

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ-
ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ



ΦΥΣΙΚΗ
(ΜΗΧΑΝΙΚΗ-ΚΥΜΑΤΙΚΗ)

ΤΜΗΜΑ Α.2

ΚΑΘΗΓ. ΖΑΧΑΡΙΑΔΟΥ ΚΑΤΕΡΙΝΑ

ΓΡΑΦΕΙΟ ΖΒ114 (ΡΑΓΚΟΥΣΗ-ΖΑΧΑΡΙΑΔΟΥ)

E-mail: zacharia@uniwa.gr

Βιβλιογραφία



**SERWAY, PHYSICS FOR SCIENTISTS AND
ENGINEERS**

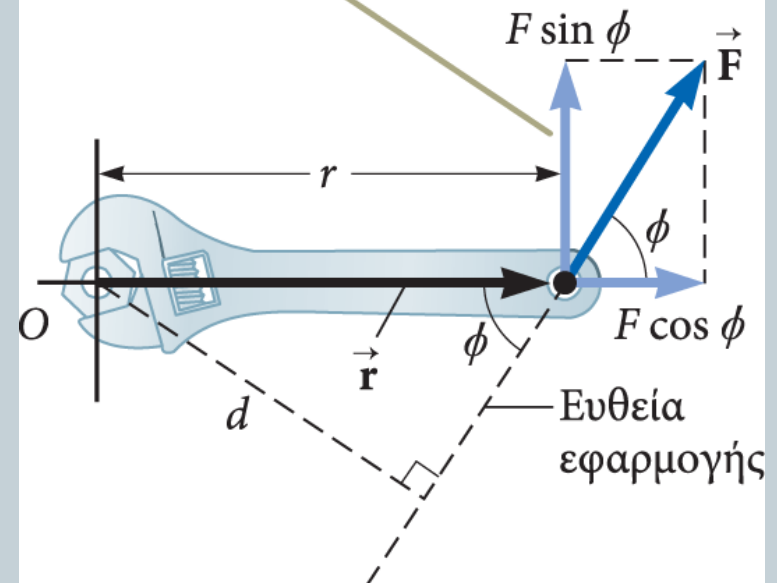
**YOUNG H.D., UNIVERSITY PHYSICS,
BERKELEY PHYSICS COURSE**

Ροπή (συνέχεια)



- Η ροπή έχει κατεύθυνση.
 - Αν η δύναμη τείνει να περιστρέψει το σώμα αριστερόστροφα, η ροπή είναι θετική.
 - Αν η δύναμη τείνει να περιστρέψει το σώμα δεξιόστροφα, η ροπή είναι αρνητική.

Η συνιστώσα $F \sin \phi$ τείνει να περιστρέψει το γαλλικό κλειδί γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από το O .



Ροπή δύναμης

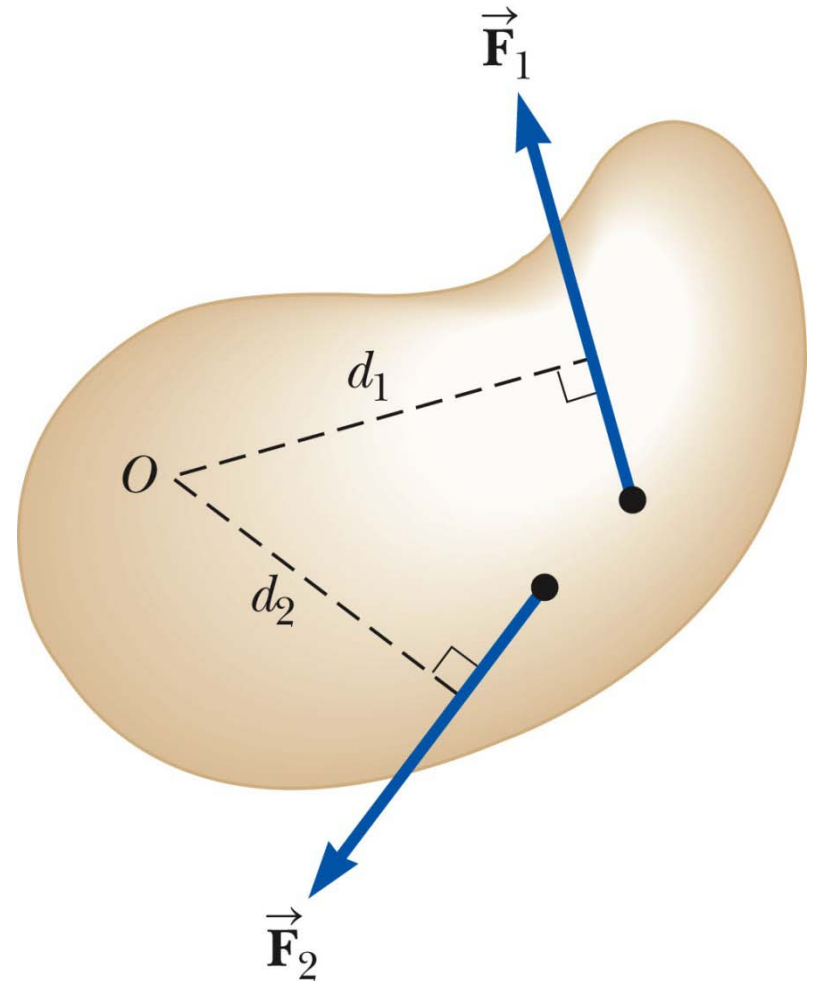


- Ροπή τ είναι η τάση που έχει μια δύναμη να περιστρέψει ένα σώμα γύρω από κάποιον άξονα.
 - Η ροπή είναι διάνυσμα, αλλά εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με το μέτρο της:
 - $\tau = rF \sin \phi = Fd$
 - ✦ F είναι η δύναμη.
 - ✦ ϕ είναι η γωνία που σχηματίζει η δύναμη με την κάθετο στον άξονα περιστροφής.
 - ✦ d είναι ο μοχλοβραχίονας της δύναμης.
 - Η ροπή που ασκείται σε ένα σώμα δεν έχει μοναδική τιμή.
 - ✦ Η τιμή της εξαρτάται από την επιλογή του άξονα περιστροφής.

Συνισταμένη ροπή



- Η δύναμη \vec{F}_1 τείνει να περιστρέψει το σώμα αριστερόστροφα γύρω από το O .
- Η δύναμη \vec{F}_2 τείνει να περιστρέψει το σώμα δεξιόστροφα γύρω από το O .
- $\Sigma \tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 d_1 - F_2 d_2$



Ροπή και δύναμη



- Οι δυνάμεις μπορούν να προκαλέσουν μεταβολή στη μεταφορική κίνηση.
 - Η μεταβολή αυτή περιγράφεται από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.
- Οι δυνάμεις μπορούν να προκαλέσουν μεταβολή στην περιστροφική κίνηση.
 - Ο βαθμός της μεταβολής εξαρτάται από το μέτρο της δύναμης και από τον μοχλοβραχίονά της.
 - Η μεταβολή της περιστροφικής κίνησης εξαρτάται από τη ροπή.

Μονάδες μέτρησης της ροπής



- Η μονάδα **SI** της ροπής είναι το **N·m**.
 - Παρότι η ροπή είναι γινόμενο δύναμης επί απόσταση, διαφέρει σημαντικά από το έργο και την ενέργεια.
 - Η ροπή μετριέται σε **N·m**. Οι μονάδες της δεν μετατρέπονται σε **joule**.

Ροπή και γωνιακή επιτάχυνση



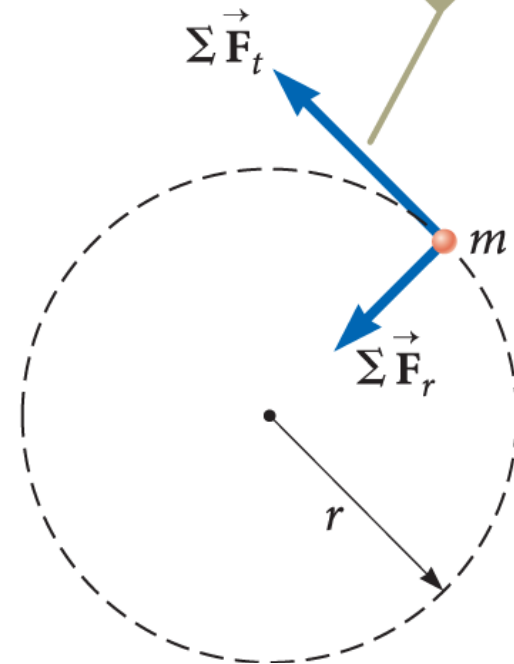
- Θεωρήστε ένα σωματίδιο μάζας m που διαγράφει κύκλο ακτίνας r υπό την επίδραση μιας εφαπτομενικής δύναμης.

- Η εφαπτομενική δύναμη προκαλεί εφαπτομενική επιτάχυνση:

- $F_t = m a_t$

- Η ακτινική δύναμη αναγκάζει το σωματίδιο να κινηθεί σε κυκλική τροχιά.

Η εφαπτομενική δύναμη η οποία ασκείται στο σωματίδιο προκαλεί μια ροπή σε αυτό ως προς έναν άξονα που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.



Ροπή και γωνιακή επιτάχυνση, σωματίδιο (συνέχεια)



- Το μέτρο της ροπής που προκαλεί η $\sum \vec{F}_t$ σε ένα σωματίδιο ως προς έναν άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του κύκλου είναι

- $\Sigma \tau = \Sigma F_t r = (m a_t) r$

- Το μέτρο της εφαπτομενικής επιτάχυνσης συνδέεται με το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης μέσω της σχέσης

- $\Sigma \tau = (m a_t) r = (m r \alpha) r = (m r^2) \alpha$

- Εφόσον $m r^2$ είναι η ροπή αδράνειας του σωματιδίου,

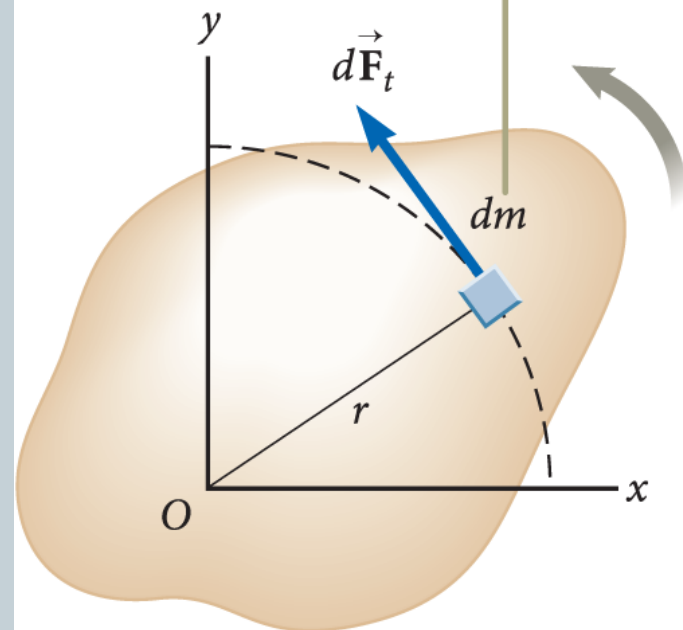
- $\Sigma \tau = I \alpha$

- Το μέτρο της ροπής είναι ανάλογο προς το μέτρο της γωνιακής του επιτάχυνσης και η σταθερά αναλογίας είναι η ροπή αδράνειας.

Ροπή και γωνιακή επιτάχυνση, επέκταση

- Θεωρήστε ότι το σώμα αποτελείται από άπειρο πλήθος στοιχείων μάζας dm με απειροστό μέγεθος.
- Κάθε στοιχείο μάζας διαγράφει κύκλο γύρω από την αρχή των συντεταγμένων O .
- Κάθε στοιχείο μάζας έχει εφαπτομενική επιτάχυνση.
- Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα
 - $d\mathbf{F}_t = (dm)\mathbf{a}_t$
- Από τη ροπή που προκαλεί η δύναμη και από τη γωνιακή επιτάχυνση, προκύπτει ότι
$$d\tau_{\text{εξωτ.}} = r dF_t = \mathbf{a}_t r dm = \alpha r^2 dm$$

Στη στοιχειώδη μάζα dm του άκαμπτου σώματος ασκείται μια ροπή, ακριβώς όπως συμβαίνει στο σωματίδιο της Εικόνας M10.15.



Ροπή και γωνιακή επιτάχυνση, επέκταση (συνέχεια)



- Η συνολική ροπή είναι

$$\sum \tau_{\text{εξωτ.}} = \int \alpha r^2 dm = \alpha \int r^2 dm$$



Αυτή η σχέση γίνεται

$$\Sigma \tau = I\alpha$$

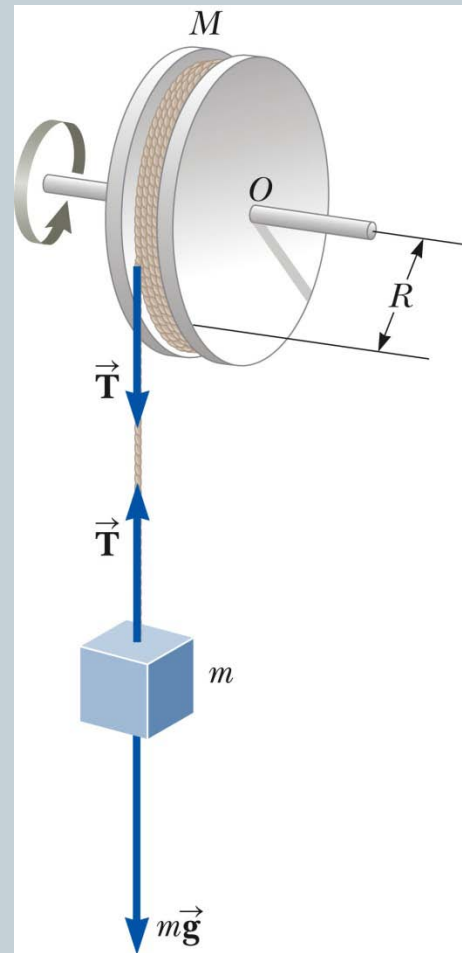
- Η ευθεία εφαρμογή (φορέας) των ακτινικών συνιστωσών πρέπει να διέρχεται από τον άξονα περιστροφής.
- Αυτές οι συνιστώσες προκαλούν μηδενική ροπή ως προς τον συγκεκριμένο άξονα.

Ροπή και γωνιακή επιτάχυνση – Το παράδειγμα του τροχού

- Εφόσον ο τροχός περιστρέφεται, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη σχέση

$$\Sigma \tau = I\alpha.$$

- Η τάση παρέχει την εφαπτομενική δύναμη.
- Η μάζα κινείται ευθύγραμμα, επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.
- $\Sigma F_y = ma_y = mg - T$



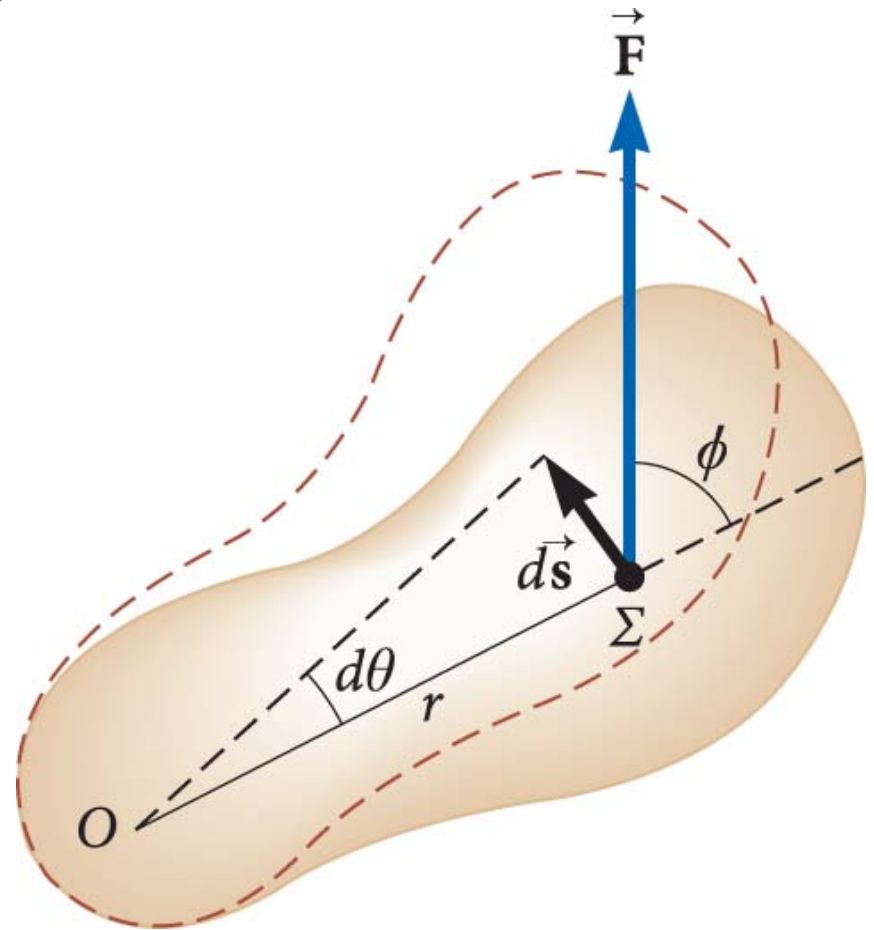
Το έργο στην περιστροφική κίνηση



- Βρείτε το έργο που παράγει στο σώμα το διάνυσμα \vec{F} καθώς το σώμα περιστρέφεται κατά αλειροστή απόσταση $ds = r d\theta$.

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$
$$= (F \sin \phi) r d\theta$$

- Η ακτινική συνιστώσα της δύναμης δεν παράγει έργο επειδή είναι κάθετη προς τη μετατόπιση.



Η ισχύς στην περιστροφική κίνηση



- Ο ρυθμός παραγωγής έργου σε χρονικό διάστημα dt είναι

$$\text{ισχύς} = P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

- Η εξίσωση είναι αντίστοιχη με τη σχέση $P = Fv$ για ένα γραμμικό σύστημα.

Το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας στην περιστροφική κίνηση



- Σύμφωνα με το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας για την περιστροφική κίνηση, το συνολικό έργο που παράγεται από εξωτερικές δυνάμεις κατά την περιστροφή ενός συμμετρικού άκαμπτου σώματος γύρω από έναν σταθερό άξονα ισούνται με τη μεταβολή στην ενέργεια περιστροφής του σώματος.

$$\sum W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} \tau d\omega = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2$$

Το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας, γενικά



- Συνδυάζοντας το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας για την περιστροφική κίνηση με το αντίστοιχο θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας για τη μεταφορική κίνηση, συμπεραίνουμε ότι το *συνολικό έργο που παράγουν οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα ισούται με τη μεταβολή στη **συνολική** κινητική ενέργεια του σώματος, η οποία είναι ίση με το άθροισμα της μεταφορικής και της περιστροφικής κινητικής ενέργειάς του.*

Χρήσιμες εξισώσεις – Σύνοψη



ΠΙΝΑΚΑΣ Μ10.3

Χρήσιμες σχέσεις στην περιστροφική και στη μεταφορική κίνηση

Περιστροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα

Μέτρο γωνιακής ταχύτητας $\omega = d\theta/dt$

Μέτρο γωνιακής επιτάχυνσης $\alpha = d\omega/dt$

Μέτρο συνισταμένης ροπής $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi\omega\tau} = I\alpha$

Αν $\alpha = \text{σταθερό}$

$$\begin{cases} \omega_f = \omega_i + \alpha t \\ \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{cases}$$

$$\text{Έργο } W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$$

Κινητική ενέργεια $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$

Ισχύς $P = \tau\omega$

Στροφορμή $L = I\omega$

Μέτρο συνισταμένης ροπής $\Sigma\tau = dL/dt$

Μεταφορική κίνηση

Μέτρο μεταφορικής ταχύτητας $v = dx/dt$

Μέτρο μεταφορικής επιτάχυνσης $a = dv/dt$

Μέτρο συνισταμένης δύναμης $\Sigma F = ma$

Αν $a = \text{σταθερό}$

$$\begin{cases} v_f = v_i + at \\ x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{cases}$$

$$\text{Έργο } W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Κινητική ενέργεια $K = \frac{1}{2}mv^2$

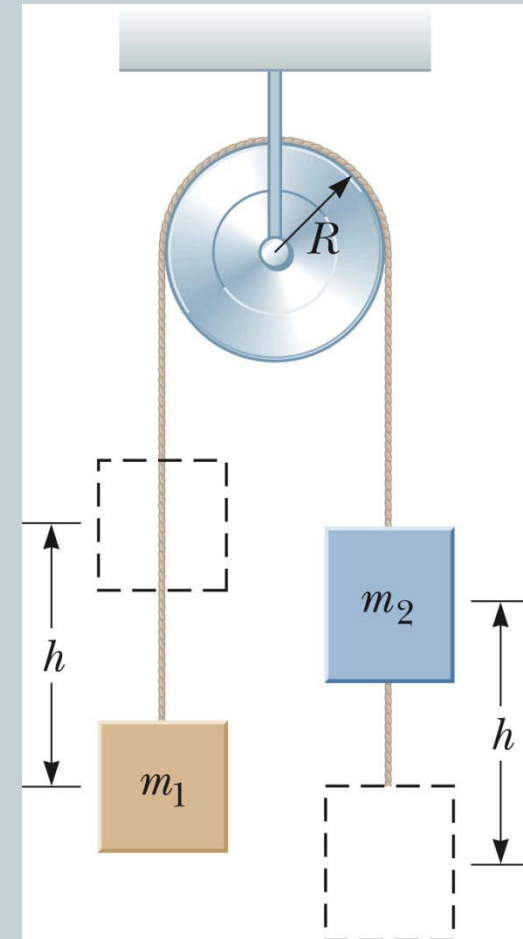
Ισχύς $P = Fv$

Ορμή $p = mv$

Μέτρο συνισταμένης δύναμης $\Sigma F = dp/dt$

Η ενέργεια και η μηχανή του Atwood – Παράδειγμα

- Το σύστημα που αποτελείται από τους δύο κύβους, την τροχαλία, και τη Γη είναι ένα απομονωμένο ως προς την ενέργεια σύστημα, στο οποίο δεν δρουν μη συντηρητικές δυνάμεις.
- Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται.
- Η κινητική ενέργεια της μεταφορικής κίνησης των κύβων και η βαρυτική δυναμική ενέργειά τους μεταβάλλονται.
- Η κινητική ενέργεια περιστροφής της τροχαλίας μεταβάλλεται.



Κύλιση χωρίς ολίσθηση, κέντρο μάζας του σώματος

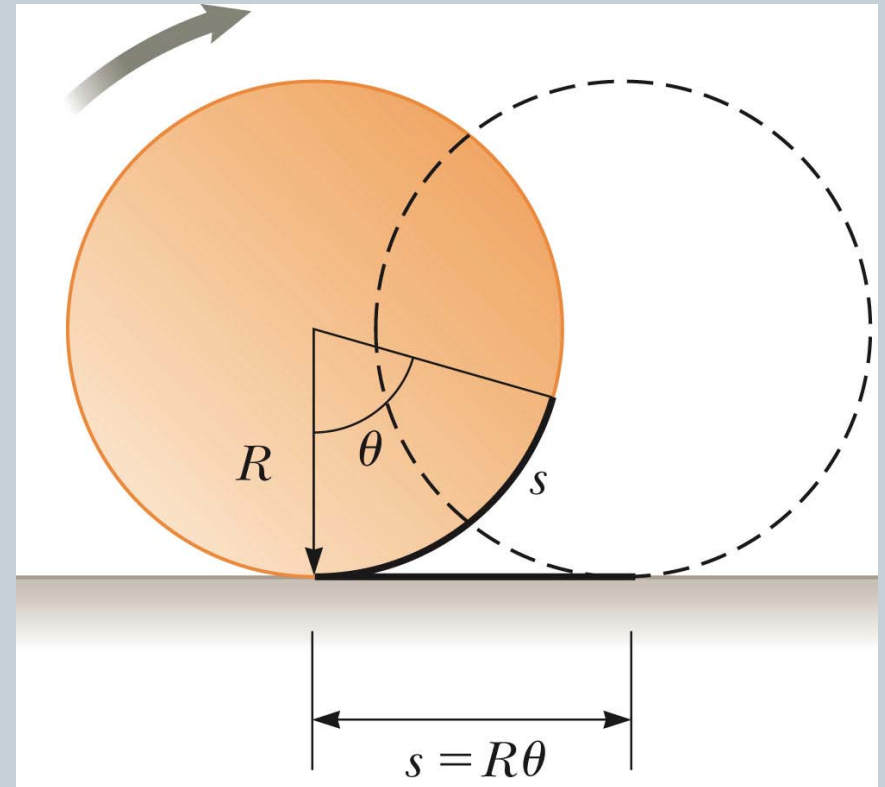


- Η μεταφορική ταχύτητα του κέντρου μάζας έχει μέτρο

$$v_{\text{KM}} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

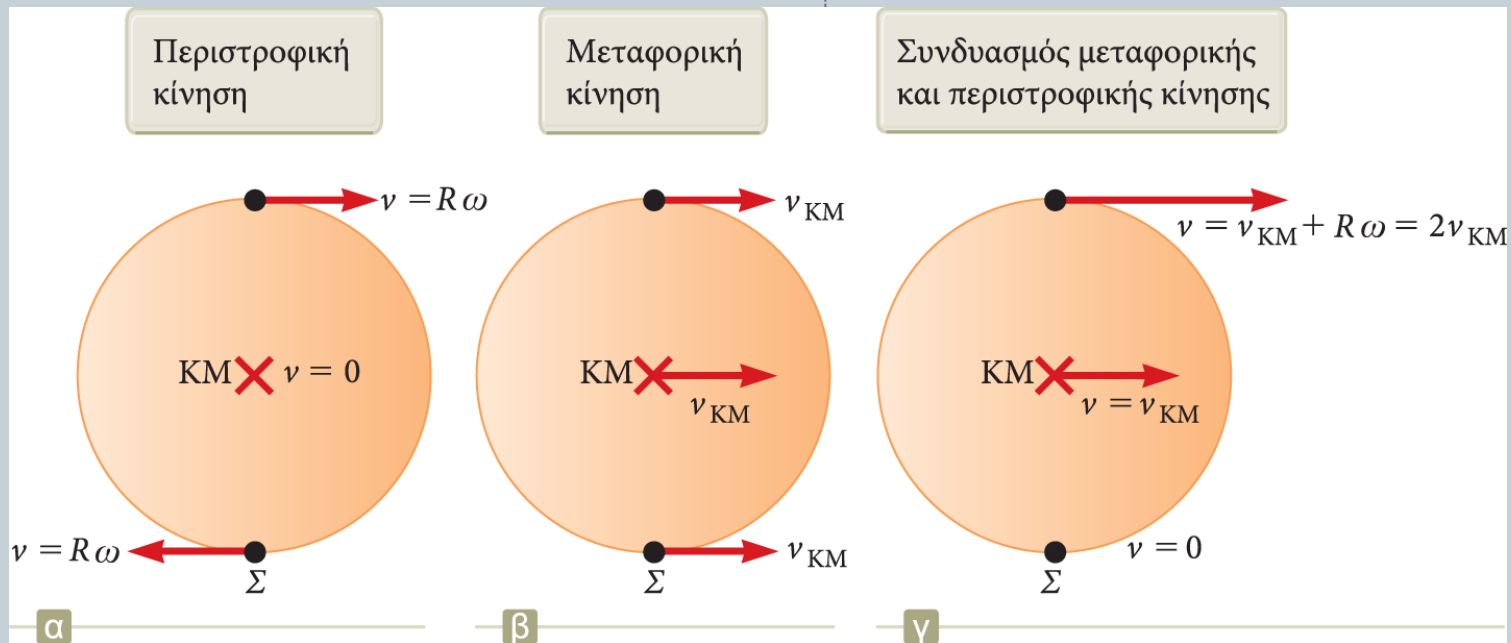
- Η μεταφορική επιτάχυνση του κέντρου μάζας έχει μέτρο

$$a_{\text{KM}} = \frac{dv_{\text{KM}}}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$



Κύλιση, (συνέχεια)

- Η κίνηση ενός κυλιόμενου σώματος μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένας συνδυασμός μετατόπισης και περιστροφής.
- Το σημείο επαφής μεταξύ της επιφάνειας και του κυλίνδρου έχει μεταφορική ταχύτητα μηδενικού μέτρου (v).



Συνολική κινητική ενέργεια ενός κυλιόμενου σώματος



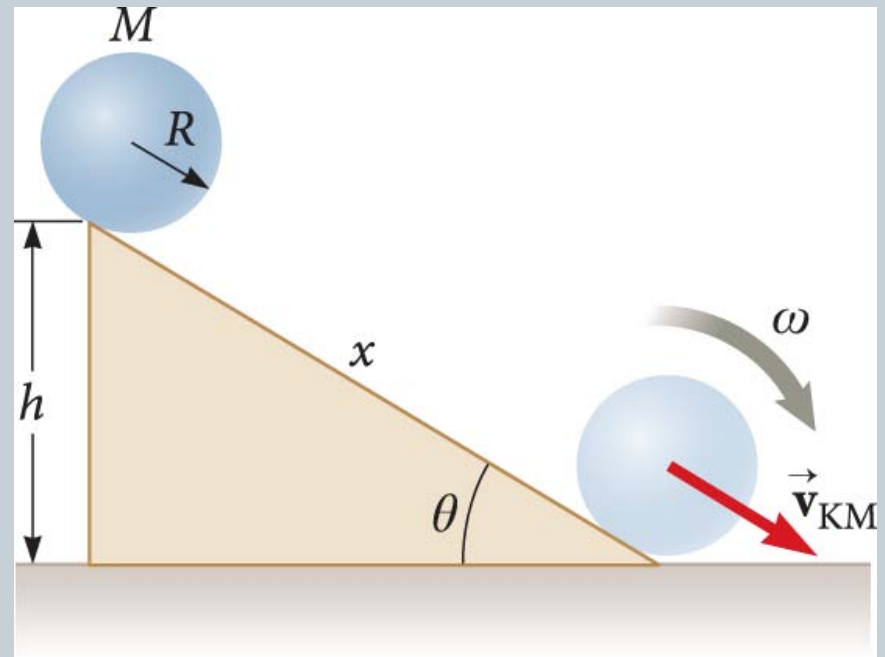
• Η συνολική κινητική ενέργεια ενός κυλιόμενου σώματος ισούται με την κινητική ενέργεια της μετατόπισης του κέντρου μάζας του συν την κινητική ενέργεια της περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας του.

$$\circ \mathbf{K} = \frac{1}{2} I_{\text{KM}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{\text{KM}}^2$$

- ✦ Ο όρος $\frac{1}{2} I_{\text{KM}} \omega^2$ αντιστοιχεί στην κινητική ενέργεια του κυλίνδρου λόγω της περιστροφικής κίνησής του γύρω από το κέντρο μάζας του.
- ✦ Ο όρος $\frac{1}{2} M v^2$ αντιστοιχεί στην κινητική ενέργεια του κυλίνδρου λόγω της μεταφορικής κίνησης του κέντρου μάζας του.

Συνολική κινητική ενέργεια – Παράδειγμα

- Η επιταχυνόμενη κύλιση είναι εφικτή μόνο αν υπάρχει δύναμη τριβής μεταξύ της σφαίρας και του επιπέδου.
 - Η τριβή παράγει την απαιτούμενη ροπή για την περιστροφή.
 - Δεν υπάρχει απώλεια μηχανικής ενέργειας επειδή το σημείο επαφής είναι ακίνητο ως προς την επιφάνεια σε κάθε χρονική στιγμή.
 - Στην πραγματικότητα, η τριβή κύλισης προκαλεί μετατροπή μηχανικής ενέργειας σε εσωτερική ενέργεια.
 - ✦ Η τριβή κύλισης προκαλείται από τις παραμορφώσεις της επιφάνειας και του κυλιόμενου σώματος.



Συνολική κινητική ενέργεια – Παράδειγμα (συνέχεια)



- Εφαρμόστε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:

- Έστω ότι $U = 0$ στη βάση του επιπέδου

- $K_f + U_f = K_i + U_i$

- $K_f = \frac{1}{2} (I_{\text{KM}}/R^2) v_{\text{KM}}^2 + \frac{1}{2} M v_{\text{KM}}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{I_{\text{KM}}}{R^2} + M \right) v_{\text{KM}}^2$

- $U_i = Mgh$

- $U_f = K_i = 0$

- Λύστε ως προς v

$$v_{\text{KM}} = \left[\frac{2gh}{1 + \left(\frac{I_{\text{KM}}}{MR^2} \right)} \right]^{1/2}$$

Κύλιση σφαίρας σε κεκλιμένο επίπεδο – Παράδειγμα



- **Μοντελοποίηση**

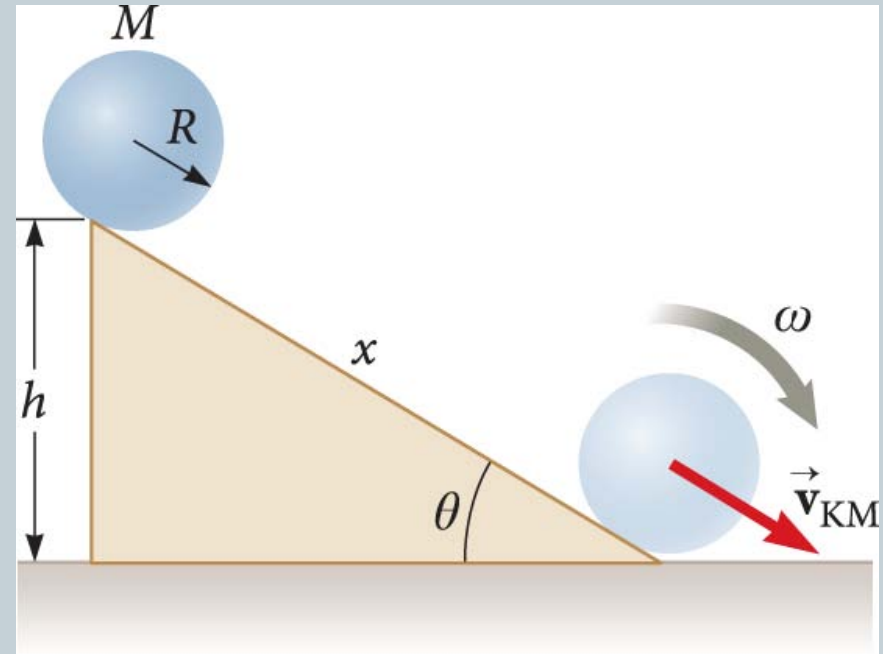
- Μια σφαίρα κυλάει σε ένα κεκλιμένο επίπεδο.

- **Κατηγοριοποίηση**

- Μοντελοποιήστε τη σφαίρα και τη Γη ως απομονωμένο σύστημα ως προς την ενέργεια.
- Στο σύστημα δεν δρουν μη συντηρητικές δυνάμεις.

- **Ανάλυση**

- Χρησιμοποιήστε την εξίσωση διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για να βρείτε το μέτρο v της ταχύτητας.



Κύλιση σφαίρας σε κεκλιμένο επίπεδο – Παράδειγμα (συνέχεια)



- **Ανάλυση, (συνέχεια)**
 - Λύστε ως προς την επιτάχυνση του κέντρου μάζας.
- **Ολοκλήρωση**
 - Το μέτρο της ταχύτητας και το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας είναι ανεξάρτητα από τη μάζα και την ακτίνα της σφαίρας.
- **Γενίκευση**
 - *Όλες οι ομογενείς συμπαγείς σφαίρες αναπτύσσουν επιτάχυνση ίδιου μέτρου και ταχύτητα ίδιου μέτρου σε ένα συγκεκριμένο κεκλιμένο επίπεδο.*
 - ✦ Παρόμοια αποτελέσματα προκύπτουν για σώματα με διαφορετικά σχήματα.

Στροφορμή



- Η στροφορμή παίζει σημαντικό ρόλο στη δυναμική των περιστροφών.
- Αρχή διατήρησης της στροφορμής
 - Η αρχή αυτή είναι ανάλογη με την αρχή διατήρησης της ορμής.
 - Σύμφωνα με την αρχή αυτή, η στροφορμή ενός απομονωμένου συστήματος είναι σταθερή.
 - ✦ Ένα σύστημα θεωρείται απομονωμένο ως προς τη στροφορμή όταν δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές σε αυτό.

Διανυσματικό γινόμενο



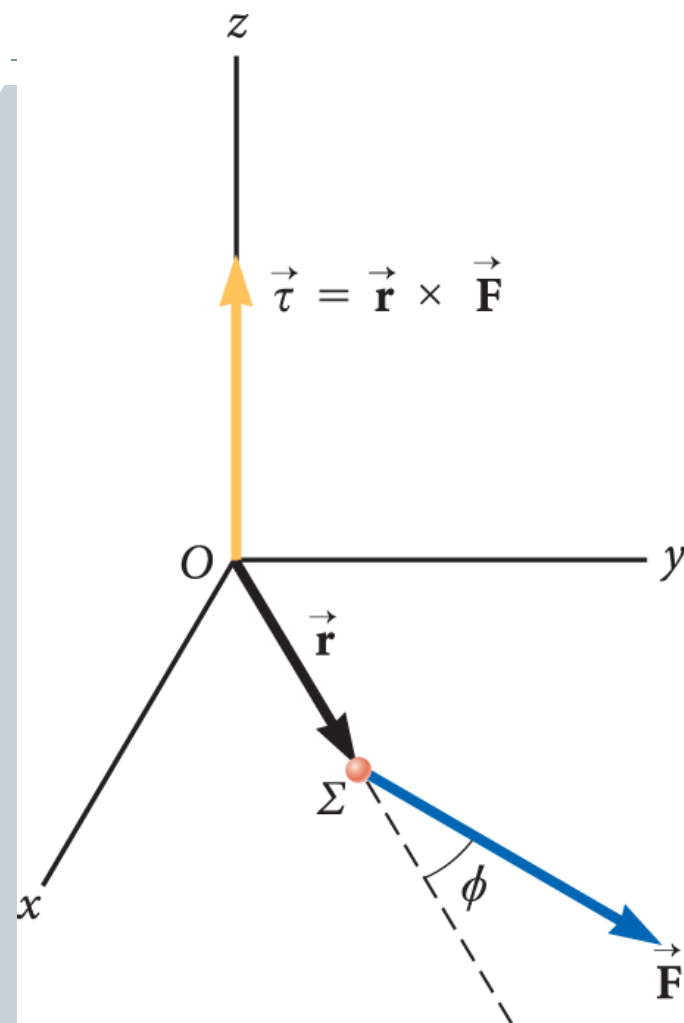
- Σε κάποιες περιπτώσεις, το γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι και αυτό διάνυσμα.
 - Σε προηγούμενα κεφάλαια εξετάσαμε την περίπτωση κατά την οποία το γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι βαθμωτό μέγεθος.
 - ✦ Ονομάσαμε το γινόμενο αυτό εσωτερικό γινόμενο.
- Το διανυσματικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ονομάζεται και εξωτερικό γινόμενο.

Διανυσματικό γινόμενο και ροπή

- Η διεύθυνση του διανύσματος της ροπής είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν το διάνυσμα της θέσης και το διάνυσμα της δύναμης

$$\vec{\tau} = \vec{\mathbf{F}} \times \vec{\mathbf{r}}$$

- Η ροπή είναι το διανυσματικό (ή εξωτερικό) γινόμενο των διανυσμάτων της θέσης και της δύναμης.



Διανυσματικό γινόμενο – Ορισμός

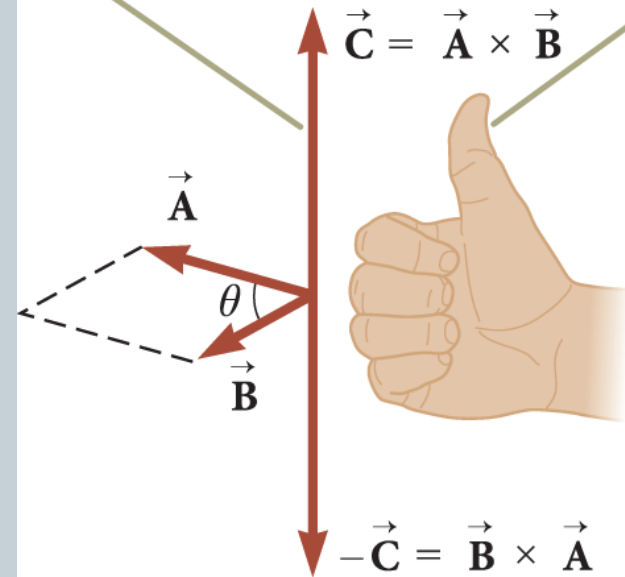


- Για δύο οποιαδήποτε διανύσματα \vec{A} και \vec{B} :
- Το διανυσματικό (εξωτερικό) γινόμενο των \vec{A} και \vec{B} είναι ένα τρίτο διάνυσμα, το
$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$
-
- Το μέτρο του διανύσματος C είναι $AB \sin \theta$.
 - θ είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των \vec{A} και \vec{B}

Περισσότερα για το διανυσματικό γινόμενο

- Η ποσότητα $AB \sin \theta$ ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα \vec{A} και \vec{B}
- Η διεύθυνση του \vec{C} είναι κάθετη στο επίπεδο που σχηματίζουν τα \vec{A} και \vec{B}
- Ο καλύτερος τρόπος για να προσδιορίσουμε την κατεύθυνση του διανύσματος είναι να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Η διεύθυνση του διανύσματος \vec{C} είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα \vec{A} και \vec{B} . Επιλέξτε τη σωστή φορά με τον κανόνα του δεξιού χεριού.



Ιδιότητες του διανυσματικού γινομένου



- Στο διανυσματικό γινόμενο δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα. Η σειρά με την οποία πολλαπλασιάζουμε τα δύο διανύσματα έχει σημασία. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
- Αν το \vec{A} είναι παράλληλο με το \vec{B} ($\vartheta = 0^\circ$ ή 180°), τότε $\vec{A} \times \vec{B} = 0$
- Αν το \vec{A} είναι κάθετο στο \vec{B} , τότε $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$
- Στο διανυσματικό γινόμενο ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα.

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

Ιδιότητες του διανυσματικού γινομένου (τελική διαφάνεια)



- Η παράγωγος του διανυσματικού γινομένου ως προς μια μεταβλητή, όπως ο χρόνος t , είναι

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}) = \frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt}$$

Είναι σημαντικό να τηρούμε τη σειρά των παραγόντων του γινομένου.

Διανυσματικά γινόμενα μοναδιαίων διανυσμάτων



$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}}$$

Πρόσημα των διανυσματικών γινομένων



- Στα διανυσματικά γινόμενα, τα πρόσημα μπορούν να αλλάξουν θέση:

$$\vec{\mathbf{A}} \times (-\vec{\mathbf{B}}) = -\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$$



και

$$\hat{\mathbf{i}} \times (-\hat{\mathbf{j}}) = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$$

Παράδειγμα διανυσματικού γινομένου



- Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}, \quad \vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$$

- Βρείτε το $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$

- Αποτέλεσμα

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}) \times (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})$$

$$= 2\hat{\mathbf{i}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) + 2\hat{\mathbf{i}} \times 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{j}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) + 3\hat{\mathbf{j}} \times 2\hat{\mathbf{j}}$$

$$= 0 + 4\hat{\mathbf{k}} + 3\hat{\mathbf{k}} + 0 = 7\hat{\mathbf{k}}$$

Παράδειγμα διανύσματος ροπής



- Δίνονται η δύναμη και η θέση:

$$\vec{\mathbf{F}} = (2.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}}) \text{ N}$$

$$\vec{\mathbf{r}} = (4.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}}) \text{ m}$$

- Βρείτε την παραγόμενη ροπή.

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = [(4.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}})\text{N}] \times [(2.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}})\text{m}] \\ &= [(4.00)(2.00)\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} + (4.00)(3.00)\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} \\ &\quad + (5.00)(2.00)\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} + (5.00)(3.00)\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}}] \\ &= 2.0\hat{\mathbf{k}} \text{ N}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

Στροφορμή



- Θεωρήστε ένα σωματίδιο μάζας m που έχει διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}}$ και κινείται με ορμή $\vec{\mathbf{p}}$
- Βρείτε τη συνισταμένη ροπή.

$$\vec{\mathbf{r}} \times \sum \vec{\mathbf{F}} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

Προσθέτουμε τον όρο $\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \vec{\mathbf{p}}$ (επειδή είναι ίσος με 0)

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}})}{dt}$$

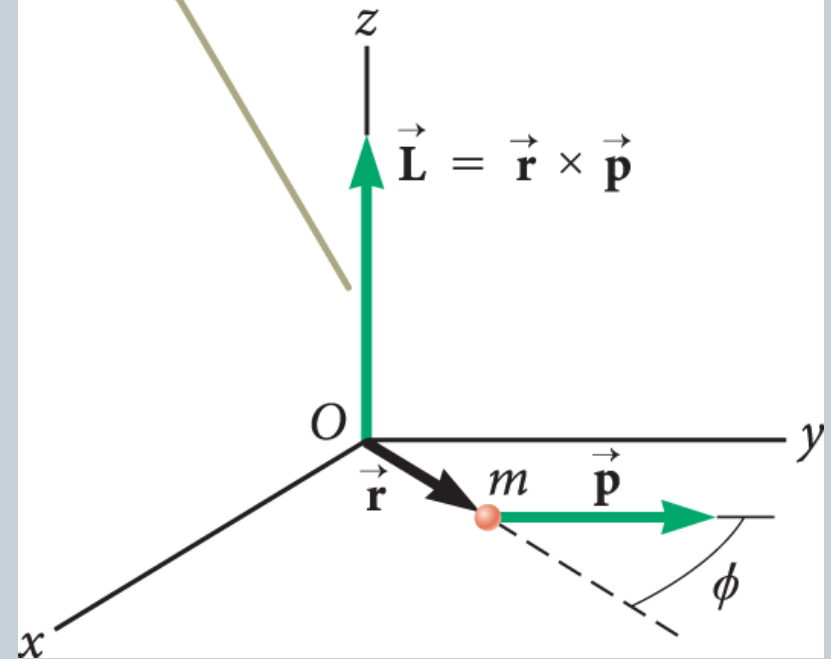
Η εξίσωση μοιάζει πολύ με την εξίσωση της συνισταμένης δύναμης ως συνάρτηση της ορμής. Αυτό συμβαίνει επειδή η ροπή στην περιστροφική κίνηση έχει τον ίδιο ρόλο με τη δύναμη στη μεταφορική κίνηση.

Στροφορμή (συνέχεια)

- Η στιγμιαία στροφορμή ενός σωματιδίου ως προς την αρχή των αξόνων O ορίζεται ως το διανυσματικό γινόμενο του διανύσματος της στιγμιαίας θέσης του σωματιδίου και της στιγμιαίας ορμής του.

- $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Η στροφορμή \vec{L} ενός σωματιδίου ως προς έναν άξονα είναι ένα διάνυσμα κάθετο τόσο στο διάνυσμα θέσης \vec{r} του σωματιδίου ως προς τον άξονα όσο και στην ορμή \vec{p} του σωματιδίου.



Ροπή και στροφορμή



- Υπάρχει μια σχέση που συνδέει τη ροπή με τη στροφορμή.

- Είναι παρόμοια με τη σχέση που συνδέει τη δύναμη με την ορμή.

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

- Η ροπή που δέχεται ένα σωματίδιο ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του.

- Στην περιστροφική κίνηση, η παραπάνω εξίσωση είναι ανάλογη με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

- Τα $\sum \vec{\tau}$ και \vec{L} πρέπει να θεωρούνται ως προς τον ίδιο άξονα.

- Η σχέση ισχύει για κάθε σταθερή αρχή ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς.

Περισσότερα για τη στροφορμή



- Στο σύστημα SI, η στροφορμή έχει μονάδες $(\text{kg}\cdot\text{m}^2)/\text{s}$.
- Το μέτρο και η διεύθυνση της στροφορμής εξαρτώνται από την επιλογή του άξονα.
- Το μέτρο της στροφορμής είναι $L = mvr \sin \phi$
 - ϕ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων \vec{r} και \vec{p} .
- Η διεύθυνση της στροφορμής \vec{L} είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα \vec{r} και \vec{p}

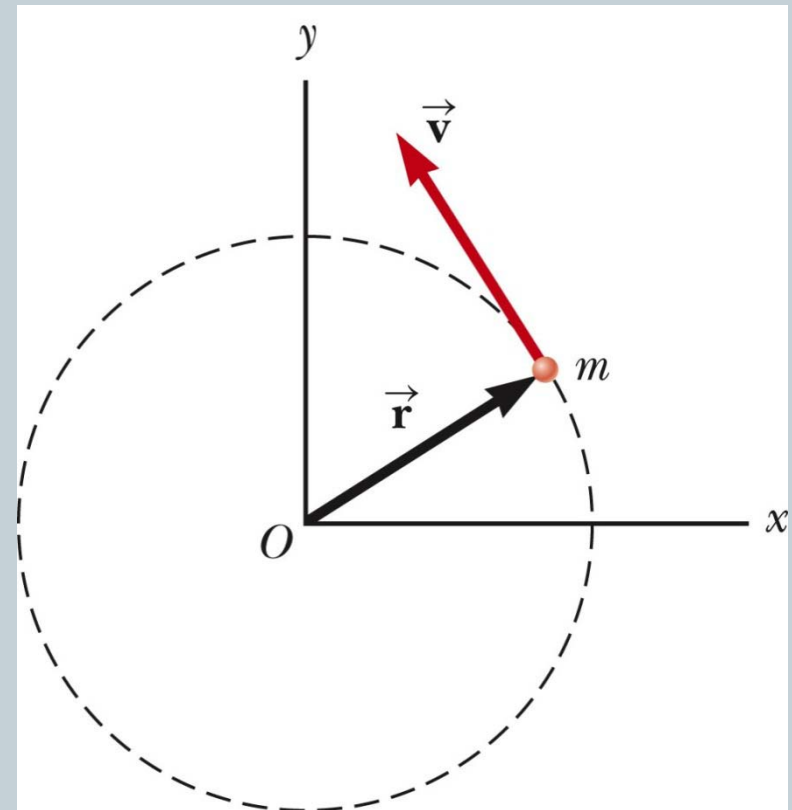
Στροφορμή σωματιδίου – Παράδειγμα

- Το διάνυσμα $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ έχει φορά από το διάγραμμα προς τα έξω.

- Το μέτρο του είναι

$$L = mvr \sin 90^\circ = mvr$$

- Ένα σωματίδιο που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση έχει σταθερή στροφορμή ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της τροχιάς του.



Στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων



- Η συνολική στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων ορίζεται ως το διανυσματικό άθροισμα της στροφορμής των μεμονωμένων σωματιδίων.

$$\vec{L}_{\text{συν.}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n = \sum_i \vec{L}_i$$

- Αν παραγωγίσουμε την εξίσωση ως προς τον χρόνο, θα πάρουμε

$$\frac{d\vec{L}_{\text{συν.}}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_i$$

Στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων (συνέχεια)



- Οι ροπές που σχετίζονται με τις εσωτερικές δυνάμεις ενός συστήματος σωματιδίων είναι μηδενικές.

$$\sum \vec{\tau}_{\text{εξωτ.}} = \frac{d\vec{L}_{\text{συν.}}}{dt}$$

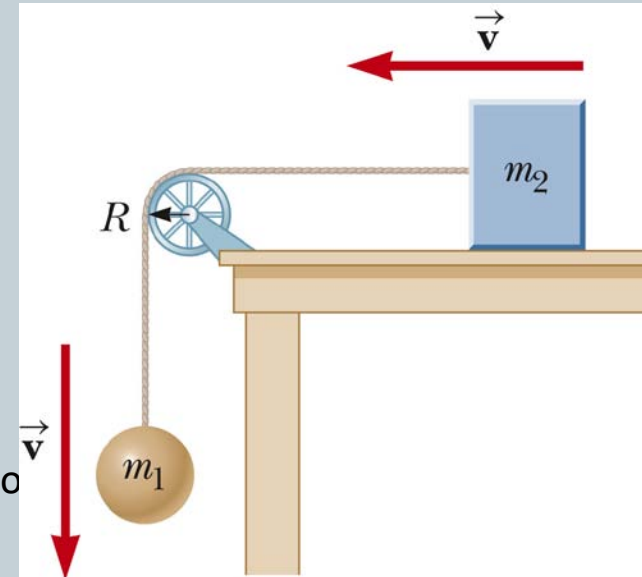
- Η συνισταμένη εξωτερική ροπή που ασκείται σε ένα σύστημα ως προς έναν άξονα, ο οποίος διέρχεται από την αρχή ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς, ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της συνολικής στροφορμής του συστήματος ως προς αυτή την αρχή.

Σύστημα σωμάτων – Παράδειγμα



• Τα σώματα συνδέονται με ένα αβαρές σκοινί το οποίο διέρχεται από μια τροχαλία. Βρείτε τη μεταφορική επιτάχυνση. Χρησιμοποιήστε τις έννοιες της στροφορμής και της ροπής.

- Χρησιμοποιήστε έναν άξονα που συμπίπτει με τον άξονα της τροχαλίας.
- Η στροφορμή του συστήματος αποτελείται από τη στροφορμή δύο σωμάτων που εκτελούν μεταφορική κίνηση και ενός σώματος που περιστρέφεται.



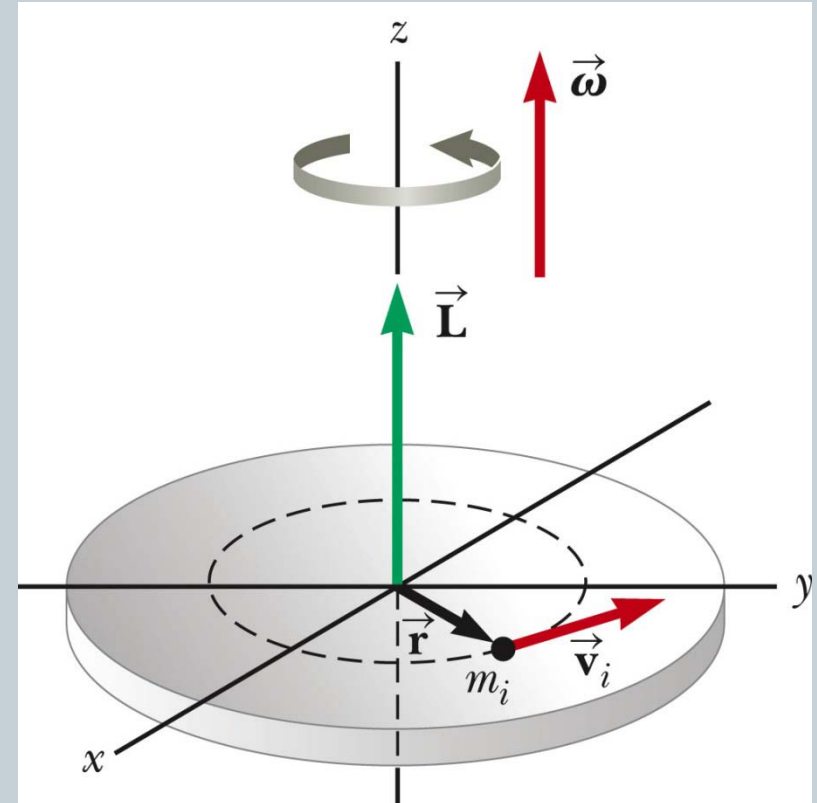
Σε κάθε χρονική στιγμή, η σφαίρα και ο κύβος έχουν κοινή ταχύτητα v .

Γράψτε τις σχέσεις για τη συνολική στροφορμή και τη συνισταμένη εξωτερική ροπή.

Λύστε την εξίσωση ως προς τη μεταφορική επιτάχυνση

Στροφορμή περιστρεφόμενου άκαμπτου σώματος

- Τα άκαμπτα σώματα είναι μη παραμορφώσιμα συστήματα.
- Κάθε σωματίδιο του σώματος περιστρέφεται στο επίπεδο xy γύρω από τον άξονα z με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω .
- Η στροφορμή ενός μεμονωμένου σωματιδίου είναι $L_i = m_i r_i^2 \omega$.
- Τα \vec{L} και $\vec{\omega}$ έχουν τη διεύθυνση του άξονα z .



Στροφορμή περιστρεφόμενου άκαμπτου σώματος (συνέχεια)



- Για να βρούμε τη στροφορμή ολόκληρου του σώματος, προσθέτουμε τις στροφορμές όλων των μεμονωμένων σωματιδίων.

$$L_z = \sum_i L_i = \sum_i (m_i r_i^2) \omega = I \omega$$

- Με παραγωγή παίρνουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφή.

$$\sum \vec{\tau}_{\text{εξωτ.}} = \frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I \alpha$$

Στροφορμή περιστρεφόμενου άκαμπτου σώματος (τελική διαφάνεια)



• Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για την περιστροφή ισχύει και για άκαμπτα σώματα που περιστρέφονται γύρω από έναν κινούμενο άξονα υπό την προϋπόθεση ότι ο άξονας αυτός:

- (1) διέρχεται από το κέντρο μάζας
- (2) είναι άξονας συμμετρίας

• Αν ένα συμμετρικό σώμα περιστρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, ισχύει η διανυσματική μορφή της εξίσωσης:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

- Όπου \vec{L} είναι η συνολική στροφορμή του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής.
- Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για την περιστροφή ισχύει για οποιοδήποτε σώμα, ανεξάρτητα από τη συμμετρία του, αν το \vec{L} συμβολίζει τη συνιστώσα της στροφορμής κατά μήκος του άξονα περιστροφής.

Στροφορμή μιας μπάλας του μπόουλιγκ

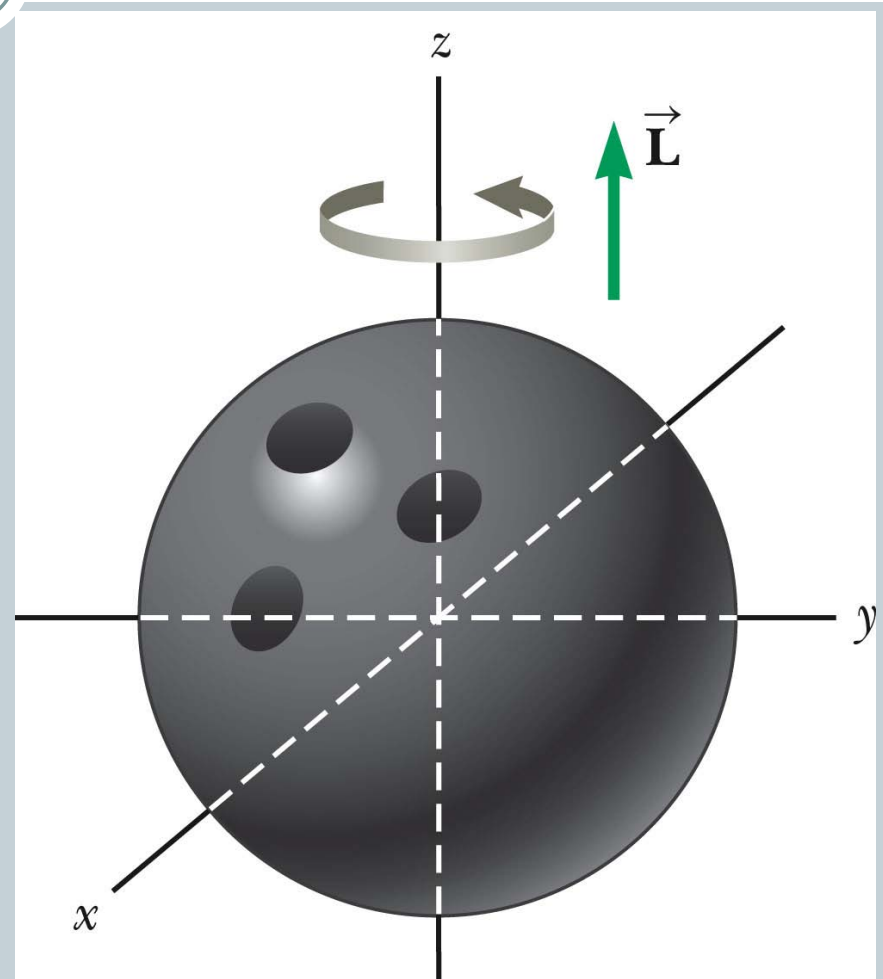
- Η ροπή αδράνειας της μπάλας είναι

$$\frac{2}{5}MR^2.$$

- Η στροφορμή της μπάλας είναι

$$L_z = I\omega$$

- Το διάνυσμα της στροφορμής έχει τη θετική κατεύθυνση του άξονα z.



Διατήρηση της στροφορμής



• Η συνολική στροφορμή ενός συστήματος έχει σταθερό μέτρο και κατεύθυνση αν η συνισταμένη εξωτερική ροπή που ασκείται στο σύστημα είναι μηδενική.

○ Συνισταμένη ροπή = 0 σημαίνει ότι το σύστημα είναι απομονωμένο.

$$\vec{L}_{\text{συν.}} = \text{σταθερή} \quad \text{ή} \quad \vec{L}_i = \vec{L}_f$$

• Για ένα σύστημα σωματιδίων,

$$\vec{L}_{\text{συν.}} = \sum \vec{L}_h \quad \text{σταθερή}$$

Διατήρηση της στροφορμής (συνέχεια)



- Για να διατηρηθεί η στροφορμή απαιτείται

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f = \text{σταθερή}$$

- ✦ Η σχέση αυτή ισχύει τόσο για την περιστροφή γύρω από έναν σταθερό άξονα όσο και για την περιστροφή γύρω από έναν άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας ενός κινούμενου συστήματος.
- ✦ Σε κάθε περίπτωση, η συνισταμένη ροπή πρέπει να είναι μηδενική.

Αρχή διατήρησης – Σύνοψη



• Για ένα απομονωμένο σύστημα,

(1) Διατήρηση της ενέργειας:

- $E_i = E_f$
- Αν δεν μεταφέρεται ενέργεια μέσω του ορίου του συστήματος.

(2) Διατήρηση της ορμής: $\vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_f$

-
- Αν η συνισταμένη εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα είναι μηδενική.

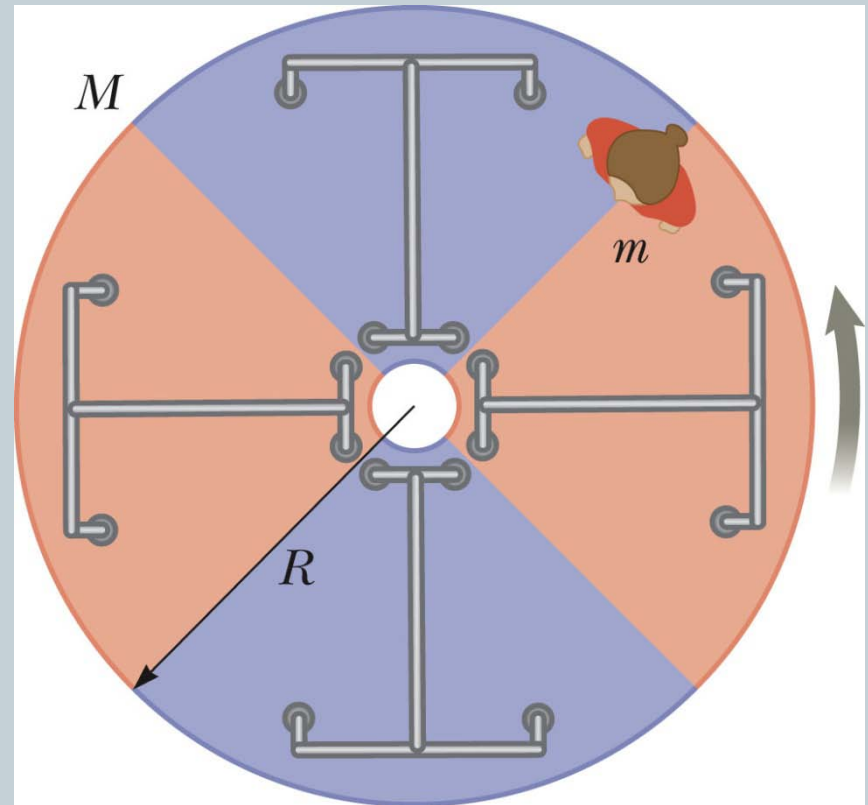
(3) Διατήρηση της στροφορμής:

-
- Αν η συνισταμένη εξωτερική ροπή που ασκείται στο σύστημα είναι μηδενική.

$$\vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{L}}_f$$

Διατήρηση της στροφορμής: Το καρουσέλ

- Η ροπή αδράνειας του συστήματος ισούται με τη ροπή αδράνειας της πλατφόρμας συν τη ροπή αδράνειας του ανθρώπου.
- Καθώς ο άνθρωπος περπατά προς το κέντρο της περιστρεφόμενης πλατφόρμας, το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος αυξάνεται.
 - Έτσι, η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.
- Το σύστημα είναι απομονωμένο ως προς τη στροφορμή.
 - Το σύστημα είναι απομονωμένο ως προς την ενέργεια, αλλά δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική.



Παράδειγμα



Ένα ομογενές σώμα με κανονικό γεωμετρικό σχήμα κυλίεται, χωρίς να ολισθαίνει. Η κινητική ενέργεια του σώματος λόγω της μεταφορικής κίνησης είναι ίση με την κινητική ενέργεια λόγω της στροφικής κίνησης γύρω από τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του. Το γεωμετρικό σχήμα του σώματος είναι:

α) δίσκος. β) λεπτός δακτύλιος. γ) σφαίρα. Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση.

$$K_{\mu} = K_{\pi} \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\Rightarrow I = M R^2$$

Σωστή λύση είναι η α.

Δηλαδή πρέπει όλη η μάζα να είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρεια του στερεού. Άρα το ζητούμενο γεωμετρικό σχήμα είναι ο λεπτός δακτύλιος.

Παράδειγμα



Δύο συμπαγείς κυκλικοί δίσκοι με ίσες μάζας M και ακτίνες R_1, R_2 αντίστοιχα, οι οποίες έχουν τη σχέση $R_2 = R_1/2$, περιστρέφονται με γωνιακές ταχύτητες $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ και στροφορμές \vec{L}_1, \vec{L}_2 γύρω από κοινό άξονα που περνά από τα κέντρα τους. Οι δίσκοι θα ολισθήσουν μεταξύ τους μέχρι να έρθουν σε επαφή και αποκτήσουν κοινή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ και στροφορμή \vec{L} .

α) Να βρεθεί η κοινή γωνιακή τους ταχύτητα ω .

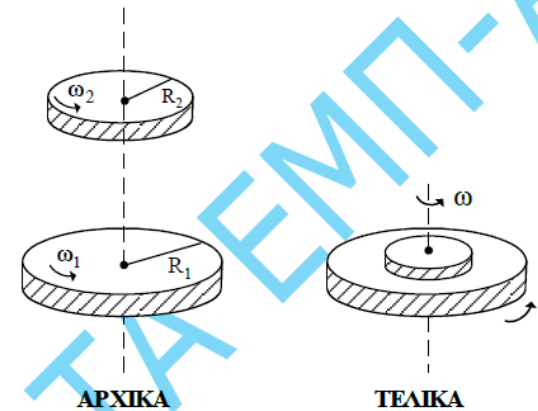
β) Να βρεθεί η απώλεια ενέργειας του συστήματος.

Δίνεται: $I_{\text{δισκου}} = MR^2/2$

$$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}} \Rightarrow I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = I_1\omega + I_2\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2} = \frac{(1/2)MR_1^2\omega_1 + (1/2)MR_2^2\omega_2}{(1/2)MR_1^2 + (1/2)MR_2^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{R_1^2\omega_1 + R_2^2\omega_2}{R_1^2 + R_2^2} \Rightarrow \omega = \frac{4\omega_1 + \omega_2}{5}$$



Παράδειγμα

Ένα σώμα μάζας m βρίσκεται προσκολλημένο στην περιφέρεια ενός οριζόντιου ομογενούς δίσκου μάζας M και ακτίνας R . Το σύστημα δίσκου – σώματος περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας του δίσκου χωρίς τριβές με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω και φορά αντίστροφη των δεικτών του ωρολογίου.

α) Να δοθούν σχηματικά τα διανύσματα της στροφορμής του δίσκου και του σώματος και να υπολογιστούν τα μέτρα αυτών των στροφορμών.

β) Αν κάποια χρονική στιγμή το σώμα αποκολληθεί από το δίσκο, θα μεταβληθεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου; Δικαιολογήστε.

Υπόδειξη: Θεωρείστε το σώμα ως σημειακή μάζα. Δίνεται η ροπή αδράνειας δίσκου ως προς άξονα συμμετρίας του κάθετο στο δίσκο: $I = MR^2/2$.

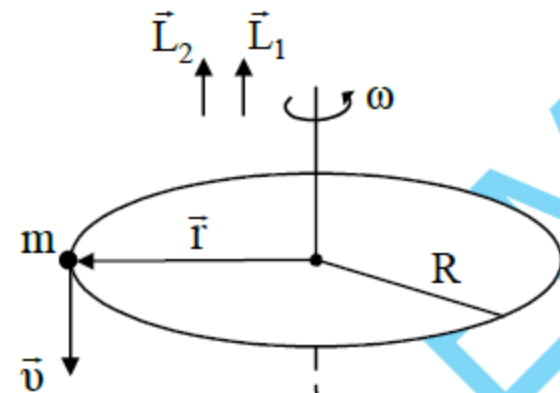
α) Η στροφορμή του δίσκου έχει μέτρο $L_1 = I\omega = (1/2)MR^2\omega$ και είναι ομόρροπη της γωνιακής ταχύτητας, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Η στροφορμή του σώματος δίνεται από τη σχέση: $\vec{L}_2 = m\vec{r} \times \vec{v}$

Δηλαδή το μέτρο της είναι:

$$L_2 = mRv \sin \pi/2 = mRv$$

$$L_2 = mR^2\omega$$



Παράδειγμα-συνέχεια



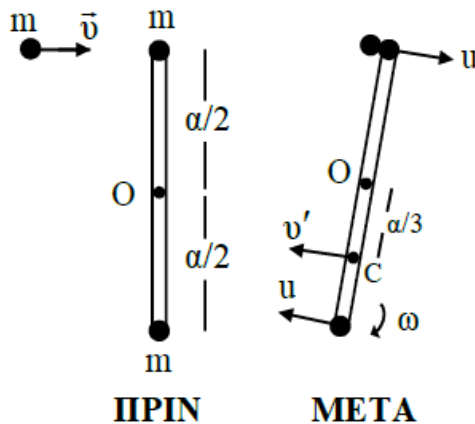
β) Στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές, οπότε η στροφορμή του παραμένει σταθερή. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει μετά την αποκόλληση του σώματος από το δίσκο να μεταβληθεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του. Αν ω' είναι η νέα γωνιακή ταχύτητα του δίσκου τότε ισχύει:

$$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}} \Rightarrow \frac{1}{2}MR^2\omega + mR^2\omega = \frac{1}{2}MR^2\omega' \Rightarrow \omega' = (1 + 2m/M)\omega$$

Παράδειγμα

Δύο ίσες σημειακές μάζες m είναι κολλημένες στα άκρα μιας ευθύγραμμης ομογενούς ράβδου με μάζα $M = 3m$ και μήκος a . Το αντικείμενο αυτό βρίσκεται επάνω σε ένα οριζόντιο τραπέζι και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές περί κατακόρυφο άξονα που περνά από το μέσο της ράβδου O . Αρχικά είναι ακίνητο. Ένα σώμα με σημειακή μάζα m κινείται, επάνω στο τραπέζι και κάθετα στη ράβδο, χωρίς τριβές με ταχύτητα \bar{v} , όπως στο σχήμα. Κατά την κρούση τα δύο σώματα κολλούν.

α) Να βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα του συσσωματώματος.



$$L = mrv \sin \theta \quad 1$$

α) Επειδή μετά την πλαστική κρούση των δύο σωμάτων το σύστημα εκτελεί περιστροφική κίνηση ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφομής ως προς το O . Δηλαδή:

$$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}} \Rightarrow m \frac{\alpha}{2} v \sin \frac{\pi}{2} =$$

$$= I_o \omega + 3m \frac{\alpha}{2} u \sin \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$u = \omega \alpha / 2$$

$$I_o = \frac{1}{12} M \alpha^2 = \frac{1}{12} 3m \alpha^2 \Rightarrow I_o = \frac{1}{4} m \alpha^2 \quad \text{η (1) δίνει:}$$

$$m \frac{\alpha}{2} v = \frac{1}{4} m \alpha^2 \omega + 3m \frac{\alpha}{2} \omega \frac{\alpha}{2} \Rightarrow v = \frac{\alpha}{2} \omega + \frac{3\alpha}{2} \omega = 2\alpha \omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{2\alpha}$$

Παράδειγμα

Σώμα μάζας m κινείται σε πεδίο δυνάμεων και η θέση του δίνεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{r} = a\cos\omega t\hat{x} + \beta\sin\omega t\hat{y}$

όπου a , β και ω είναι θετικές σταθερές και t ο χρόνος.

β) Να υπολογίσετε την ορμή του σώματος \vec{p} και τη στροφορμή του ως προς την αρχή των αξόνων \vec{L}

β) Η ταχύτητα του σώματος είναι:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -a\omega \sin \omega t \hat{x} + \beta\omega \cos \omega t \hat{y}$$

Άρα η ορμή του είναι: $\vec{p} = m\vec{v} = m\omega(-a \sin \omega t \hat{x} + \beta \cos \omega t \hat{y})$

και η στροφορμή του ως προς την αρχή των αξόνων είναι:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a \cos \omega t & \beta \sin \omega t & 0 \\ -a\omega \sin \omega t & \beta\omega \cos \omega t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= m(a\beta\omega \cos^2 \omega t + a\beta\omega \sin^2 \omega t)\hat{z} \Rightarrow \vec{L} = m\alpha\beta\omega\hat{z}$$

Παράδειγμα



γ) Να βρείτε τη δύναμη \vec{F} που ασκείται πάνω στο σώμα

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m(-\alpha\omega^2 \cos \omega t \hat{x} - \beta\omega^2 \sin \omega t \hat{y}) = \\ &= -m\omega^2 (\alpha \cos \omega t \hat{x} + \beta \sin \omega t \hat{y}) \Rightarrow \vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}\end{aligned}$$

Επιβεβαιώστε ότι είναι $\vec{r} \times \vec{F} = 0$,

Είναι: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (-m\omega^2 \vec{r}) = 0$ επειδή $\vec{r} \times \vec{r} = 0$ αφού $\vec{r} // \vec{r}$

Είναι αυτό το αποτέλεσμα συμβατό με την τιμή του \vec{L} που βρέθηκε στο ερώτημα (β);

Επειδή $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ και όπως υπολογίστηκε η \vec{L} είναι σταθερή προκύπτει επίσης ότι η ροπή είναι μηδέν, δηλαδή $\vec{\tau} = 0$.