ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ-ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ

ΦΥΣΙΚΗ
(ΜΗΧΑΝΙΚΗ-ΚΥΜΑΤΙΚΗ)

ΤΜΗΜΑ Α.2

ΚΑΘΗΓ. ΖΑΧΑΡΙΑΔΟΥ ΚΑΤΕΡΙΝΑ

ΓΡΑΦΕΙΟ ΖΒ114 (ΡΑΓΚΟΥΣΗ-ΖΑΧΑΡΙΑΔΟΥ)

E-mail: zacharia@uniwa.gr

Βιβλιογραφία

SERWAY, PHYSICS FOR SCIENTISTS AND ENGINEERS

YOUNG H.D., UNIVERSITY PHYSICS,
BERKELEY PHYSICS COURSE

ΟΡΜΗ

Η δύναμη και η επιτάχυνση συνδέονται μέσω του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα.

Όταν η δύναμη και η επιτάχυνση μεταβάλλονται ως προς τον χρόνο, η κατάσταση μπορεί να γίνει πολύ πολύπλοκη.

Τεχνικές : δίνουν τη δυνατότητα να κατανοείτε και να αναλύετε τέτοιες καταστάσεις με απλό τρόπο.

Ορμή

Ορμή : γινόμενο της μάζας και της ταχύτητας: $$\vec{\mathbf{p}} \equiv m\vec{\mathbf{v}}$$

διανυσματικό μέγεθος.

Έχει κατεύθυνση ίδια με την κατεύθυνση της ταχύτητας

$$p_x = mv_x \quad p_y = mv_y \quad p_z = mv_z$$

Ορμή

- Η ορμή
- κινητική ενέργεια
- Εξαρτώνται από τη <u>μάζα</u> και την <u>ταχύτητα.</u>
- Βασικές διαφορές:
  - Η κινητική ενέργεια → <u>βαθμωτό μέγεθος,</u>
    Η ορμή → <u>διανυσματικό μέγεθος</u>
  - Η κινητική ενέργεια μπορεί να μετατραπεί σε άλλους τύπους ενέργειας
  - μόνο ένας τύπος ορμής ➔ δεν μπορούν να γίνουν παρόμοιες μετατροπές.

Ορμή

δεύτερος νόμος του Νεύτωνα :

$$\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} = m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{\mathbf{v}}\right)}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σωματιδίου ισούται με τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο.

Ο Νεύτωνας παρουσίασε τον δεύτερο νόμο στην παραπάνω μορφή.
Η πιο γενική μορφή του νόμου του Νεύτωνα.
Μπορει να χρησιμοποιηθεί και σε περιπτώσεις όπου **η μάζα μεταβάλλεται**

Διατήρηση της Ορμής

Όταν δύο η περισσότερα σωματίδια **<u>σε ένα απομονωμένο σύστημα</u>** αλληλεπιδρούν, η συνολική ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.

$$\Sigma \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} = m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{\mathbf{v}}\right)}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow P_i = P_f$$

Η ορμή του συστήματος διατηρείται, αλλά όχι απαραίτητα και η ορμή ενός μεμονωμένου σωματιδίου.

Ορμή

$$P_i = P_f$$

$\vec{p}_{συνολική} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 =$ σταθερή

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

Η συνολική ορμή διατηρείται ανεξάρτητα σε κάθε κατεύθυνση:

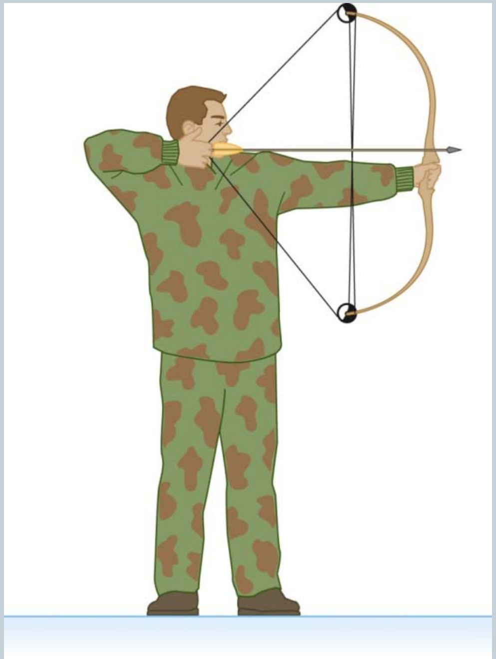
$$\boldsymbol{p_{1ix} + p_{2ix} = p_{1fx} + p_{2fx}}$$

$$\boldsymbol{p_{1iy} + p_{2iy} = p_{1fy} + p_{2fy}}$$

$$\boldsymbol{p_{1iz} + p_{2iz} = p_{1fz} + p_{2fz}}$$

Το παράδειγμα του τοξότη

- Ο τοξότης στέκεται επάνω σε μια επιφάνεια χωρίς τριβές (πάγος) =➔ <u>Εξωτερικές δυνάμεις κατά τον άξονα x ΕΙΝΑΙ ΜΗΔΕΝ</u>
- Προσεγγίσεις επίλυσης:
  - Κίνηση – όχι
    - Δεν έχουμε πληροφορίες για τις ταχύτητες, κ.λπ.
  - Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα – όχι
    - Δεν έχουμε πληροφορίες για τη δύναμη F ή την επιτάχυνση a.
  - Ενέργεια – όχι
    - Δεν έχουμε πληροφορίες για το έργο ή την ενέργεια.
  - **Ορμή – ναι**



Το παράδειγμα του τοξότη

- Έστω ότι το σύστημα αποτελείται από
  τον τοξότη με το τόξο **(σωματίδιο 1)**
  το βέλος **(σωματίδιο 2).**

ΠΡΙΝ εκτοξευτεί το βέλος: ΟΡΜΗ=Ο

ΜΕΤΑ: $$\vec{\mathbf{p}}_{1f} + \vec{\mathbf{p}}_{2f} = 0 \rightarrow m_1 \vec{\mathbf{v}}_{1f} + m_2 \vec{\mathbf{v}}_{2f}$$

Η τελική ταχύτητα του τοξότη έχει αρνητικό πρόσημο

Η κατεύθυνση της κίνησης του τοξότη είναι αντίθετη από αυτή της κίνησης του βέλους

Ο τοξότης έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα από το βέλος, άρα η ταχύτητά του είναι πολύ πιο μικρή.

Ώθηση και Ορμή

- Αν σε ένα σύστημα ασκείται μια συνισταμένη δύναμη από το περιβάλλον, τότε η ορμή του συστήματος μεταβάλλεται.

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

- μεταβολή της ορμής για το χρονικό διάστημα: $\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\mathbf{F}} dt = \vec{\mathbf{I}}$

- Το ολοκλήρωμα είναι η *ώθηση* της δύναμης που ασκείται στο σώμα κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος Δ*t.*

Θεώρημα ώθησης-ορμής

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\mathbf{F}} dt = \vec{\mathbf{I}}$$

Για μη απομονωμένου ως προς την ορμή συστήματος.

- **θεώρημα ώθησης-ορμής**: $\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{I}}$

Η μεταβολή της ορμής ενός σωματιδίου ισούται με την ώθηση που προσδίδει στο σωματίδιο η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε αυτό.

  - **ισοδύναμη με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα**
  - **ίδια μορφή με την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας.**

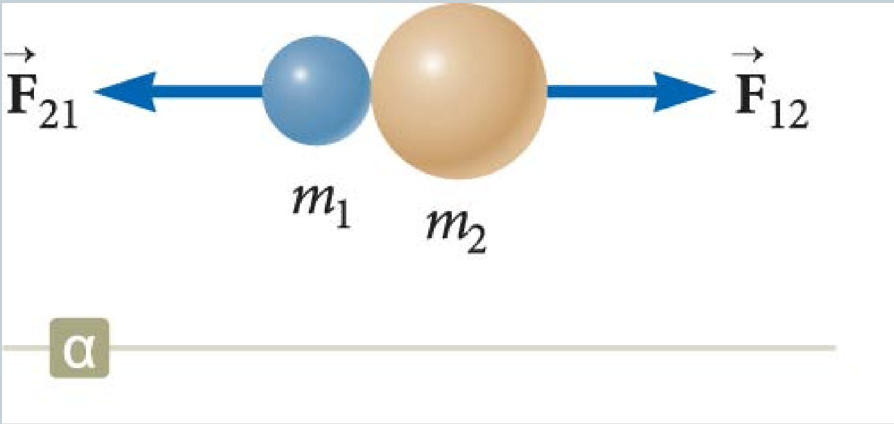
Κρούσεις – Χαρακτηριστικά

- **κρούση** περιγράφει ένα γεγονός κατά τη διάρκεια του οποίου δύο σωματίδια πλησιάζουν μεταξύ τους και αλληλεπιδρούν μέσω δυνάμεων.
  - Μπορεί να υπάρχει φυσική επαφή μεταξύ των σωματιδίων, αλλά η έννοια περιλαμβάνει και περιπτώσεις κατά τις οποίες έχουμε αλληλεπίδραση χωρίς φυσική επαφή.
- Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης θεωρούνται πολύ μεγαλύτερες από τις υπόλοιπες εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται.
  - Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση της ώθησης.

Κρούσεις – Παράδειγμα 1

- Μια κρούση μπορεί να είναι αποτέλεσμα άμεσης επαφής.

- Η δύναμη ώθησης μπορεί να μεταβάλλεται ως προς τον χρόνο με πολύπλοκο τρόπο.
  - Είναι εσωτερική δύναμη του συστήματος.
- **Η ορμή διατηρείται.**



Είδη κρούσεων

- **ελαστικές** κρούσεις : η ορμή και η κινητική ενέργεια διατηρούνται.

- **ανελαστικές** κρούσεις: η ορμή διατηρείται, αλλά όχι και η κινητική ενέργεια.

τα σώματα δεν δημιουργούν συσσωμάτωμα.

- **απολύτως ανελαστικές** ή **πλαστικές**

Όταν τα σώματα δημιου γούν συσσωμάτωμα μετά την κρούση

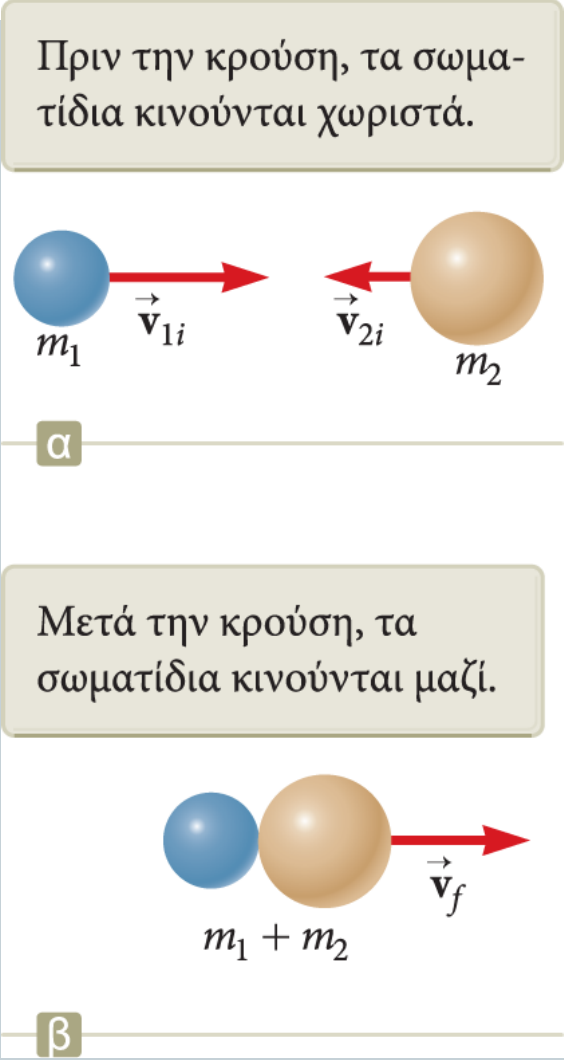
Η ορμή διατηρείται σε όλες τις κρούσεις

Πλαστικές κρούσεις

- η συνολική ορμή πριν την κρούση ισούται με τη συνολική ορμή του συσσωματώματος μετά την κρούση.

Επειδή τα σώματα δημιουργούν συσσωμάτωμα, κινούνται με την ίδια ταχύτητα μετά την κρούση.

$$m_1\vec{\mathbf{v}}_{1i} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{\mathbf{v}}_f$$



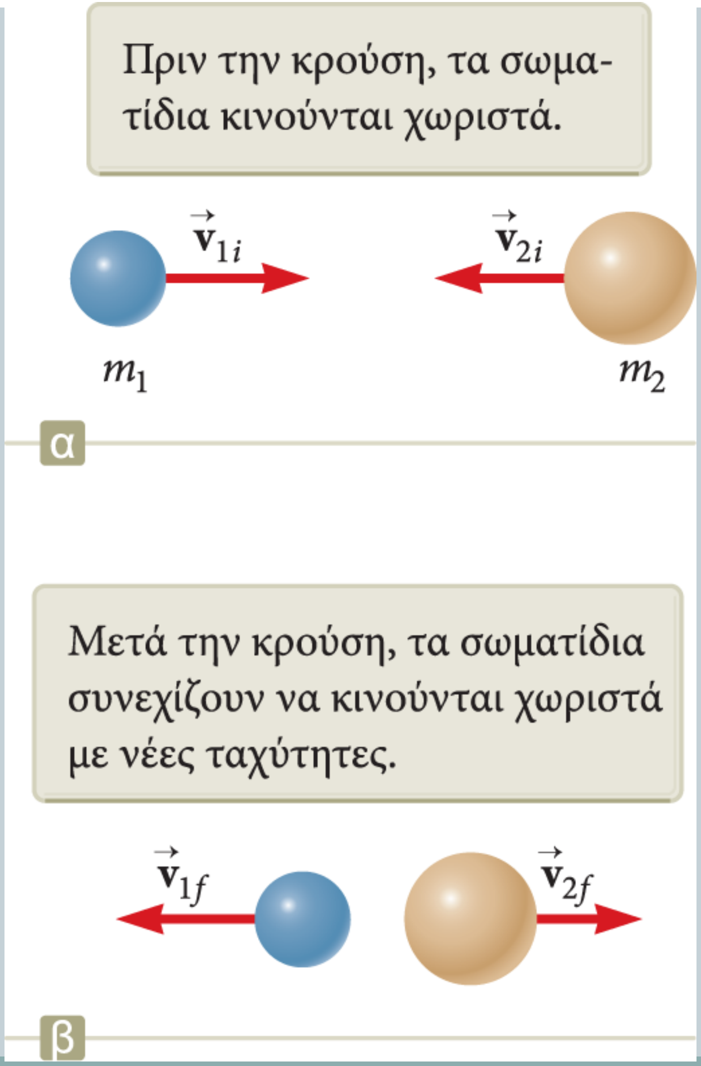
Ελαστικές κρούσεις

- Η ορμή και η κινητική ενέργεια διατηρούνται.

$$m_1\vec{\mathbf{v}}_{1i} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2i} = m_1\vec{\mathbf{v}}_{1f} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2f}$$

$$\frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_{2f}^2$$

- Συνήθως υπάρχουν δύο άγνωστες μεταβλητές, οπότε χρειαζόμαστε δύο εξισώσεις.



Ελαστικές κρούσεις (*συνέχεια*)

- Μετατρέπουμε την εξίσωση της κινητικής ενέργειας :

$$v_{1i} - v_{2i} = v_{1f} + v_{2f}$$

- Λύνοντας το σύστημα που αποτελείται από την παραπάνω εξίσωση και την εξίσωση διατήρησης της ορμής μπορούμε να προσδιορίσουμε τις δύο άγνωστες μεταβλητές.

- **Προσοχή πρέπει να χρησιμοποιούνται τα κατάλληλα πρόσημα_σε όλες τις ταχύτητες.**

Ελαστικές κρούσεις

- ειδικές περιπτώσεις:
  - $Αν\ m_1 = m_2$ τα σωματίδια ανταλλάσσουν ταχύτητες
  - Όταν ένα πολύ βαρύ σωματίδιο συγκρούεται μετωπικά με ένα πολύ ελαφρό σωματίδιο που είναι αρχικά ακίνητο

    το βαρύ συνεχίζει την κίνησή του χωρίς μεταβολές,

    το ελαφρύ αναπηδάει με ταχύτητα περίπου διπλάσια από την αρχική ταχύτητα που είχε το βαρύ
  - Όταν ένα πολύ ελαφρύ σωματίδιο συγκρούεται μετωπικά με ένα πολύ βαρύ σωματίδιο που είναι αρχικά ακίνητο

  το ελαφρύ αντιστρέφει την κατεύθυνση της ταχύτητάς του

  το βαρύ παραμένει σχεδόν ακίνητο.

Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων: Κρούσεις σε μία διάσταση

Σχεδιάστε τα σωματίδια πριν και μετά την κρούση.
Ορίστε ποιά κατεύθυνση θεωρείτε θετική

Είναι η κρούση ελαστική, ανελαστική, ή πλαστική;

Γράψτε την εξίσωση διατήρησης της ορμής
Αν είναι ελαστική κρούση την εξίσωση διατήρησης ενέργειας
Λύστε το σύστημα για να προσδιορίσετε το ζητούμενο μέγεθος
Ελέγξτε αν τα αποτελέσματά σας είναι ρεαλιστικά.

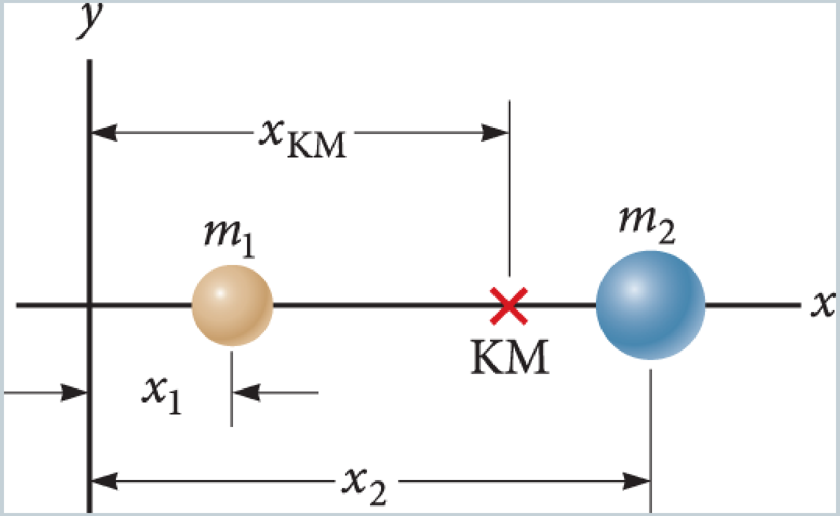
Κέντρο μάζας, συντεταγμένες

Κέντρο μάζας-συντεταγμένες

Συντεταγμένες του κέντρου μάζας

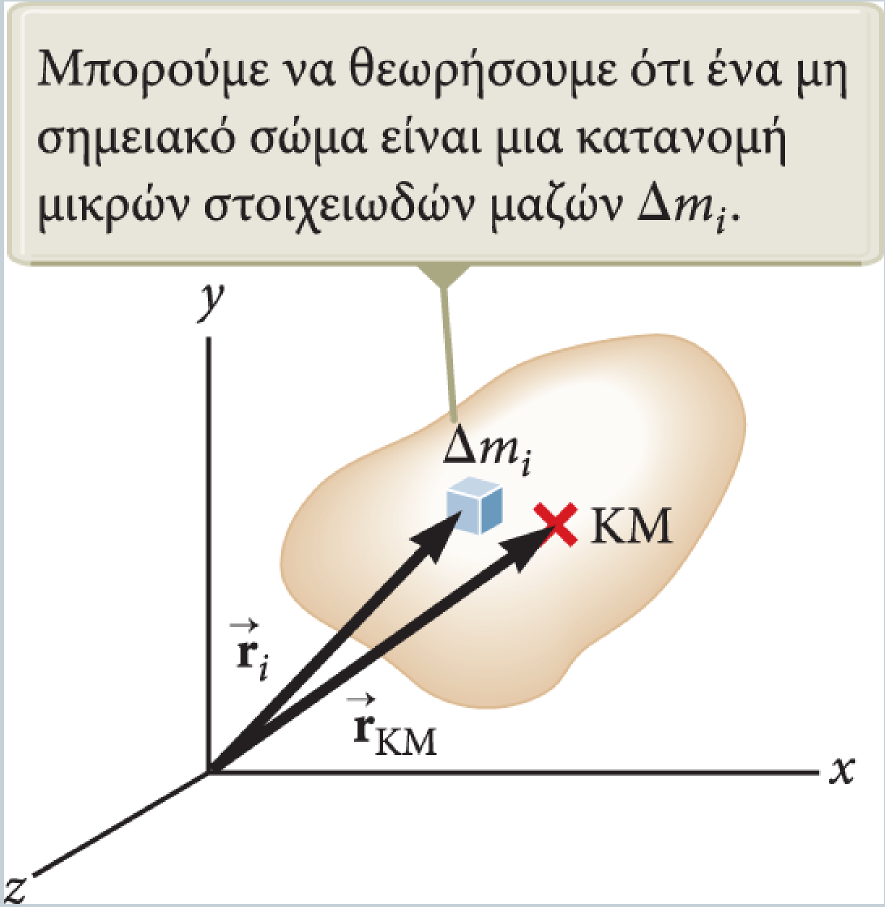
$$x_{\text{KM}} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} \qquad y_{\text{KM}} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M}$$

$$z_{\text{KM}} = \frac{\sum_i m_i z_i}{M}$$



Το M είναι η συνολική μάζα του συστήματος.

Μη σημειακό σώμα



μη σημειακό σώμα: σύστημα με ένα μεγάλο πλήθος από στοιχεία μικρής μάζας.

- Σε τρεις διαστάσεις: διάνυσμα θέσης κέντρου μάζας
  - Για σύστημα σωματιδίων

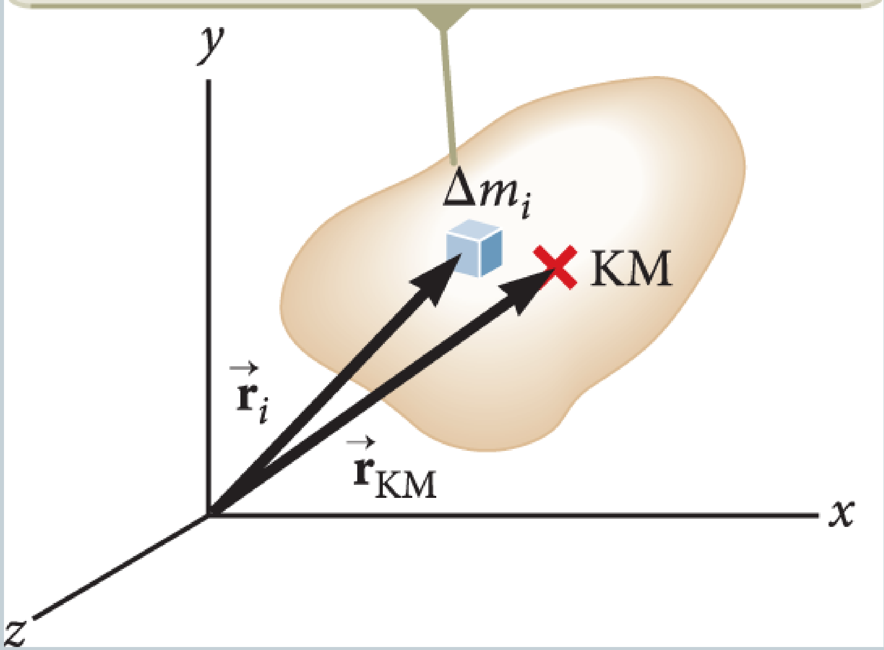
$$\vec{\mathbf{r}}_{KM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i$$

$$\mathbf{r}_i = x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}} + z_i\hat{\mathbf{k}}$$

  - Για μη σημειακό σώμα

$$\vec{\mathbf{r}}_{KM} = \frac{1}{M}\int \vec{\mathbf{r}}\, dm$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα μη σημειακό σώμα είναι μια κατανομή μικρών στοιχειωδών μαζών Δm_i.



Κέντρο βάρους

- Η βαρυτική δύναμη δρα σε κάθε μικρό στοιχείο μάζας ενός μη σημειακού αντικειμένου.

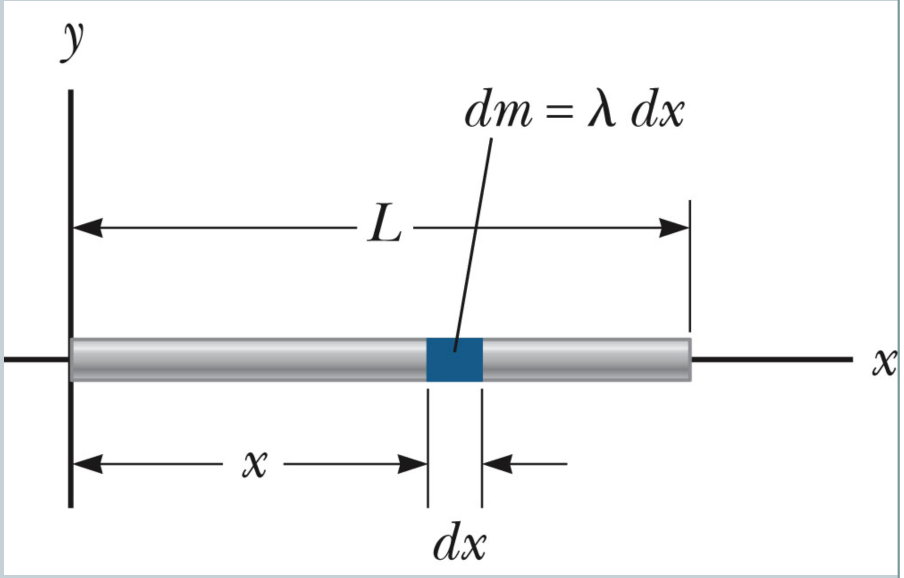
- Η συνολική επίδραση όλων αυτών των δυνάμεων είναι ισοδύναμη με την επίδραση μίας δύναμης που δρα πάνω σε ένα ειδικό σημείο, το οποίο ονομάζεται **κέντρο βάρους**.
- Αν η επιτάχυνση είναι σταθερή σε όλη την κατανομή μάζας, το κέντρο βάρους συμπίπτει με το κέντρο μάζας.

Κέντρο μάζας, συμμετρικό σώμα

- Το κέντρο μάζας οποιουδήποτε ομογενούς και συμμετρικού σώματος βρίσκεται επάνω σε έναν άξονα συμμετρίας και σε οποιοδήποτε επίπεδο συμμετρίας.

Κέντρο μάζας, ράβδος

- Βρείτε το κέντρο μάζας μιας ράβδου με μάζα *M* και μήκος *L*.
- Το κέντρο μάζας βρίσκεται στον άξονα *x* (ή $y_{KM} = z_{KM} = 0$).



$$\vec{\mathbf{r}}_{KM} = \frac{1}{M}\int \vec{\mathbf{r}}\, dm$$

$$x_{km} = \frac{1}{M}\int xdm$$

$$x_{km} = \frac{1}{M}\int_0^L x\cdot\lambda dx = \frac{1}{M}\lambda\frac{L^2}{2}$$

$$x_{km} = \frac{1}{\lambda L}\lambda\frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

Πυκνότητες μάζας

Για ομογενείς κατανομές ισχύει:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV}$$

$$\lambda = \frac{m}{l} = \frac{dm}{dl}$$

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{dm}{ds}$$

Κίνηση συστήματος σωματιδίων

- Ας υποθέσουμε ότι η συνολική μάζα M του συστήματος παραμένει σταθερή.

- Μπορούμε να περιγράψουμε την **κίνηση** του συστήματος **συναρτήσει της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του.**

- Μπορούμε επίσης να περιγράψουμε **την ορμή του συστήματος εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για το σύστημα.**

Ταχύτητα και ορμή ενός συστήματος σωματιδίων

- Η ταχύτητα του κέντρου μάζας ενός συστήματος σωματιδίων είναι

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{KM}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{KM}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}_i$$

- Η ορμή μπορεί να εκφραστεί ως

$$M\,\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{KM}\sigma\upsilon\nu.} = \sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}$$

- Η συνολική ορμή του συστήματος ισούται με το γινόμενο της συνολικής μάζας επί την ταχύτητα του κέντρου μάζας.

Επιτάχυνση και δύναμη σε ένα σύστημα σωματιδίων

- Μπορούμε να βρούμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας παραγωγίζοντας την ταχύτητα ως προς τον χρόνο.

$$\vec{\mathbf{a}}_{\text{KM}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\text{KM}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\mathbf{a}}_i$$

- Η επιτάχυνση και η δύναμη συνδέονται μέσω της σχέσης

$$M\,\vec{\mathbf{a}}_{\text{KM}} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i$$

- Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σύστημα προκαλείται μόνο από εξωτερικές δυνάμεις.

- Το κέντρο μάζας ενός συστήματος σωματιδίων που έχει συνολική μάζα *M* κινείται όπως θα κινηθεί ένα ισοδύναμο σωματίδιο μάζας *M*, υπό την επίδραση της συνισταμένης εξωτερικής δύναμης που ασκείται στο σύστημα.

Περιστροφή άκαμπτου σώματος γύρω από σταθερό άξονα

Άκαμπτο σώμα

- Μπορούμε να αναλύσουμε την κίνηση ενός μη σημειακού σώματος μοντελοποιώντας το ως σύστημα πολλών σωματιδίων.
  - Η ανάλυση απλοποιείται αν υποθέσουμε ότι το σώμα είναι **άκαμπτο**.
- Ένα άκαμπτο σώμα δεν είναι παραμορφώσιμο.
  - Οι σχετικές θέσεις όλων των σωματιδίων που αποτελούν το σώμα παραμένουν σταθερές.
  - Όλα τα πραγματικά σώματα παραμορφώνονται σε κάποιο βαθμό, αλλά το μοντέλο του άκαμπτου σώματος είναι χρήσιμο σε πολλές περιπτώσεις όπου η παραμόρφωση είναι αμελητέα.

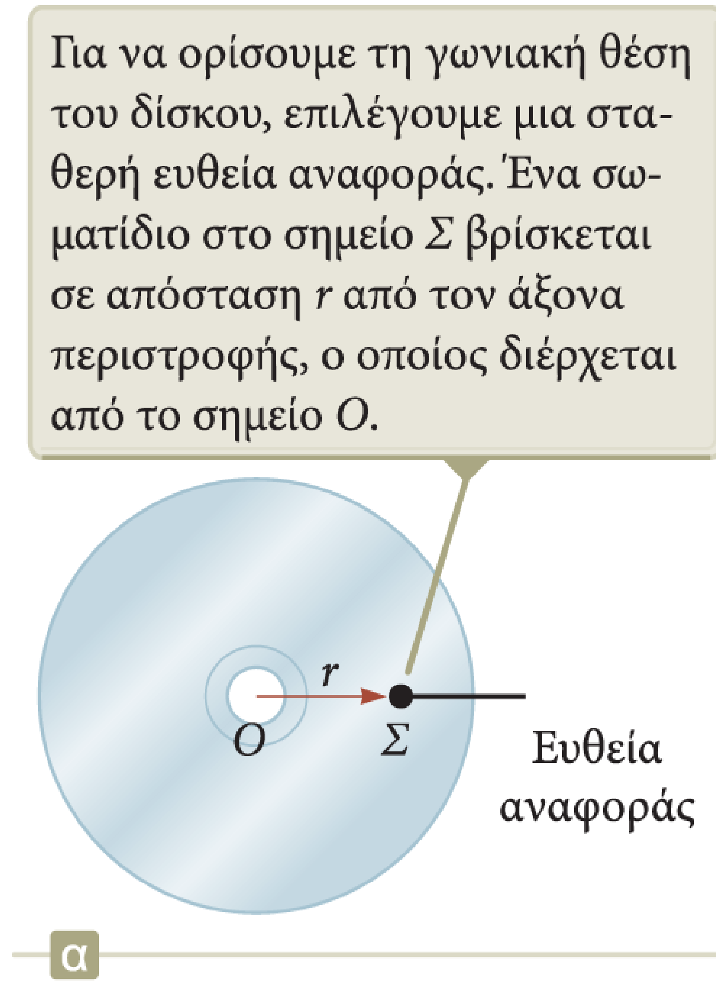
Γωνιακή θέση

- Ο άξονας περιστροφής είναι το κέντρο του δίσκου.
- Επιλέγουμε μια σταθερή ευθεία αναφοράς.

- Το σημείο *Σ* βρίσκεται σε σταθερή απόσταση *r* από την αρχή των συντεταγμένων.

- Το *Σ* έχει συντεταγμένες (*r*, *θ*), όπου *r* είναι η απόσταση του *Σ* από την αρχή των αξόνων

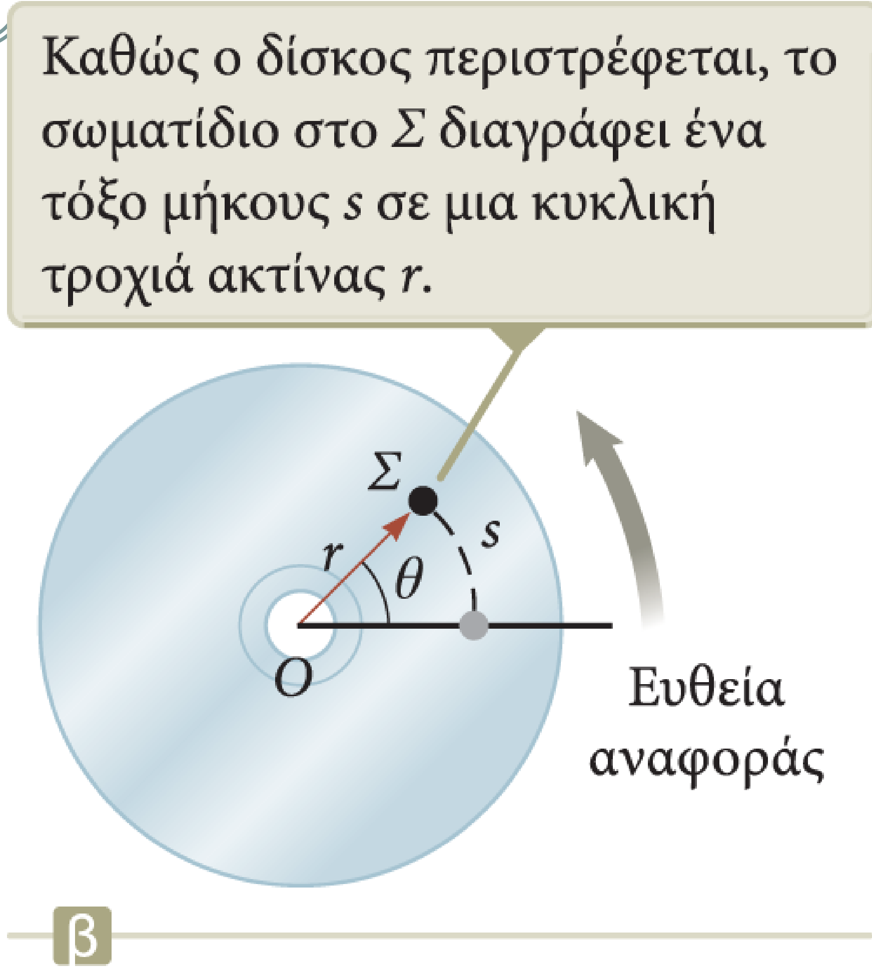
- γωνία *θ* μετριέται αριστερόστροφα από μια ευθεία αναφοράς σταθερή στον χώρο.



Γωνιακή θέση (*συνέχεια*)

- Καθώς το σωματίδιο κινείται, μεταβάλλεται μόνο η συντεταγμένη θ.
- Καθώς το σωματίδιο κινείται κυκλικά σαρώνοντας γωνία θ, διαγράφει τόξο μήκους s.
- Το μήκος του τόξου και η απόσταση r συνδέονται μέσω της σχέσης

$$s = \theta r$$



Ακτίνιο(rad)

- Η σχέση αυτή μπορεί να γραφτεί ως:

$$\theta = \frac{s}{r}$$

- Η γωνία θ είναι αδιάστατος αριθμός, αλλά συνηθίζουμε να τη μετράμε σε ακτίνια.

- Το ένα ακτίνιο είναι η επίκεντρος γωνία που αντιστοιχεί σε ένα τόξο κύκλου το οποίο έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου.

- Στις εξισώσεις της περιστροφικής κίνησης, πρέπει να χρησιμοποιείτε γωνίες μετρημένες σε ακτίνια.

Γωνιακή θέση

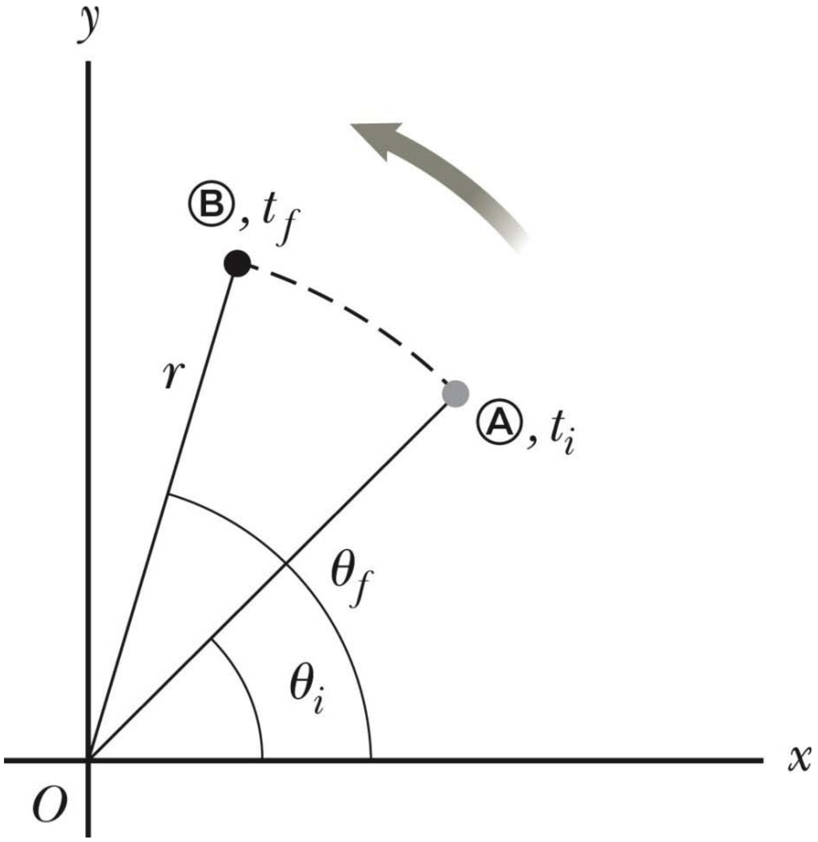
- Μπορούμε να συσχετίσουμε τη γωνία θ με ολόκληρο το άκαμπτο σώμα, αλλά και με ένα μεμονωμένο σωματίδιο.
  - κάθε σωματίδιο του σώματος διαγράφει την ίδια γωνία.

- Η **γωνιακή θέση** του άκαμπτου σώματος ορίζεται από τη γωνία θ που σχηματίζει η ευθεία αναφοράς που βρίσκεται στο σώμα με τη σταθερή ευθεία αναφοράς στον χώρο.
  - Ως σταθερή ευθεία αναφοράς στον χώρο συχνά επιλέγεται ο άξονας x.
- Η γωνία θ παίζει τον ίδιο ρόλο στην περιστροφική κίνηση όπως η θέση x στη μεταφορική κίνηση.

Γωνιακή μετατόπιση

- Η *γωνιακή μετατόπιση* ορίζεται ως η γωνία που σαρώνει το σώμα κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος.

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$



Μέση γωνιακή ταχύτητα

Το *βαθμωτό μέγεθος* *της μέσης* γωνιακής ταχύτητας $\omega_{\text{μέση}}$ ενός περιστρεφόμενου άκαμπτου σώματος ορίζεται ως ο λόγος της γωνιακής μετατόπισης προς το χρονικό διάστημα που απαιτήθηκε για να πραγματοποιηθεί.

$$\omega_{\text{μέση}} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Μέτρο γωνιακής ταχύτητας

- **Το *μέτρο της στιγμιαίας γωνιακής ταχύτητας***, ορίζεται ως το όριο του βαθμωτού μεγέθους της μέσης γωνιακής ταχύτητας καθώς το Δt τείνει στο μηδέν.

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

- Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι αντίστοιχο με το βαθμωτό μέγεθος της μεταφορικής ταχύτητας (ή μέτρο ταχύτητας).
- **μονάδες** ακτίνια/δευτερόλεπτο.

  rad/s ή s^{-1} επειδή τα ακτίνια δεν έχουν διαστάσεις

- Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι θετικό όταν η γωνία θ αυξάνεται (αριστερόστροφη περιστροφή).
- Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι αρνητικό όταν η γωνία θ μειώνεται (δεξιόστροφη περιστροφή).

Μέτρο γωνιακής επιτάχυνσης

- Το *μέτρο μέσης γωνιακής επιτάχυνσης* $\alpha_{\text{μέση}}$ ενός σώματος ορίζεται ως ο λόγος της μεταβολής του βαθμωτού μεγέθους της γωνιακής ταχύτητας προς το χρονικό διάστημα στο οποίο συμβαίνει η μεταβολή.

$$\alpha_{\text{μέση}} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

- μέτρο *της στιγμιαίας γωνιακής επιτάχυνσης,* ορίζεται ως το όριο του βαθμωτού μεγέθους της μέσης γωνιακής επιτάχυνσης καθώς το Δt τείνει στο 0.

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Μέτρο γωνιακής επιτάχυνσης

- Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης α είναι ανάλογο με το βαθμωτό μέγεθος της μεταφορικής επιτάχυνσης (ή μέτρο επιτάχυνσης).

- Οι μονάδες του α είναι τα rad/s^2 ή s^{-2} επειδή τα ακτίνια δεν έχουν διαστάσεις.

- Το α είναι θετικό όταν ένα σώμα που περιστρέφεται αριστερόστροφα επιταχύνει.

- Το α είναι επίσης θετικό όταν ένα σώμα που περιστρέφεται δεξιόστροφα επιβραδύνει.

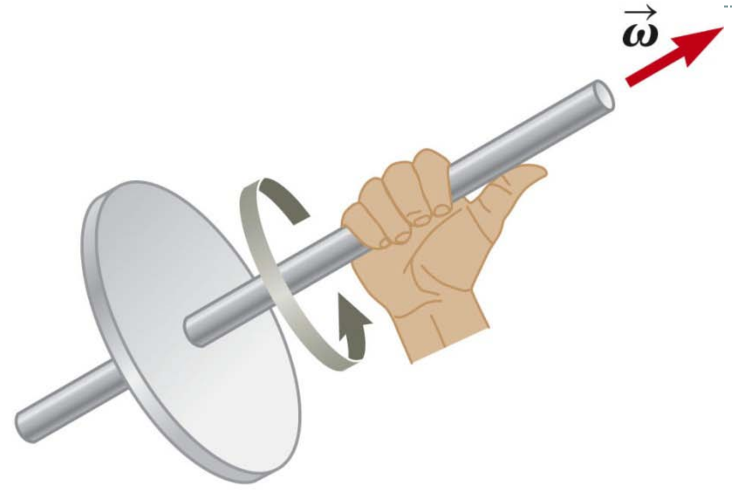
Περιστροφική κίνηση, γενικές σημειώσεις

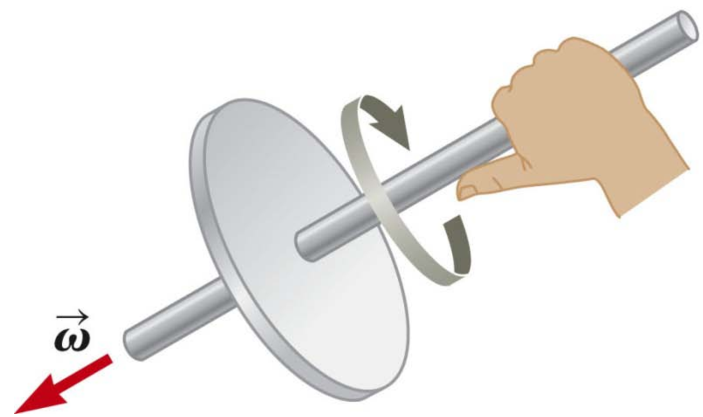
- Όταν ένα άκαμπτο σώμα περιστρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα, όλα τα σωματίδια του σώματος σαρώνουν την ίδια γωνία σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα και έχουν γωνιακή ταχύτητα ίδιου μέτρου και γωνιακή επιτάχυνση ίδιου μέτρου.

- Άρα τα μεγέθη θ, ω, και α χαρακτηρίζουν τόσο την κίνηση ολόκληρου του άκαμπτου σώματος όσο και των μεμονωμένων σωματιδίων του.

Κατευθύνσεις, λεπτομέρειες

- Όπως προαναφέραμε, τα βαθμωτά μεγέθη ω και α είναι τα μέτρα των διανυσμάτων της γωνιακής ταχύτητας και της γωνιακής επιτάχυνσης αντίστοιχα.
- Οι κατευθύνσεις αυτών των διανυσμάτων δίνονται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.





Υποδείξεις για την επίλυση προβλημάτων

- Οι τεχνικές επίλυσης προβλημάτων είναι παρόμοιες με αυτές που χρησιμοποιούνται στα προβλήματα μεταφορικής κίνησης.
- **διαφορές** που πρέπει να λάβουμε υπόψη.
  - Στην περιστροφική κίνηση, πρέπει να ορίσουμε έναν άξονα περιστροφής.
    - Η επιλογή του άξονα είναι αυθαίρετη.
    - Κατά την επίλυση του προβλήματος πρέπει να χρησιμοποιείται πάντα ο άξονας που έχει επιλεγεί.
    - Η επίλυση μερικών προβλημάτων απλοποιείται με την επιλογή ενός φυσικού άξονα.
  - Το σώμα επανέρχεται διαρκώς στον αρχικό προσανατολισμό του, οπότε μπορούμε να βρούμε τον αριθμό των περιστροφών του σώματος.

Περιστροφική κινηματική

- Για **σταθερή γωνιακή επιτάχυνση**, μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση του άκαμπτου σώματος χρησιμοποιώντας εξισώσεις της κινηματικής.
  - Οι εξισώσεις αυτές είναι παρόμοιες με τις εξισώσεις της κινηματικής για τη μεταφορική κίνηση.
  - Οι εξισώσεις της περιστροφικής κίνησης έχουν την ίδια μαθηματική μορφή με τις εξισώσεις της μεταφορικής κίνησης.

Εξισώσεις της περιστροφικής κινηματικής

- Οι εξισώσεις της κινηματικής για το άκαμπτο σώμα με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση έχουν την ίδια μαθηματική μορφή με τις εξισώσεις για το σωματίδιο με σταθερή επιτάχυνση.
- Οι αντιστοιχίες των μεταβλητών μεταξύ των εξισώσεων της μεταφορικής κίνησης και των εξισώσεων της περιστροφικής κίνησης είναι
  - $x \longrightarrow \theta$
  - $v \longrightarrow \omega$
  - $a \longrightarrow \alpha$

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\left(\theta_f - \theta_i\right)$$

$$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}\left(\omega_i + \omega_f\right)t$$

όπου η επιτάχυνση α είναι σταθερή

Σύγκριση εξισώσεων περιστροφικής και μεταφορικής κίνησης

ΠΙΝΑΚΑΣ Μ10.1 *Κινηματικές εξισώσεις για την περιστροφική και τη μεταφορική κίνηση*

Άκαμπτο σώμα που κινείται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση	Σωματίδιο που κινείται με σταθερή μεταφορική επιτάχυνση
$\omega_f = \omega_i + \alpha t$	$v_f = v_i + at$
$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$	$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$
$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$

Σχέση μεταξύ γωνιακών και γραμμικών μεγεθών

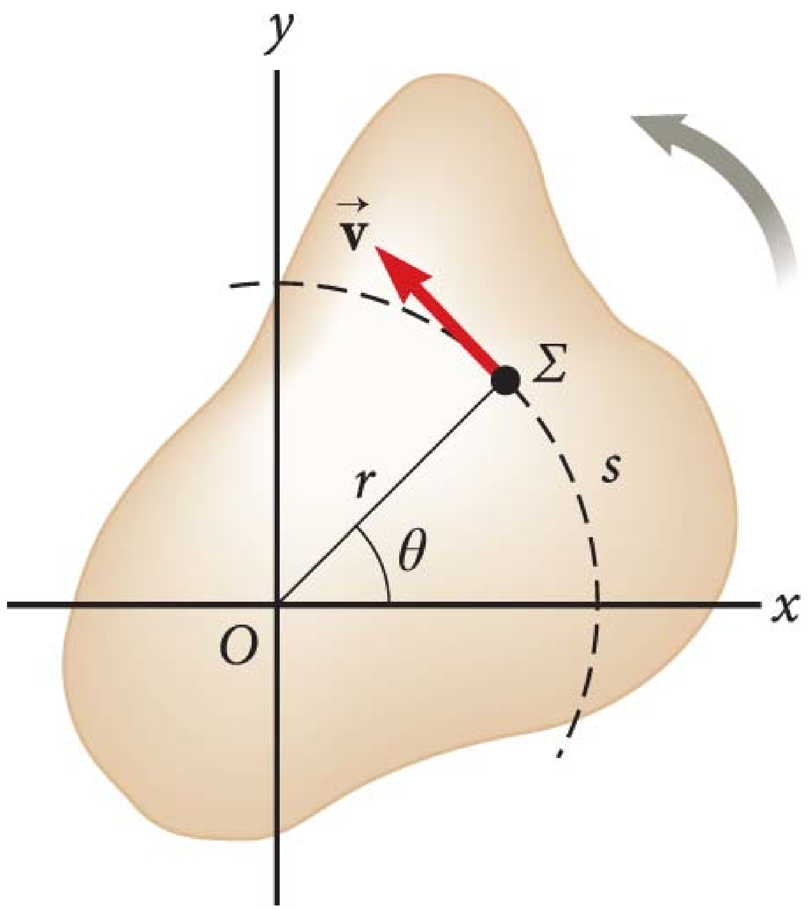
- Κάθε σημείο του περιστρεφόμενου σώματος εκτελεί την ίδια περιστροφική κίνηση, αλλά **όχι** την ίδια μεταφορική κίνηση.
- Μετατοπίσεις
  - $s = \theta r$
- Μέτρα ταχυτήτων
  - $v = \omega r$
- Μέτρα επιταχύνσεων
  - $\alpha = \alpha r$

Μέτρο ταχύτητας – Λεπτομέρειες

- Η γραμμική ταχύτητα (velocity) εφάπτεται πάντα στην κυκλική τροχιά.
  - Η ταχύτητα αυτή ονομάζεται εφαπτομενική ταχύτητα.
- Το μέτρο της εφαπτομενικής ταχύτητας είναι

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

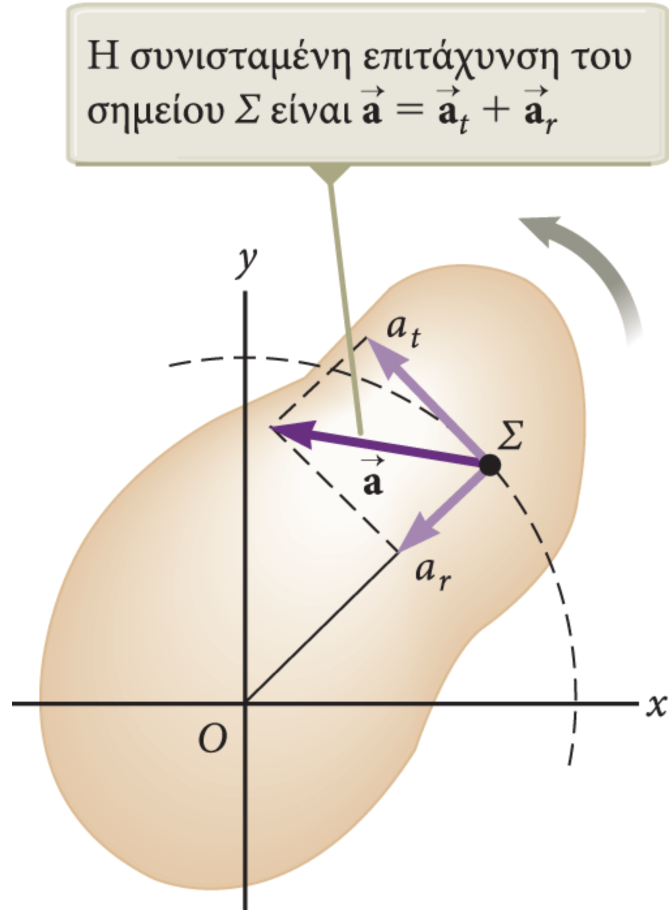
- Επειδή το *r* δεν είναι ίδιο για όλα τα σημεία του σώματος, το μέτρο της εφαπτομενικής ταχύτητας κάθε σημείου δεν είναι ίδιο.
- Το μέτρο της εφαπτομενικής ταχύτητας αυξάνεται όσο αυξάνεται η απόσταση από το κέντρο περιστροφής.



Επιτάχυνση – Λεπτομέρειες

- Η εφαπτομενική επιτάχυνση είναι η παράγωγος της εφαπτομενικής ταχύτητας.

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r$$



Μέτρο ταχύτητας και επιτάχυνση – Σημείωση

- Όλα τα σημεία του άκαμπτου σώματος έχουν γωνιακή ταχύτητα ίδιου μέτρου, αλλά όχι εφαπτομενική ταχύτητα ίδιου μέτρου.
- Όλα τα σημεία του άκαμπτου σώματος έχουν ίδια γωνιακή επιτάχυνση, αλλά όχι ίδια εφαπτομενική επιτάχυνση.
- Τα εφαπτομενικά μεγέθη εξαρτώνται από την απόσταση r, η οποία δεν είναι ίδια για όλα τα σημεία του σώματος.

Κεντρομόλος επιτάχυνση

- Ένα σώμα το οποίο διαγράφει κυκλική τροχιά με ταχύτητα σταθερού μέτρου έχει πάντοτε επιτάχυνση.

  - Επομένως, όλα τα σημεία ενός περιστρεφόμενου άκαμπτου σώματος έχουν κεντρομόλο επιτάχυνση.

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

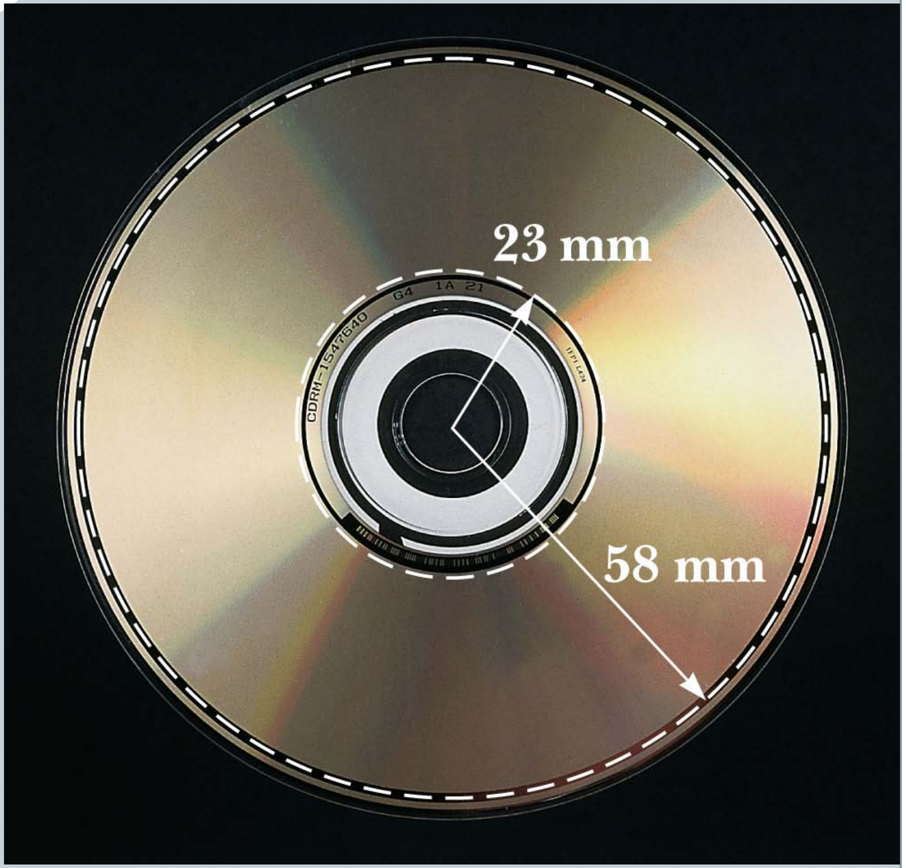
Συνολική επιτάχυνση

- Η εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης προκαλείται από τη μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας.
- Η κεντρομόλος συνιστώσα της επιτάχυνσης προκαλείται από τη μεταβολή της κατεύθυνσης.
- συνολική επιτάχυνση :

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Παράδειγμα περιστροφικής κίνησης

- Για να «διαβάσει» μια συσκευή αναπαραγωγής έναν ψηφιακό δίσκο (CD), το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου πρέπει να μεταβάλλεται έτσι ώστε το μέτρο της εφαπτομενικής ταχύτητας να παραμένει σταθερό ($v_t = \omega r$).
  - Τυπικά, το μέτρο ταχύτητας της επιφάνειας του δίσκου στο σημείο του συστήματος λέιζερ-φακού είναι 1.3 m/s.
- Στα εσωτερικά τμήματα του δίσκου, το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι μεγαλύτερο από ό,τι στα εξωτερικά.



Κινητική ενέργεια περιστροφής

- Ένα σώμα που περιστρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα με γωνιακή ταχύτητα μέτρου *ω* έχει κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής, παρά το γεγονός ότι μπορεί να μην έχει καθόλου μεταφορική κινητική ενέργεια.

- Κάθε σωματίδιο έχει κινητική ενέργεια

$$K_i = ½\, m_i v_i^2$$

- $v_i = \omega_i r$

Κινητική ενέργεια περιστροφής

- Η συνολική κινητική ενέργεια περιστροφής ενός άκαμπτου σώματος ισούται με το άθροισμα των ενεργειών όλων των σωματιδίων του.

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

$$K_R = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

- Το μέγεθος *I* ονομάζεται ροπή αδράνειας.

Κινητική ενέργεια περιστροφής (*τελική διαφάνεια*)

- Υπάρχει αντιστοιχία ανάμεσα στην κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης

$$(\boldsymbol{K} = ½\,\boldsymbol{m}\,\boldsymbol{v}^{2})$$

και στην κινητική ενέργεια λόγω περιστροφικής κίνησης

$$(\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{R}} = ½\,\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}^{2})$$

- Η κινητική ενέργεια περιστροφής δεν είναι κάποιο νέο είδος ενέργειας. Η εξίσωσή της έχει διαφορετική μορφή, επειδή η ενέργεια αυτή σχετίζεται με την περιστροφική κίνηση των σωμάτων.
- Οι μονάδες της κινητικής ενέργειας περιστροφής είναι τα joule (J).

Ροπή αδράνειας

- Η ροπή αδράνειας ορίζεται ως

$$I = \sum_i r_i^2 m_i$$

- Οι διαστάσεις της ροπής αδράνειας είναι ML^2 και η μονάδα SI είναι το $kg \cdot m^2$.

- Μπορούμε να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας ενός σώματος πιο εύκολα αν υποθέσουμε ότι αυτό αποτελείται από πολλά στοιχεία μικρής μάζας (ίσης με Δm_i).

- Η μάζα είναι εγγενής ιδιότητα ενός σώματος, αλλά η ροπή αδράνειας εξαρτάται από την επιλογή του άξονα περιστροφής.

Ροπή αδράνειας

- Η ροπή αδράνειας ορίζεται ως

$$I = \sum_i r_i^2 m_i$$

Η ροπή αδράνειας ενός σώματος είναι ένα μέτρο της τάσης που έχει το σώμα να αντιστέκεται στις μεταβολές της περιστροφικής κίνησής του, ακριβώς όπως η μάζα ενός σώματος είναι ένα μέτρο της τάσης που έχει το σώμα να αντιστέκεται στις μεταβολές της μεταφορικής κίνησής του.

Η ροπή αδράνειας εξαρτάται από τη μάζα, αλλά και από την κατανομή της μάζας γύρω από τον άξονα περιστροφής.

Ροπή αδράνειας

- συνεχές άκαμπτο σώμα, θεωρούμε ότι το σώμα απαρτίζεται από πολλά μικρά στοιχεία, καθένα με μάζα Δm_i.

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

- Χρησιμοποιώντας την παραδοχή των στοιχείων μικρού όγκου, παίρνουμε

$$I = \int \rho r^2 dV$$

- Αν η πυκνότητα ρ είναι σταθερή, μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας τη γεωμετρία του σώματος. Διαφορετικά, πρέπει να γνωρίζουμε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η πυκνότητα συναρτήσει της θέσης.

ομογενής άκαμπτη ράβδος

- Η σκιασμένη περιοχή έχει μάζα
  - $dm = \lambda dx$
- Τότε, η ροπή αδράνειας είναι

$$I_y = \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx$$

$$I = \frac{1}{12} M L^2$$