.5m/s^2}{9.8m/s^2 \cos 30^\circ} = 0.52$$

$$\mu_0 < \mu_s$$

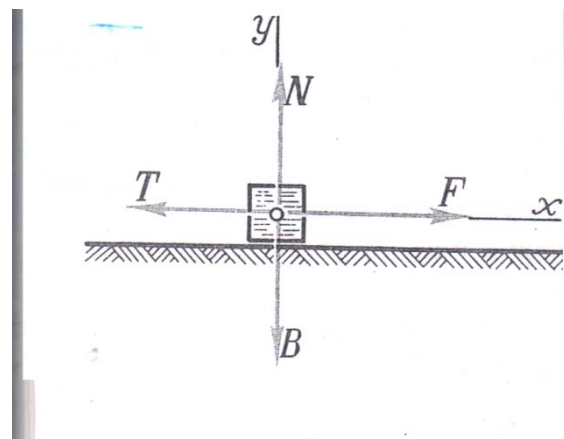
Όπως προβλέπει η θεωρία

Κύβος 10Kg ηρεμεί πάνω σε τραπέζι. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ κύβου και τραπεζιού είναι 0.5. Ποιό είναι το μέτρο της οριζόντιας δύναμης που επιτρέπει στον κύβο μόλις να κινηθεί ;

$$F - T = 0 \Rightarrow T = F$$

$$N - B = 0 \Rightarrow N = B \quad \Rightarrow \quad F \leq \mu_{\sigma} B$$

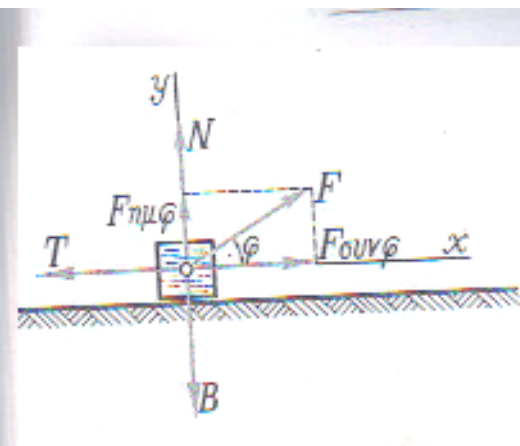
$$T \leq \mu_{\sigma} N$$



Για να κινηθεί ο κύβος πρέπει

$$F = \mu_{\sigma} mg = 0.5 \cdot 10 \text{Kg} \cdot 9.81 \text{m} / \text{s}^2 = 49 \text{N}$$

Κύβος 10Kg ηρεμεί πάνω σε τραπέζι. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ κύβου και τραπεζιού είναι 0.5. Ποιό είναι το μέτρο της δύναμης που επενεργώντας πάνω στον κύβο υπο γωνία  $60^\circ$  πάνω από την οριζόντιο επιτρέπει στον κύβο μόλις να κινηθεί ;



$$F \cos \phi - T = 0 \Rightarrow T = F \cos \phi$$

$$N + F \sin \phi - B = 0 \Rightarrow N = mg - F \sin \phi$$

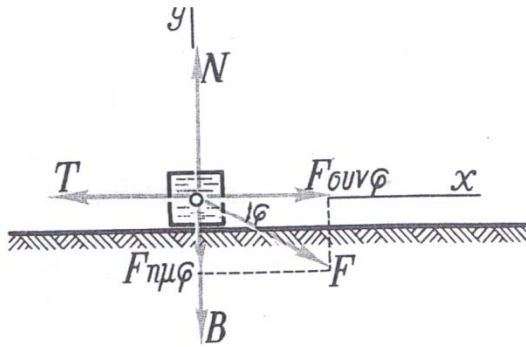
$$T \leq \mu_\sigma N$$

$$F \leq \frac{\mu_s mg}{\cos \phi + \mu_\sigma \sin \phi}$$

Για να κινηθεί ο κύβος πρέπει

$$F = \frac{\mu_s mg}{\cos \phi + \mu_\sigma \sin \phi} = 53\text{N}$$

Κύβος 10Kg ηρεμεί πάνω σε τραπέζι. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ κύβου και τραπεζιού είναι 0.5. Ποιό είναι το μέτρο της δύναμης που επενεργώντας πάνω στον κύβο υπο γωνία 60° κάτω από την οριζόντιο επιτρέπει στον κύβο μόλις να κινηθεί ;



$$F \cos \phi - T = 0 \Rightarrow T = F \cos \phi$$

$$N - F \sin \phi - B = 0 \Rightarrow N = F \sin \phi + mg$$

$$T \leq \mu_{\sigma} N$$



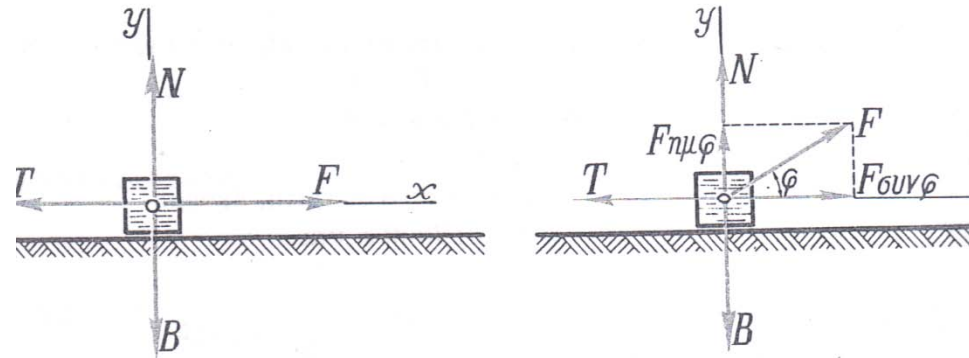
$$F \leq \frac{\mu_{\sigma} mg}{\cos \phi - \mu_{\sigma} \cdot \sin \phi}$$

Για να κινηθεί ο κύβος πρέπει

$$F = \frac{\mu_{\sigma} mg}{\cos \phi - \mu_{\sigma} \cdot \sin \phi}$$

$$F = \frac{0.5 \cdot 10 \text{Kg} \cdot 9.81 \text{m/s}^2}{0.5 - 0.5 \cdot 0.87} = 754 \text{N}$$

Κύβος 10 Kg ηρεμεί σε οριζόντιο τραπέζι. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ κύβου και τραπεζιού είναι 0.5. Ποιό είναι το μέτρο της οριζόντιας δύναμης που επιτρέπει στον κύβο να κινηθεί ?



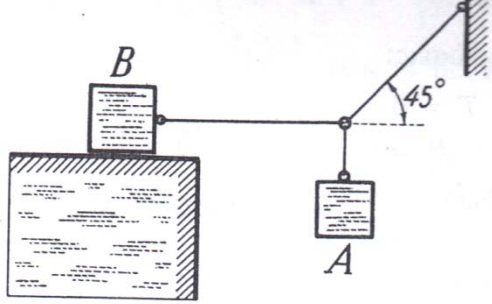
$$F - T = 0 \Rightarrow T = F$$

$$N - B = 0 \Rightarrow N = B$$

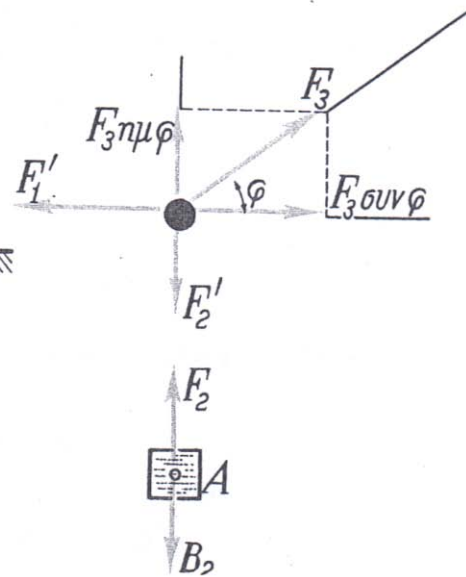
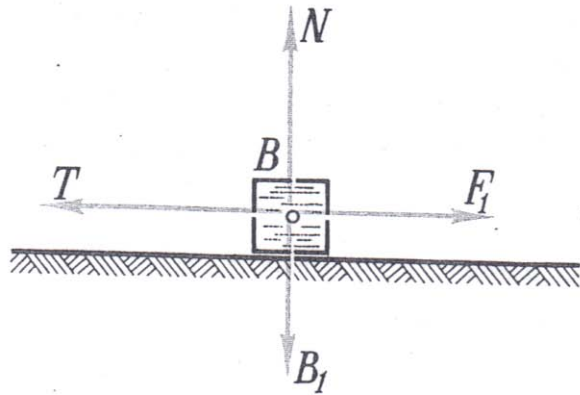
$$T \leq \mu_{\sigma} \cdot N \quad \rightarrow$$

Για να κινηθεί ο κύβος πρέπει:

$$F = \mu_{\sigma} \cdot mg = 49 N$$



Ο κύβος B έχει βάρος 710N. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ του κύβου και του τραπέζιου είναι 0.25. Βρείτε το μέγιστο βάρος που μπορεί να έχει ο κύβος A χωρίς να ανατραπεί η ισορροπία του συστήματος.



Σώμα A

$$\left. \begin{aligned} F_2 &= B_2 \\ F_2 &= F_2' \end{aligned} \right\} F_2 = F_2' = B_2$$

Από την συνθήκη ισορροπίας του κόμβου των σκοινιών:

$$\begin{aligned} F_3 \sin \phi - F_2' &= 0 \Rightarrow F_2' = F_3 \sin \phi \\ F_3 \cos \phi - F_1' &= 0 \Rightarrow F_1' = F_3 \cos \phi \end{aligned} \Rightarrow F_1' = \frac{F_2'}{\tan \phi} = \frac{B_2}{\tan \phi}$$

Απο τη συνθήκη ισορροπίας του κύβου Β ισχύει

$$F_1 - T = 0 \Rightarrow T = F_1$$

$$N - B_1 = 0 \Rightarrow N = B_1 \quad \rightarrow$$

$$T \leq \mu N$$

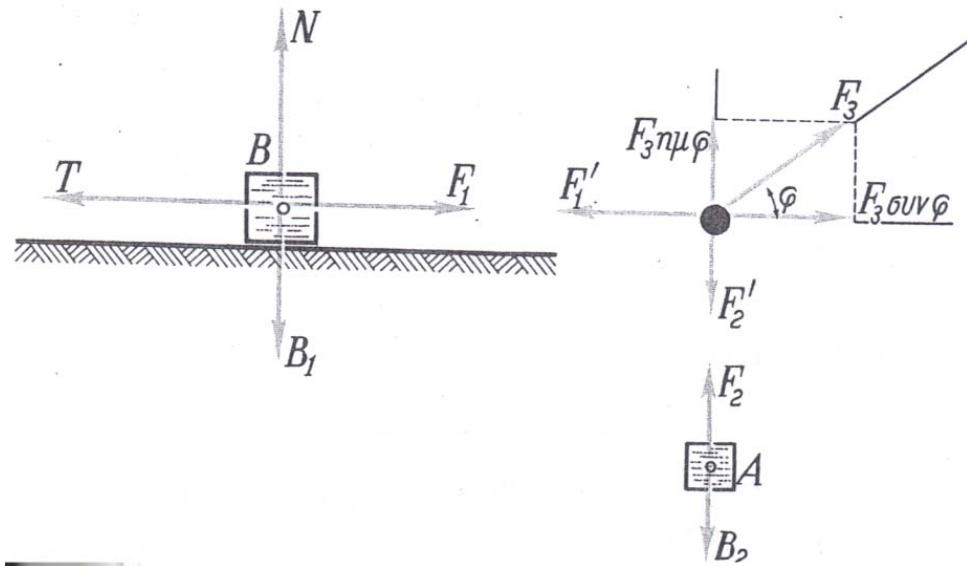
$$F_1 \leq \mu B_1$$

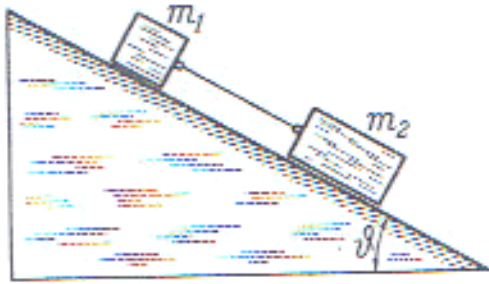
$$\left. \begin{aligned} F_1 &= F_1' \\ F_1' &= \frac{F_2'}{\tan \phi} = \frac{B_2}{\tan \phi} \end{aligned} \right\} F_1 = \frac{B_2}{\tan \phi} \quad \rightarrow$$

$$\frac{B_2}{\tan \phi} \leq \mu B_1 \Rightarrow B_2 \leq \mu B_1 \cdot \tan \phi$$

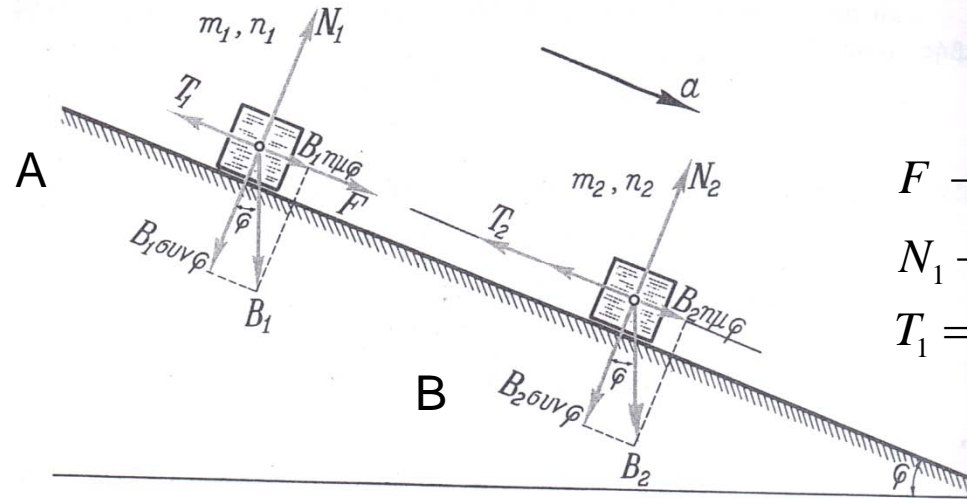
Μέγιστο βάρος του Β2 είναι:

$$B_2 = \mu B_1 \cdot \tan \phi$$





Δύο μάζες  $m_1$  και  $m_2$  συνδεονται με αβαρή ράβδο . Η μάζα  $m_2$  ρυμουλκει την μάζα  $m_1$ . Η γωνία κλίσης είναι  $\theta=30^\circ$  . Ο συντελεστής τριβής για το σωμα  $m_1$  είναι  $\eta_1=0.225$  και για το σώμα  $m_2$  είναι  $\eta_2=0.113$ . Υπολογίστε την τάση στη ράβδο που συνδέει τις δυο μάζες και την κοινή τους επιτάχυνση



Σώμα A μάζας  $m_1$

$$F - T_1 + B_1 \sin \phi = m_1 a \Rightarrow T_1 = F + B_1 \sin \phi - m_1 a$$

$$N_1 - B_1 \cos \phi = 0 \Rightarrow N_1 = B_1 \cos \phi$$

$$T_1 = \eta_1 N_1 \Rightarrow T_1 = \eta_1 N_1 \Rightarrow$$

$$m_1 g \sin \phi + F - m_1 a = \eta_1 m_1 g \cos \phi$$

Σώμα B μάζας  $m_2$

$$B_2 \sin \phi - F - T_2 = m_2 a \Rightarrow T_2 = B_2 \sin \phi - F - m_2 a$$

$$N_2 - B_2 \cos \phi = 0 \Rightarrow N_2 = B_2 \cos \phi$$

$$T_2 = \eta_2 N_2$$

$$T_2 = \eta_2 N_2 \Rightarrow$$

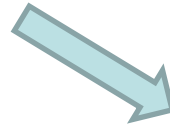
$$m_2 g \sin \phi - F - m_2 a = \eta_2 m_2 g \cos \phi$$

$$T_1 = \eta_1 N_1 \Rightarrow$$

$$m_1 g \sin \phi + F - m_1 a = n_1 m_1 g \cos \phi$$

$$T_2 = \eta_2 N_2 \Rightarrow$$

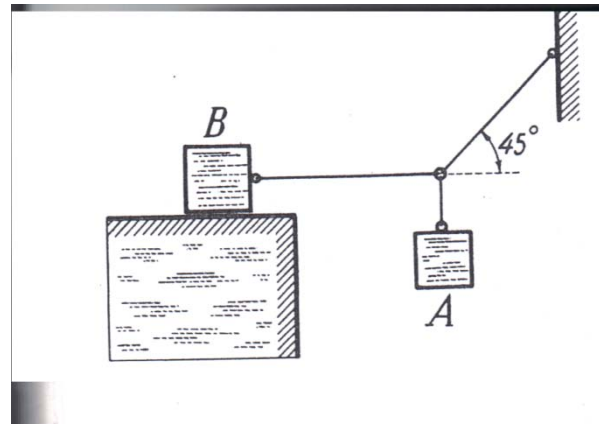
$$m_2 g \sin \phi - F - m_2 a = n_2 m_2 g \cos \phi$$

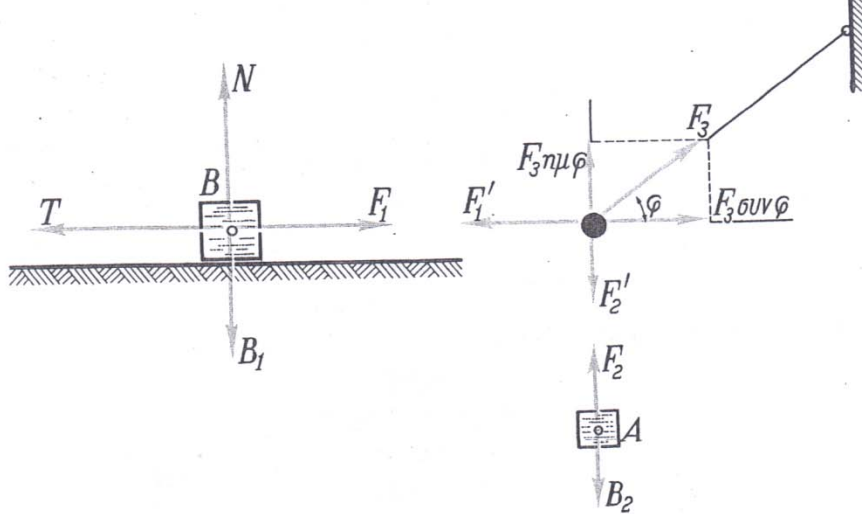


$\alpha = \dots$

$F = \dots$

Κύβος B έχει βάρος 710 N. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ κύβου και τραπέζιού είναι 0.25. Βρείτε το μέγιστο βάρος που μπορεί να έχει ο κύβος A χωρίς να ανατραπεί η ισορροπία του συστήματος





Σώμα Α:  $F_2 - B_2 = 0 \Rightarrow F_2 = B_2$

Τρίτος νόμος του Νεύτωνα

$$F_2' = F_2 \Rightarrow F_2' = B_2$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας του κόμβου των σκοινιών προκύπτει:

$$F_3 \cos \phi - F_1' = 0 \Rightarrow F_3 = \frac{F_1'}{\cos \phi}$$

$$F_3 \sin \phi - F_2' = 0$$



$$F_1' = \frac{F_2}{\tan \phi} = \frac{B_2}{\tan \phi}$$

Τρίτος νόμος του Νεύτωνα



$$F_1 = F_1'$$

$$F_1 = \frac{B_2}{\tan \phi}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας του σώματος Β προκύπτει:

$$F_1 - T = 0$$

$$N - B_1 = 0$$

$$T \leq \mu_\sigma N$$



$$F_1 \leq \mu_\sigma B_1$$



$$\frac{B_2}{\tan \phi} \leq \mu_\sigma B_1$$



$$B_2 = 180\text{N}$$