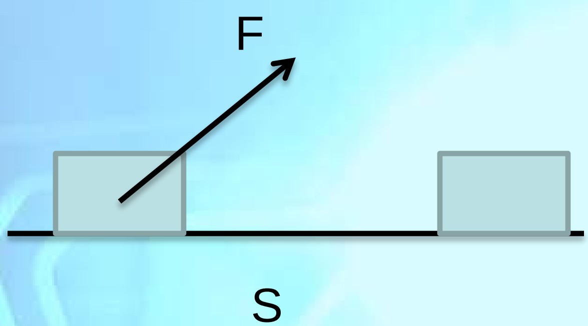
ΕΡΓΟ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ

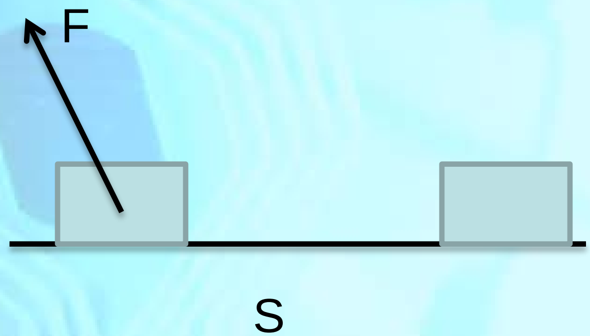


$$W = \vec{F} \cdot \vec{S} =$$

$$FS\cos\theta = F_x S \ \ Joule$$

J=N m

Η δύναμη F παράγει έργο όταν:
Α) το σώμα μετατοπίζεται
Β) η δύναμη F έχει μη μηδενική συνιστώσα κατά τη διεύθυνση της μετατόπισης

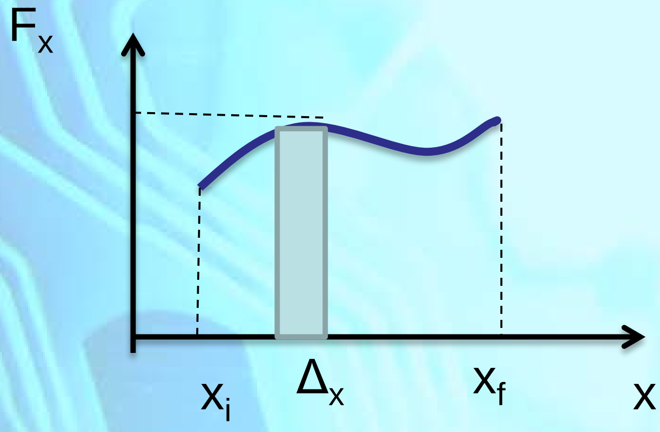


$$W = \vec{F} \cdot \vec{S} = -FS\cos\theta$$

ΕΡΓΟ ΜΗ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ

Έστω σώμα που μετατοπίζεται κατά τη διεύθυνση χ από μια μεταβλητή δύναμη. Η χ συνιστώσα της δύναμης παράγει στοιχειώδες έργο

$$\Delta W \cong F_x \cdot \Delta_x$$



Συνολικό έργο:

$$W \cong \sum_{x_i}^{x_f} F_x \cdot \Delta_x \Rightarrow$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Έργο και κινητική ενέργεια

Έστω δύναμη Fx που δρα σε σώμα μάζας m που κινείται κατά τη διεύθυνση x $\Rightarrow$ Το σώμα επιταχύνεται στη διεύθυνση x

Αν η Fx είναι σταθερή $\Rightarrow$ Η επιτάχυνση είναι σταθερή $W = F_x \cdot S = ma_x s$

Έστω το σώμα μετατοπίζεται από θέση x_i σε θέση x_f=s

$$a_x = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow$$

$$\upsilon_f = \upsilon_i + a_x t \Rightarrow a_x = \frac{u_f - u_i}{t}$$

$$x_f = s = x_i + u_i t + \frac{1}{2} a_x t^2 \Rightarrow s = \frac{1}{2}\left(u_i + u_f\right)t$$

$$W = ma_x s = m\frac{u_f - u_i}{t}\frac{1}{2}\left(u_i + u_f\right)t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}mu_f^2 - \frac{1}{2}mu_i^2$$

Αν α=0 η κίνηση είναι ισοταχής και συνεπώς W=0

Έργο και κινητική ενέργεια

$$W = \frac{1}{2}mu_f^2 - \frac{1}{2}mu_i^2 \Rightarrow W = E_k^f - E_k^i$$

Θεώρημα έργου-ενέργειας:

Το έργο που παράγει η συνισταμένη σταθερή δύναμη που δρα πάνω σε ένα σώμα και το μετατοπίζει ισούται με την μεταβολή της κινητικής του κατάστασης

Ισχύει και αν η δύναμη είναι μεταβλητή ??

Έργο και κινητική ενέργεια

$$W=\int_{x_i}^{x_f} F_x dx=\int_{x_i}^{x_f} m a_x dx$$

$$a_x=\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=u\frac{du}{dx}$$

$$W=\int_{x_i}^{x_f} m a_x dx=\int_{x_i}^{x_f} u\frac{du}{dx}dx=\int_{u_i}^{u_f} u\,du=\frac{1}{2}mu_f^2-\frac{1}{2}mu_i^2$$

Γενική έκφραση έργου:

$$W=\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s}=$$

$$=\int_i^f\left(F_x\hat{i}+F_y\hat{j}+F_z\hat{k}\right)=$$

$$\int_i^f F_x d_x+\int_i^f F_y d_y+\int_i^f F_z d_z$$

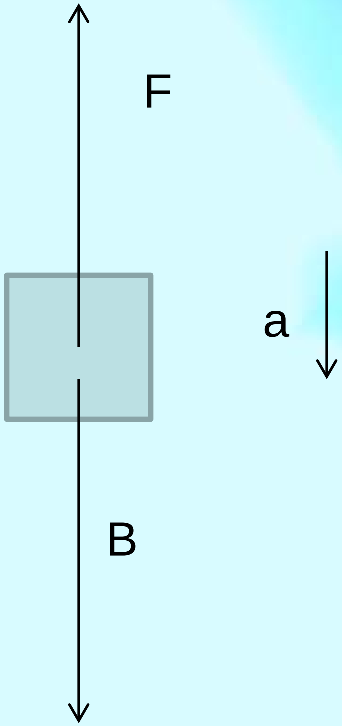
Με ένα νήμα κατεβάζουμε κατακόρυφα κύβο μάζας Μ σε απόσταση d με σταθερή προς τα κάτω επιτάχυνση g/4. Βρειτε το έργο που παράγεται από το νήμα πάνω στον κύβο

Ο κύβος κατεβαίνει με επιτάχυνση g/4

$$F - B = -M\frac{g}{4} \Rightarrow F = \frac{3Mg}{4}$$

$$W = F \cdot d \cos\pi \Rightarrow$$

$$W = -\frac{3Mgd}{4}$$



Μιά δύναμη επενεργεί σε σώμα 3kg με τέτοιο τρόπο ώστε η θέση του σώματος συναρτήσει του χρόνου να δίνεται από τη συνάρτηση: $x(t) = 3t - 4t^2 + t^3$

Υπολογίστε το έργο που παράγει αυτή η δύναμη στα πρώτα 4s

$$W = \frac{1}{2} m u^2$$

$$u = \frac{dx}{dt} = 3 - 8t + 3t^2$$

$$u(4s) = 3 - 8 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 = 19 \, {}^{m}\!/_{s^2}$$

$$W = \frac{1}{2} 3 \cdot 19^2 = 540 J$$

Αντικείμενο μάζας m=0.5Kg κινείται στο x-y επίπεδο. Η ταχύτητά του μεταβάλλεται από $υ_1$=(3m/s,-5 m/s) σε $υ_2$=(0m/s,7 m/s) . Πόσο είναι το έργο που παράγεται

Το έργο ισούται με την μεταβολή της κινητικής κατάστασης του σώματος.

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}mu_2^2 - \frac{1}{2}mu_1^2 \\ u_1 &= \sqrt{u_{1x}^2 + u_{1y}^2} \\ u_2 &= \sqrt{u_{2x}^2 + u_{2y}^2} \end{aligned}\right\}$$

W=…

Σώμα m=6Kg αρχικά ηρεμεί. Στη συνέχεια σύρεται σε λεία επιφάνεια υπό την επίδραση της σταθερής οριζόντιας δύναμης 12N. Βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν αυτό έχει διανύσει 3 μέτρα.

$$W = F \cdot S = 12 \cdot 3 = 36J$$

$$W = \frac{1}{2}mu_f^2 - \frac{1}{2}mu_i^2 = \frac{1}{2}mu_f^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u_f = 3.46m/s$$

Δεύτερος τρόπος

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow a = \frac{F}{m}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_f = u_i + at \\ S = u_i + \frac{1}{2}t^2 \end{array}\right\}$$

Απαλείφουμε το χρόνο

$$t = \frac{u_f - u_i}{a}$$

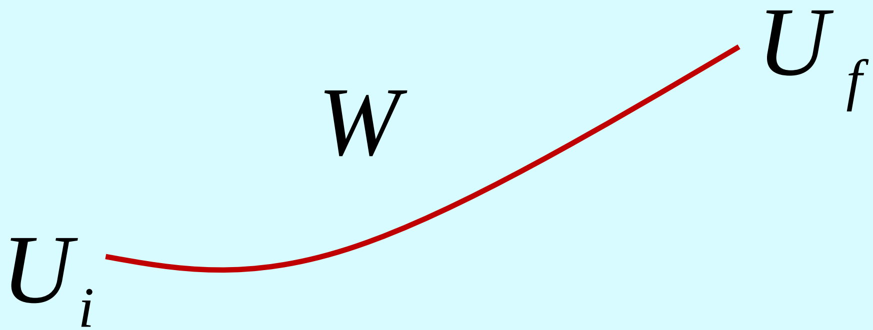
$$\left.\begin{array}{l} 2as = u_f^2 - u_i^2 \\ u_i^2 = 0 \end{array}\right\}$$

$$u_f = \sqrt{2\frac{F}{m}s} = 3.46 \, {}^{m}\!/\!{}_{s}$$

$$W = F \cdot S = ma \cdot S = m\frac{(\mathrm{u}_f^2 - \mathrm{u}_i^2)}{2} = \ldots$$

Δυναμική ενέργεια

Κάθε σώμα στο οποίο δρα μια διατηρητική δύναμη και βρίσκεται σε μια θέση (x,y,z) έχει δυναμική ενέργεια U(x,y,z) η οποία ισούται με το αντίθετο του έργου που απαιτείται για τη μεταφορά του από κάποιο σημείο αναφοράς στη θέση που βρίσκεται



$$U_i - U_f = W$$

$$\Delta U = U_f - U_i \quad \Rightarrow \quad W = -\Delta U$$

Όμως: W=ΔΚ $\Rightarrow$ ΔΚ=-ΔU $\Rightarrow$ ΔΚ+ΔU=0 $\Rightarrow$

Δ(K+U)=0 $\Rightarrow$ ΔΕ=0 **Διατήρηση μηχανικής ενέργειας**

Διατήρηση μηχανικής ενέργειας

Αν πάνω σε ένα σώμα δρουν διατηρητικές δυνάμεις $\Delta \mathrm{E} = 0$

$$\mathrm{K}_{\iota} + \Sigma U_{i} = \mathrm{K}_{f} + \Sigma U_{f}$$

Αν επενεργούν και μη διατηρητικές δυνάμεις (η τριβή):

$$W = W_{\delta} + W_{\mu} = \Delta \mathrm{K}$$

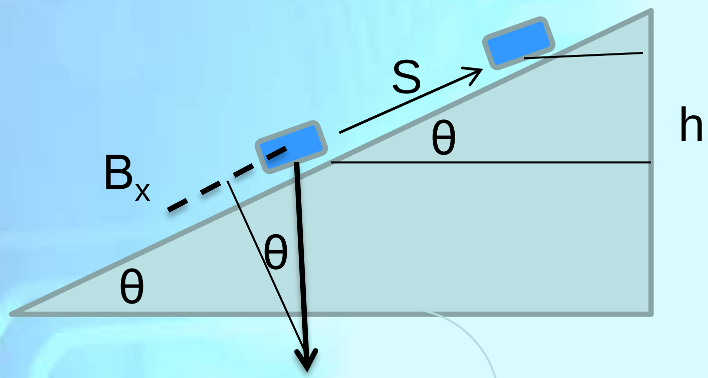
Έστω
W_{δ}=έργο των διατηρητικών δυνάμεων
W_{μ} =έργο των μη διατηρητικών δυνάμεων

$$W_{\delta} = -\Delta U$$

$$W_{\mu} = \Delta \mathrm{K} + \Delta U = \Delta E$$

Το έργο των μη-διατηρητικών δυνάμεων ισούται με τη μεταβολή της ολικής μηχανικής ενέργειας

Το έργο της βαρυτικής δύναμης:



$$B_x = B\sin\theta$$

$$\left.\begin{aligned} W &= -B_\chi \cdot S = -B\sin\theta \cdot S \\ \sin\theta &= \frac{h}{S} \end{aligned}\right\} W = -Bh = -mgh$$

Μεθοδολογία

- Συνήθως ορίζουμε ως θέση αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας την αρχική ή την τελική θέση του σώματος
- Συνήθως ορίζουμε ως θέση αναφοράς για την δυναμική ενέργεια ελατηρίου το σημείο μηδενικής παραμόρφωσης του ελατηρίου
- **Εξετάζουμε αν υπάρχουν τριβές**

Εάν ΔΕΝ υπάρχουν τριβές:

$$\mathrm{E}_{\iota} = \mathrm{E}_{f} \Rightarrow$$

$$E_i^k + E_i^k = E_f^k + E_f^{\delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_i^k + \mathrm{E}_i^{\delta,\beta\alpha\rho.} + \mathrm{E}_i^{\delta,\varepsilon\lambda\alpha\tau.} = E_f^k + \mathrm{E}_f^{\delta,\beta\alpha\rho.} + \mathrm{E}_f^{\delta,\varepsilon\lambda\alpha\tau.}$$

Εάν υπάρχουν τριβές:

$$\mathrm{E}_{f\acute{\eta}} - \mathrm{E}_{\iota} = W_{\tau\rho\iota\beta\ \varsigma}$$

$$\left(E_f^k \underset{\acute{\eta}}{+} E_f^{\delta}\right) + \left(E_f^k + E_f^{\delta}\right) = W_{\tau\rho\iota\beta\ \varsigma}$$

Απο τι ύψος πρέπει να πέσει αυτοκίνητο για να αποκτήσει κινητική ενεργεια ίση με εκείνη που θα είχε αν έτρεχε με ταχύτητα 89 Km/h

Η κινητική του ενεργεια ειναι ίση με το έργο του βάρους αν πεσει απο ύψος h

$$\frac{1}{2}mu^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{u^2}{2g}$$

$$u = 89Km/h = 25m/s$$

$$h = \frac{u^2}{2g} = 31m$$

1200m^3 νερού πέφτει κάθε δευτερόλεπτο από καταρράκτη ύψους 100m . Υποθέστε ότι τα τρία τέταρτα της κινητικής ενέργειας μετατρέπεται σε ηλεκτρικη από υδροηλέκτρική γεννήτρια ποιά ε.ιναι η ισχύς που παρέχει η γεννήτρια

Η κινητική ενέργεια του νερού είναι ίση με το έργο του βάρους

$$\mathrm{E}_{\kappa} = mgh = V\rho gh$$

$$P = \frac{0.75E_k}{t} = \frac{0.75V\rho h}{t} = 880\mathrm{M}W$$

Όπου ρ=1000kg/m^3 η πυκνότητα του νερού

Στους καταρράκτες του Νιαγάρα κέθε δευτερόλεπτο πέφτουν 10^6Kg νερού από ύψος 50m Πόση δυναμική ενέργεια χάνεται κάθε δευτερόλεπτο από το νερό που πέφτει;Πόση θα ήταν η παραγόμενη ισχύς αν όλη η δυναμική ενεργεια μετατραπόταν σε ηλεκτρικη; Πόσες κιλοβατωρες ενέργειας θα μπορούσαν να παραχτουν κάθε χρόνο;

Η δυναμική ενέργεια που χάνεται κάθε δευτερόλεπτο:

$$U = mgh = 10^6 Kg \times 9.81 m/s^2 \times 50m = 4.9\times 10^8 J$$

η παραγόμενη ισχύς αν όλη η δυναμική ενεργεια μετατρεπόταν σε ηλεκτρικη:

$$P = \frac{U}{t} = \frac{4.9\times 10^8 J}{1s} = 4.9\times 10^8 W = 490 MW$$

Η ενέργεια σε έναν χρόνο θα ήταν

$$W = P\cdot t = 490\times 10^6 W \cdot 365 \cdot 24h =$$

$$4.3\times 10^{12} W =$$

$$= 4{,}3\times 10^9 KWh$$

Αν το μέτρο της ελκτικης δυναμης μεταξύ ενος σωματιδιου μαζας m1 και ενός αλλου μαζαςm2 δίδεταιl από τη σχεση

$$F = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{x^2}$$

Να βρεθει η συναρτηση της δυναμικης ενεργειας και το έργο που απαιτειται για να αλλαξει η αποσταση χ μεταξυ των δυο σωματιδιων απο χ=χ1 σε χ=χ2+d

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x d_x = -\Delta U = U_i - U_f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_f = -\int_{x_i}^{x_f} F_x d_x + U_i$$

$$\Rightarrow U(x) = -\int_{x0}^{x} k \frac{m_1 m_2}{x^2} dx + U(x_0)$$

Θεωρουμε οτι $x_0 = \infty \quad U(x_0) = 0$

$$\Rightarrow U(x) = -k m_1 m_2 \int_{\infty}^{x} \frac{1}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow U(x) = -\frac{k m_1 m_2}{x}$$

Βλημα 10Kg ρίχνεται κατευθείαν προς τα επάνω με αρχικη ταχύτητα 500m/s
Πόση είναι η δυναμική του εν’εργεια στο μέγιστο ύψος της τροχιάς;

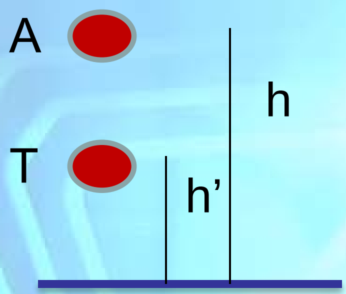
Αρχη διατηρησης της μηχανικής ενέργειας $$\frac{1}{2}mu^2 + U(x) = \frac{1}{2}m{u_0}^2$$

Στο υψηλότερο σημείο η ταχύτητα ειναι μηδενική . Αρα:

$$U(x) = \frac{1}{2}m{u_0}^2 = 1.3 \times 10^6\,J$$

Εφαρμογές

Μπάλα πέφτει από ύψος h πάνω από το έδαφος. Πόσο είναι το μέτρο της ταχύτητάς της όταν βρίσκεται σε ύψος h’ πάνω από το έδαφος ;



$$K_A = 0$$
$$U_A = mgh$$

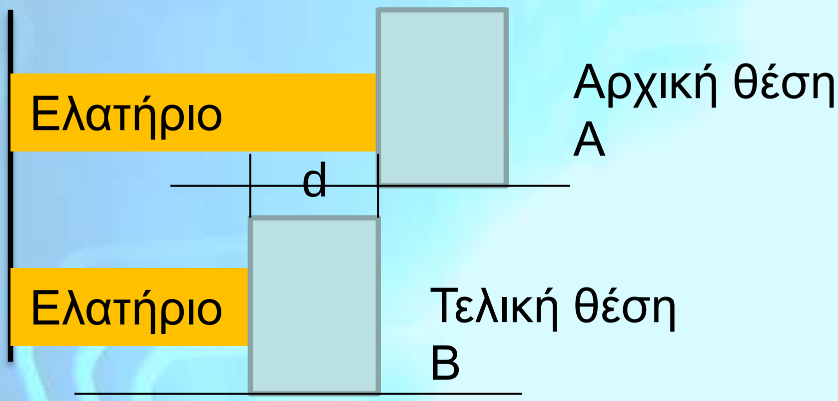
$$K_T = \frac{1}{2} m u^2$$
$$U_T = mgh'$$

Θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν τριβές:

$$E_A = E_T \Rightarrow$$
$$K_A + U_A = K_T + U_T$$

$$mgh = \frac{1}{2} m u^2 + mgh' \Rightarrow u = \ldots$$

Κύβος γνωστής μάζας προσκρούει με ταχύτητα $υ_0$ σε οριζόντιο αβαρές ελατήριο γνωστής σταθεράς. Ο κύβος συμπιέζει το ελατήριο κατά d από τη θέση ισορροπίας του. Πόση είναι η ταχύτητα του κύβου τη στιγμή της σύγκρουσης; Δίδεται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης.



Υπάρχει τριβή άρα:

$ΔE=W_T$

$$E_{τελικο}-E_{αρχικο}=W_T$$

$$E_{τελικο}-E_{αρχικο}=W_T=T\cdot d\cdot\cos 180^0=-\mu Nd=-\mu mgd$$

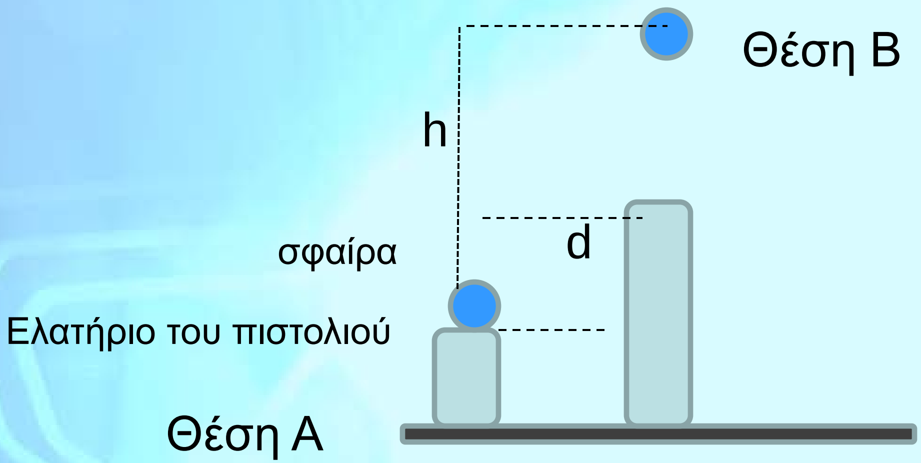
$$E_{αρχικο}=U_{ελατηρίου}+\mathrm{E}_A^{\kappa}=0+\frac{1}{2}mu_0^2$$

$$E_{τελικο}=U_{ελατηρίου}+\mathrm{E}_B^{\kappa}=\frac{1}{2}kd^2+0$$

$$E_{τελικο}-E_{αρχικο}=W_T\Rightarrow\frac{1}{2}kd^2-\frac{1}{2}mu_0{}^2=-\mu mgd$$

$$u_0=\sqrt{\frac{kd^2}{m}+2\mu gd}$$

Σφαίρα μάζας 5kg ρίχνεται κατακόρυφα προς τα επάνω από ένα πιστόλι με ελατήριο. Διαπιστώνεται ότι το ελατήριο του πιστολιού πρέπει να συμπιεστεί κατά 10cm για να φτάσει η σφαίρα στον στόχο που βρίσκεται σε ύψος 20 m πάνω από την κάνη του όπλου. Ποιά η σταθερά του ελατηρίου ;



$$E_A = E_B$$

Θέση Α

$$E_A = K_A + U_A = U_A = \frac{1}{2}kd^2$$

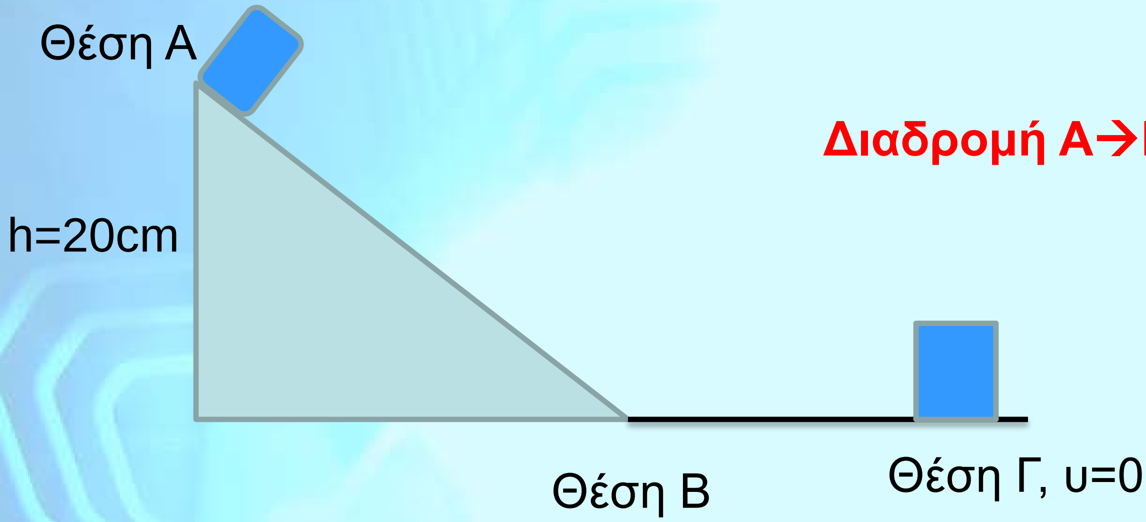
Θέση Β

$$E_B = K_B + U_B = \frac{1}{2}mgh$$

$$\frac{1}{2}kd^2 = mgh$$

$$k = 200\frac{Kg}{s^2} = 200\frac{N}{m}$$

Σώμα αρχικά ακίνητο κατεβαίνει το λείο κεκλιμένο επίπεδο και συναντά τραχιά επιφάνεια (μ=0.21). Πόσο μακριά θα φτάσει μέχρι να σταματήσει ;



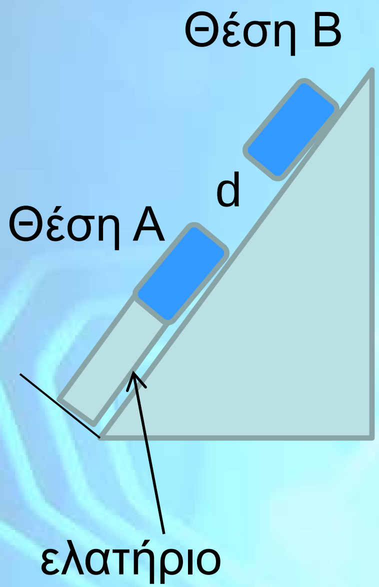
Διαδρομή Α→Β $E_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa o} = E_{\alpha\rho\chi\iota\kappa o}$

$$\mathrm{K}_{\mathrm{A}} + U_{A} = \mathrm{K}_{B} + U_{B} = 0 + mgh = \tfrac{1}{2} m u_{B}^{2} \Rightarrow u_{B} = \sqrt{2gh} = 19.8 m/s$$

Διαδρομή Β→Γ

$$E_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa o} - E_{\alpha\rho\chi\iota\kappa o} = W_{T} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m u_{B}^{2} = -TS \Rightarrow S = \frac{m u_{B}^{2}}{T} = \frac{m u_{B}^{2}}{\mu m g} = \frac{u_{B}^{2}}{\mu g}$$

Κύβος τοποθετείται σε συμπιεσμένο ελατήριο σε λείο κεκλιμένο επίπεδο. Το ελατήριο έχει σταθερά k=1960N/m και έχει συμπιεστεί κατά 20cm και αφήνεται ελεύθερο. Σε ποιά απόσταση d θα φτάσει το σώμα πριν σταματήσει ;



Οριζουμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας τη θέση Α

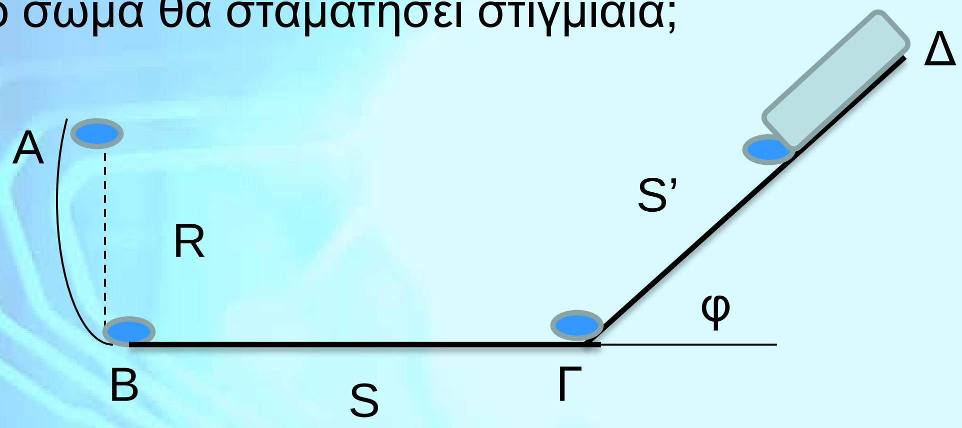
$$E_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa o} = E_{\alpha\rho\chi\iota\kappa o}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{A}} = U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\eta\rho\iota o\upsilon} + U_{B\alpha\rho\upsilon\tau\iota\kappa\acute{\eta}} + \mathrm{K}_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}kl^2 + 0 + 0$$

$$\mathrm{E}_{B} = U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\eta\rho\iota o\upsilon} + U_{B\alpha\rho\upsilon\tau\iota\kappa\acute{\eta}} + \mathrm{K}_{B} = 0 + mgh + 0 = mgd\sin\phi$$

$$\frac{1}{2}kl^2 = mgd\sin\phi \Rightarrow d = \ldots$$

Έστω λειο τεταρτοκύκλιο ΑΒ ακτίνας R=2m. Στό κάτω άκρο του εφάπτεται σε τραχύ οριζόντιο επίπεδο (μ=0.1). Σώμα μάζας m=2Kg αφήνεται να γλυστρήσει από το σημείο Α και φού διανύσει διάστημα ΒΓ=2m συναντά λείο κεκλιμένο επίπεδο με κλίση φ=30^o στην κορυφή του οποίου υπάρχει ελατήριο (k=1000N/m). Το σώμα συμπιέζει το ελατήριο κατά χ=0.2m. Ποιά η ταχύτητα του σώματος όταν συναντά το κεκλιμένο επίπεδο; . Ποιά η απόσταση S’ πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο στην οποία το σώμα θα σταματήσει στιγμιαία;



$$\mathrm{E}_{\Gamma} - \mathrm{E}_{\mathrm{A}} = W_T \Rightarrow \frac{1}{2} m u_{\Gamma}^2 - mgR = -TS \Rightarrow u_{\Gamma} = \ldots$$

$$\mathrm{E}_{\Delta} = \mathrm{E}_{\Gamma} \Rightarrow \frac{1}{2} m u_{\Gamma}^2 = \frac{1}{2} k x^2 + mgS' \sin\phi \Rightarrow S' = \ldots$$