Κεφάλαιο 1 Μετασχηματισμός Laplace

1.1 Εισαγωγή και ορισμός Μετασχηματισμός Laplace

1.1.1 Γενικευμένα Ολοκληρώματα

Έστω ότι η *f(t)* μία πραγματική ορισμένη στο διάστημα $a \le t < \infty$. Τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_a^{\infty} f(t)dt = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(t)dt$$

Ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα** (πρώτου είδους) της *f(t)*. Αν το όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπάρχει ή **συγκλίνει**. Αν το όριο δεν υπάρχει ή απειρίζεται τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα **αποκλίνει**.

Παράδειγμα

$$\int_1^{\infty}\frac{dt}{t} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dt}{t} = \lim_{b\to\infty}\left[\ln t\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\ln b = +\infty$$

Παράδειγμα

$\int_0^{\infty}\cos t dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \cos t dt = \lim_{b\to\infty}\left[\sin t\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\sin b$ το οποίο δεν υπάρχει επειδή στην περίπτωση όπου το *t* απειρίζεται η συνάρτηση *sin* κυμαίνεται μεταξύ 1 και -1.

Παράδειγμα

$$\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dt}{t^2} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^b = -\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}+1 = 1$$

Για τα γενικευμένα ολοκληρώματα αυτής της μορφής, ο τύπος της παραγοντικής ολοκλήρωσης έχει τη μορφή:

$$\int_a^{\infty} f'(t)g(t)dt = \lim_{t\to\infty} f(t)g(t) - f(a)g(a) - \int_a^{\infty} f(t)g'(t)dt$$

1.1.2 Ορισμός του μετασχηματισμού Laplace

Θεωρούμε το σύνολο A όλων των πραγματικών συναρτήσεων *f(t)* ορίζονται στο διάστημα $[0,+\infty]$ για τις οποίες υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$ και B το σύνολο όλων των πραγματικών *F(s)* συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένα διάστημα *I*.

Ορίζω την απεικόνιση $L\!:\!A\to B$ όπου σε κάθε συνάρτηση που υπάρχει το παραπάνω ολοκλήρωμα αντιστοιχώ μία συνάρτηση τέτοια ώστε

$$L\{f(t)\}(s) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Η απεικόνιση αυτή ονομάζεται **μετασχηματισμός Laplace.**

Το γενικευμένο αυτό ολοκλήρωμα είναι μία συνάρτηση του *s* για τις τιμές της μεταβλητής για την οποία υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα.

Η αντίστροφη απεικόνιση $L^{-1}:B\to A$ όπου $F\to L^{-1}\{F\}=f$ με $L^{-1}\{L(f)\}=f$ Η απεικόνιση αυτή ονομάζεται **αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace.**

Παράδειγμα Για τη συνάρτηση $f(t)=t$ βρείτε τον $L\{f(t)\}$

$$L\{t\}=\int_0^\infty e^{-st}tdt=\int_0^\infty t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)'dt=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{e^{-st}}{s}t\right)-\left(-\frac{e^{-s0}}{s}0\right)-\int_0^\infty\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)t'dt$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{e^{-st}}{s}t\right)=-\frac{1}{s}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{e^{st}}\right)\overset{\infty/\infty}{=}-\frac{1}{s}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{se^{st}}\right)=0$$

$$\int_0^\infty\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)dt=\frac{1}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}d(-st)=\frac{1}{s^2}\left(e^{-st}\right)_0^\infty=-\frac{1}{s^2}$$

Οπότε $L\{t\}=\frac{1}{s^2}$ και $L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}=t$ και αυτό ισχύει όταν $s>0$.

Όταν το $s\le 0$ γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν υπάρχει αφού για $s=0$ δεν ορίζεται και για αρνητικά s ισχύει

$$\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{e^{-st}}{s}t\right)=-\frac{1}{s}\lim_{t\to\infty}\left(e^{-st}t\right)=\infty$$

οπότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα απειρίζεται.

Παράδειγμα Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t)=e^t$

$$L\{e^t\}(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}e^tdt=\int_0^{+\infty}e^{-(s-1)t}dt=\lim_{k\to+\infty}\int_0^k e^{-(s-1)t}dt=\lim_{k\to+\infty}\frac{e^{-(s-1)k}-1}{-(s-1)}=\frac{1}{s-1},$$

αφού $\lim_{k\to+\infty}e^{-ak}=0$ εφόσον α>0 και δεν υπάρχει (απειρίζεται το όριο) όταν α<=0 (απειρίζεται το όριο όταν α<0 και για α=0 έχουμε απροσδιοριστία).

Οπότε $L\{e^t\}=\frac{1}{s-1}$, $\quad L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\}=e^t,(s>1)$

Παρόμοια αποδεικνύονται:

$L\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$	$L^{-1}\{\frac{n!}{s^{n+1}}\}=t^n,(s>0,n\in\mathbb{N})$
$L\{1\}=\frac{1}{s}$	$L^{-1}\{\frac{1}{s}\}=1$
$L\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}$	$L^{-1}\{\frac{1}{s-a}\}=e^{at},(s>a)$
$L\{sin(at)\}=\frac{a}{s^2+a^2}$	$L^{-1}\{\frac{a}{s^2+a^2}\}=sin(at),(s>0)$
$L\{cos(at)\}=\frac{s}{s^2+a^2}$	$L^{-1}\{\frac{s}{s^2+a^2}\}=cos(at),(s>0)$
$L\{sinh(at)\}=\frac{a}{s^2-a^2}$	$L^{-1}\{\frac{a}{s^2-a^2}\}=sinh(at),(s>\lvert a\rvert)$
$L\{cosh(at)\}=\frac{s}{s^2-a^2}$	$L^{-1}\{\frac{s}{s^2-a^2}\}=cosh(at),(s>\lvert a\rvert)$

Υπενθύμιση: $n! = 1\cdot 2\cdot ...\cdot (n-1)\cdot n,\quad 0! = 1, 1! = 1$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$(\sinh(ax))' = a\cosh(ax),\quad (\cosh(ax))' = a\sinh(ax),$$

$$\int \sinh(ax)dx = \frac{\cosh(ax)}{a} + c, \int \cosh(ax)dx = \frac{\sinh(ax)}{a} + c$$

Ύπαρξη μετασχηματισμού Laplace

Έστω ότι η $f(t)$ μία πραγματική ορισμένη στο διάστημα $0 \le a \le t < \infty$ τμηματικά συνεχής για την οποία για σταθερές γ, M, t_0 θετικές ισχύει $|f(t)| \le Me^{\gamma t}$ (εκθετική γ τάξης) $\forall t \ge t_0 \ge 0$, τότε ο μετασχηματισμός $L\{f(t)\}$ υπάρχει.

1.1.3 Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace

1.1.3.1 Γραμμικότητα

Οι απεικονίσεις Laplace και αντίστροφή της είναι **γραμμικές**, δηλαδή ισχύει:

$$L\{af(t) + bg(t)\} = aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\}$$

$$L^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = aL^{-1}\{F(s)\} + bL^{-1}\{G(s)\}$$

Παράδειγμα Βρείτε τον $L\{4t^2 - 3\sin(2t) + 5e^{-t}\}$

$$L\{4t^2 - 3\sin(2t) + 5e^{-t}\} = 4L\{t^2\} - 3L\{\sin(2t)\} + 5L\{e^{-t}\} = 4\frac{2}{s^3} - 3\frac{2}{s^2+2^2} + 5\frac{1}{s+1}$$

Παράδειγμα Βρείτε τον $L\{5\sin(3t) - 3\cos(3t)\}$

$$L\{5\sin(3t) - 3\cos(3t)\} = 5L\{\sin(3t)\} - 3L\{\cos(3t)\} = 5\frac{3}{s^2+3^2} - 3\frac{s}{s^2+3^2} = \frac{15-3s}{s^2+3^2}$$

Παράδειγμα Βρείτε τον $L^{-1}\{\frac{1}{s^{n+1}}\}$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^{n+1}}\} = \frac{1}{n!}L^{-1}\{\frac{n!}{s^{n+1}}\} = \frac{t^n}{n!},\quad \text{n=0,1,2,...}$$

Παράδειγμα Βρείτε τον $L^{-1}\{\frac{3}{s-2} - \frac{7s}{s^2+9} + \frac{2}{s^2+5}\}$

$$L^{-1}\{\frac{3}{s-2} - \frac{7s}{s^2+9} + \frac{2}{s^2+5}\} = L^{-1}\{\frac{3}{s-2}\} - L^{-1}\{\frac{7s}{s^2+9}\} + L^{-1}\{\frac{2}{s^2+5}\} =$$

$$= 3L^{-1}\{\frac{1}{s-2}\} - 7L^{-1}\{\frac{s}{s^2+3^2}\} + \frac{2}{\sqrt{5}}L^{-1}\{\frac{\sqrt{5}}{s^2+(\sqrt{5})^2}\} = 3e^{2t} - 7\cos(3t) + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}t)$$

Παράδειγμα Βρείτε τον $L^{-1}\{\frac{2s-9}{s^2-9}\}$

$$L^{-1}\{\frac{2s-9}{s^2-9}\} = 2L^{-1}\{\frac{s}{s^2-3^2}\} - 3L^{-1}\{\frac{3}{s^2-3^2}\} = 2\cosh(3t) - 3\sinh(3t)$$

Εναλλακτικά

$$L^{-1}\{\frac{2s-9}{s^2-9}\} = L^{-1}\{\frac{2s-6-3}{s^2-3^2}\} = L^{-1}\{\frac{2s-6}{s^2-3^2}\} - L^{-1}\{\frac{3}{s^2-3^2}\} =$$

$$= L^{-1}\{\frac{2(s-3)}{(s-3)(s+3)}\} - L^{-1}\{\frac{3}{s^2-3^2}\} = 2L^{-1}\{\frac{1}{(s+3)}\} - L^{-1}\{\frac{3}{s^2-3^2}\} =$$

$$= 2L^{-1}\{\frac{1}{(s+3)}\} - L^{-1}\{\frac{3}{s^2-3^2}\} = 2e^{-3t} - \sinh(3t)$$

Οι δύο εκφράσεις είναι ισοδύναμες:

$$2\cosh\left(3t\right) - 3\sinh(3t) = 2\cosh\left(3t\right) - 2\sinh(3t) - \sinh(3t) =$$

$$= 2\left(\cosh\left(3t\right) - \sinh(3t)\right) - \sinh(3t) = 2\left(\frac{e^{3t}+e^{-3t}}{2} - \frac{e^{3t}-e^{-3t}}{2}\right) - \sinh(3t) =$$

$$= 2\left(\frac{2e^{-3t}}{2}\right) - \sinh(3t) = 2e^{-3t} - \sinh(3t)$$

1.1.3.2 Θεωρήματα μετατόπισης

1^{o} Θεώρημα μετατόπισης:

Ισχύουν οι κάτωθι ιδιότητες της **μετατόπισης**:

$$L\{e^{at} f(t)\} = L\{f(t)\}\Big|_{s\to s-a} = F(s)\Big|_{s\to s-a} = F(s-a)$$

$$L^{-1}\{F(s-a)\} = L^{-1}\{F(s)\Big|_{s\to s-a}\} = e^{at} L^{-1}\{F(s)\} = e^{at} f(t)$$

Παράδειγμα Βρείτε τον $L\{e^{-2t}t^3\}$

$$L\{e^{-2t}t^3\} = L\{t^3\}\Big|_{s\to s-(-2)} = \frac{3!}{s^4}\Bigg|_{s\to s+2} = \frac{3!}{(s+2)^4}$$

Παράδειγμα Βρείτε τον $L\{e^{2t}(3\sin(4t) - 4\cos(4t))\}$

$$L\{e^{2t}(3\sin(4t) - 4\cos(4t))\} = L\{3\sin(4t) - 4\cos(4t)\}\Big|_{s\to s-2} =$$

$$= 3L\{\sin(4t)\}\Big|_{s=s-2} - 4L\{\cos(4t)\}\Big|_{s\to s-2} =$$

$$= 3\frac{4}{s^2+4^2}\Bigg|_{s\to s-2} - 4\frac{s}{s^2+4^2}\Bigg|_{s\to s-2} =$$

$$= \frac{12}{(s-2)^2+4^2} - \frac{4(s-2)}{(s-2)^2+4^2}$$

Παράδειγμα Βρείτε τον $L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^5}\}$

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^5}\} = L^{-1}\{\frac{1}{s^5}\}\Bigg|_{s\to s+1} = e^{-t}L^{-1}\{\frac{1}{s^5}\} = \frac{e^{-t}}{4!}L^{-1}\{\frac{4!}{s^5}\} = \frac{e^{-t}}{4!}t^4$$

Παράδειγμα Περίπτωση που ο παρονομαστής μιας ρητής παράστασης δεν αναλύεται σε παράγοντες (στο παρακάτω παράδειγμα η διακρίνουσα του παρονομαστή είναι αρνητική) και ο αριθμητής έχει βαθμό μικρότερο από τον παρονομαστή.

Βρείτε τον $L^{-1}\{\frac{3s-14}{s^2-4s+8}\}$

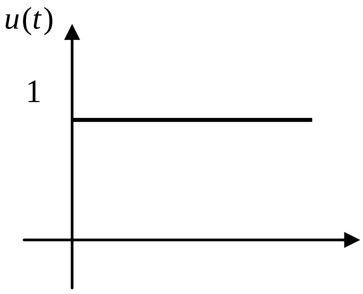
$$L^{-1}\{\frac{3s-14}{s^2-4s+8}\} = L^{-1}\{\frac{3s-14}{s^2-4s+4-4+8}\} = L^{-1}\{\frac{3s-14}{(s-2)^2+2^2}\} = L^{-1}\{\frac{3(s-2)-8}{(s-2)^2+2^2}\} =$$

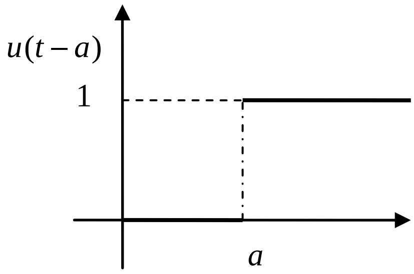
$$= L^{-1}\{\frac{3s-8}{s^2+2^2}\}\Bigg|_{s\to s-2} = e^{2t}L^{-1}\{\frac{3s-8}{s^2+2^2}\} = e^{2t}(3L^{-1}\{\frac{s}{s^2+2^2}\} - \frac{8}{2}L^{-1}\{\frac{2}{s^2+2^2}\}) =$$

$$= e^{2t}(3\cos(2t) - 4\sin(2t))$$

Η μονοβηματική μοναδιαία συνάρτηση ή συνάρτηση του Heaviside ορίζεται ως εξής:

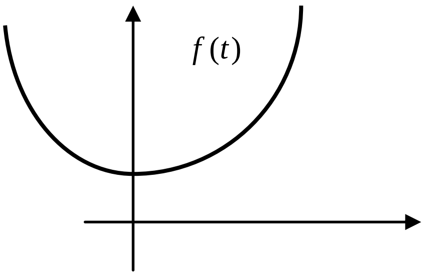
$$u(t-a) = \begin{cases} 1 & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

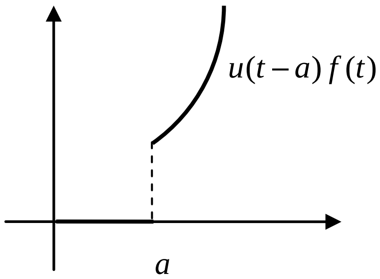




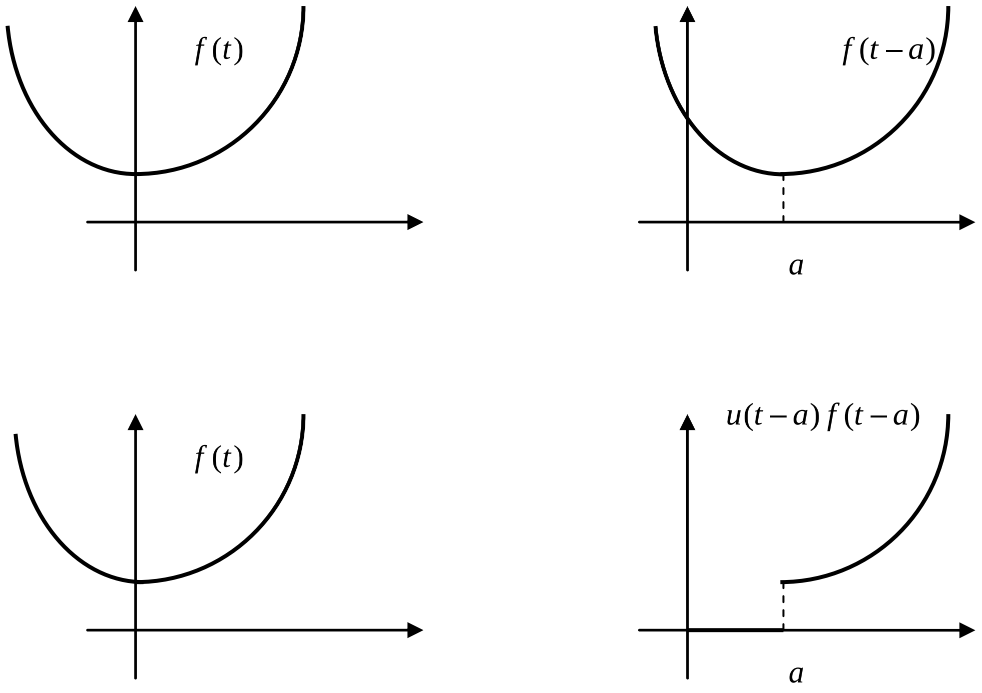
Η συνάρτηση $u(t-a)\,f(t)$ για $t>0$.

Εάν πολλαπλασιάσουμε μία συνάρτηση με τη συνάρτηση $u(t-a)$ μηδενίζονται οι τιμές της συνάρτησης πριν από το α και για $t>0$, δηλαδή έχουμε την παρακάτω επίδραση στη συνάρτηση:





Η συνάρτηση $u(t-a)\,f(t-a)$ **για** $t>0$ **θα την ονομάζουμε** η **μετατόπιση της** ***f(t)*** **προς τα δεξιά κατά** ***α*** μιας και μετατοπίζει την *f(t)* προς τα δεξιά κατά *α* και μηδενίζει τις τιμές της συνάρτησης πριν από το α και για $t>0$, δηλαδή έχουμε την παρακάτω επίδραση στη συνάρτηση:



Οι παρακάτω σχέσεις είναι γνωστές και ως **2ο Θεώρημα Μετατόπισης**.

Αν $L\{f(t)\} = F(s)$ και $u(t-a)f(t-a) = \begin{cases} f(t-a) & t \geq a \\ 0 & 0 \leq t < a \end{cases}$ τότε ισχύουν οι κάτωθι ιδιότητες:

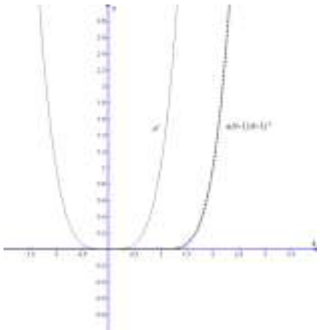
$$L\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}L\{f(t)\} = e^{-as}F(s)$$
$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = u(t-a)f(t-a)$$

Παραδείγματα:
α) Εάν εφαρμόσουμε το 2ο Θεώρημα Μετατόπισης στην $f(t) = 1$ ισχύουν:

$$L\{u(t-a)\} = e^{-as}L\{1\} = e^{-as}\frac{1}{s} \text{ και } L^{-1}\{\frac{e^{-as}}{s}\} = u(t-a)\,.$$

Επίσης ισχύει για $a = 0$, $L\{t\,u(t)\} = e^{-0s}L\{\mathrm{t}\} = \frac{1}{s^2}$ και γενικά $L\{(\mathrm{t}-\alpha)u(t-\alpha)\} = e^{-\alpha s}L\{\mathrm{t}\} = \frac{e^{-\alpha s}}{s^2}$.
Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω έχουμε

$$L\{tu(t) - tu(t-\alpha)\} = L\{tu(t) - tu(t-\alpha) + \alpha u(t-\alpha) - \alpha u(t-\alpha)\} =$$
$$= L\{tu(t)\} - L\{(t-\alpha)u(t-\alpha)\} + \alpha L\{u(t-\alpha)\} = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-\alpha s}}{s^2} - \alpha\frac{e^{-\alpha s}}{s}$$



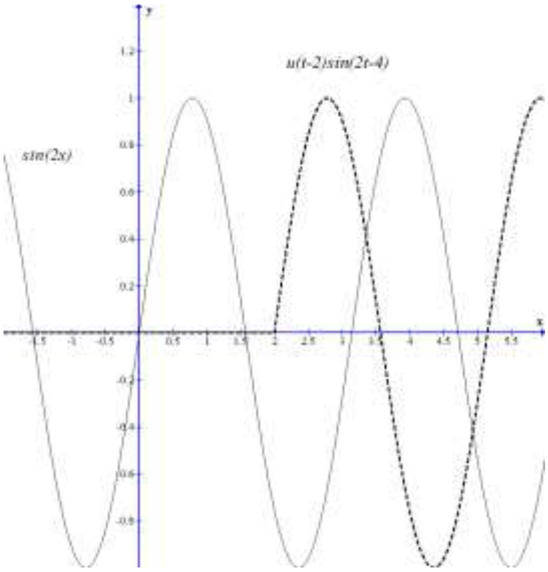
β) Αν $u(t-1)(t-1)^4 = \begin{cases} (t-1)^4 & t \geq 1 \\ 0 & 0 \leq t < 1 \end{cases}$

τότε $L\{u(t-1)(t-1)^4\} = e^{-s}L\{t^4\} = e^{-s}\dfrac{4!}{s^5}$

γ) Επίσης

$$L\{u(t-2)\sin(2t-4)\} = L\{u(t-2)\sin(2(t-2))\} =$$

$$= e^{-2s}L\{\sin(2t)\} = e^{-2s}\frac{2}{s^2+4}$$



δ) $L^{-1}\{\dfrac{e^{-3s}}{s^2+1}\} = L^{-1}\{e^{-3s}\dfrac{1}{s^2+1}\} = u(t-3)\sin(t-3) = \begin{cases} \sin(t-3) & t \geq 3 \\ 0 & 0 \leq t < 3 \end{cases}$

αφού ισχύει $L\{\dfrac{1}{s^2+1}\} = \sin(t)$.

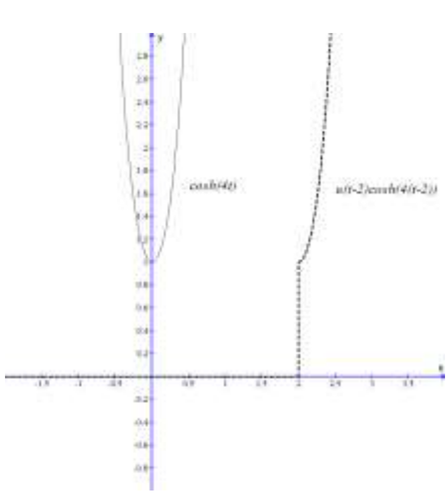
στ) $L^{-1}\left\{\dfrac{6e^{-4s}}{s}\right\} = 6u(t-4)\cdot 1 = 6u(t-4)$

αφού ισχύει $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} = 1$ και $f(t-4) = 1$ για $f(t) = 1$.

ζ) $L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}s}{s^2-16}\right\} = u(t-2)\cosh(4(t-2)) = u(t-2)\cosh(4t-8)$

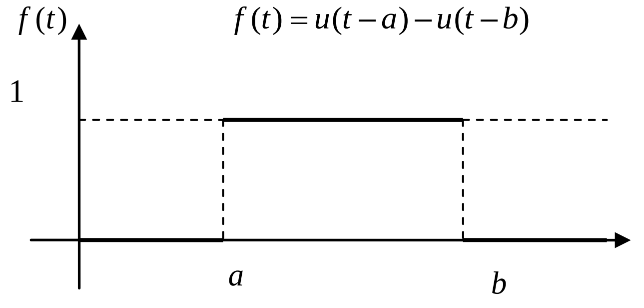
αφού ισχύει $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-16}\right\} = \cosh(4t)$ και

$f(t-2) = \cosh(4(t-2))$ για $f(t) = \cosh(4t)$



Εφαρμογή: Η συνάρτηση ορθογώνιου παλμού ή συνάρτηση φίλτρου.

$$f(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<a\\ 1 & a<t<b\\ 0 & t\ge b\end{cases}$$



τότε

$$L\{f(t)\}=L\{u(t-a)-u(t-b)\}=\frac{e^{-as}-e^{-bs}}{s}$$

Παραδείγματα:

Βρείτε και σχεδιάστε τη συνάρτηση $f(t)=L^{-1}\left\{\frac{2}{s}+\frac{5e^{-s}}{s^2}+\frac{2e^{-2s}}{s^2}\right\},\ \ t\ge 0$

$L^{-1}\left\{\frac{2}{s}\right\}=2L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=2\cdot 1\Big|_{t\ge 0}=2u(t)$

$L^{-1}\left\{\frac{5e^{-s}}{s^2}\right\}=5u(t-1)f(t-1)$ όπου $f(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t$ οπότε $f(t-1)=t-1$

και τελικά

$$L^{-1}\left\{\frac{5e^{-s}}{s^2}\right\}=5u(t-1)(t-1)$$

$L^{-1}\left\{\frac{2e^{-2s}}{s^2}\right\}=2u(t-2)f(t-2)$ όπου $f(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t$ οπότε $f(t-2)=t-2$

και τελικά

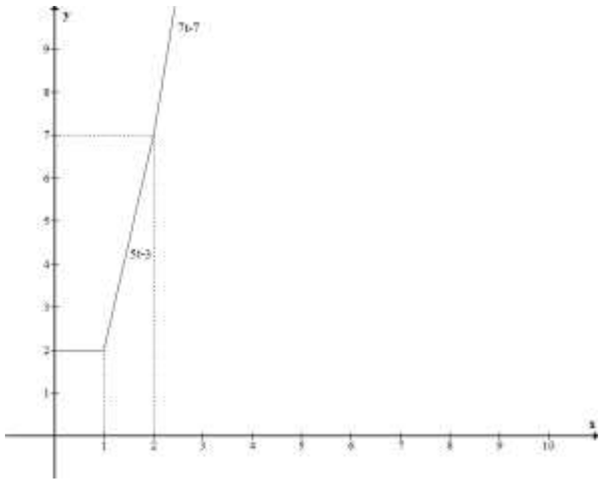
$$f(t)=L^{-1}\left\{\frac{2e^{-2s}}{s^2}\right\}=2u(t-2)(t-2)$$

Άρα $f(t)=L^{-1}\left\{\frac{2}{s}+\frac{5e^{-s}}{s^2}+\frac{2e^{-2s}}{s^2}\right\}=2u(t)+5u(t-1)(t-1)+2u(t-2)(t-2)$

Οπότε η συνάρτηση είναι:

$$f(t)=\begin{cases}2+0+0 & \text{για } 0\le t<1\\ 2+5(t-1)+0 & \text{για } 1\le t<2\\ 2+5(t-1)+2(t-2) & \text{για } t\ge 2\end{cases}=\begin{cases}2 & \text{για } 0\le t<1\\ 5t-3 & \text{για } 1\le t<2\\ 7t-7 & \text{για } t\ge 2\end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι:



1.1.3.3 Άλλες ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

Αν $L\{f(t)\} = F(s)$, ισχύουν οι κάτωθι ιδιότητες:

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$L^{-1}\{F(as)\} = \frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)$$

Παράδειγμα Είχαμε δείξει, με τη χρήση του ορισμού του Μετασχηματισμού Laplace, ότι ισχύει $L\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$, οπότε με τη χρήση της παραπάνω ιδιότητας έχουμε:

$$L\{e^{at}\} = L\{e^t\big|_{t\to at}\} = \frac{1}{a}L\{e^t\}\big|_{s\to\frac{s}{a}} = \frac{1}{a}\frac{1}{s-1}\bigg|_{s\to\frac{s}{a}} = \frac{1}{a}\frac{1}{\frac{s}{a}-1} = \frac{1}{a}\frac{a}{s-a} = \frac{1}{s-a}$$

Παράδειγμα

$$L\{\cos(4t)\} = L\{\cos(t)\big|_{t\to 4t}\} = \frac{1}{4}L\{\cos(t)\}\big|_{s\to\frac{s}{4}} = \frac{1}{4}\frac{s}{(s)^2+1}\bigg|_{s\to\frac{s}{4}} = \frac{1}{4}\frac{\frac{s}{4}}{\left(\frac{s}{4}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{16}\frac{16s}{s^2+16} = \frac{s}{s^2+16}$$

Παράδειγμα

$$L^{-1}\{\frac{4}{s^2+16}\} = L^{-1}\{\frac{1}{4}\frac{16}{s^2+16}\} = \frac{1}{4}L^{-1}\{\frac{1}{\left(\frac{s}{4}\right)^2+1}\} = \frac{1}{4}L^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\bigg|_{s\to\frac{s}{4}}\} = \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{1}{4}}\sin\left(\frac{t}{\frac{1}{4}}\right) = \sin(4t)$$

1.1.3.4 Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace που εμπλέκουν την παράγωγο ή το ολοκλήρωμα συνάρτησης

Για τον μετασχηματισμό Laplace παραγώγου συνάρτησης ισχύει:

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$$

$$L\{f''(t)\} = s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

και γενικά

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Παράδειγμα $L\{\cos'(t)\} = sL\{\cos(t)\} - \cos(0) = s\frac{s}{s^2+1} - 1 = -\frac{1}{s^2+1}$

Παράδειγμα $L\{\sin'(t)\} = sL\{\sin(t)\} - \sin(0) = s\frac{1}{s^2+1} - 0 = \frac{s}{s^2+1}$

Παρατήρηση: Εάν η συνάρτηση είναι ορισμένη στο διάστημα $(0,+\infty)$ τότε στους παραπάνω τύπους το $f(0)$ (και οι αντίστοιχες παράγωγοι στο 0) αντικαθίστανται με το $f(0+) = \lim_{t\to 0+} f(t)$ (ανάλογα και οι αντίστοιχες παράγωγοι στο $0+$)

Για τον αντίστροφο μετασχηματισμό η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\text{Αν } f(0)=0, \text{ τότε } \quad L^{-1}\{sF(s)\} = \left(L^{-1}\{F(t)\}\right)' = f'(t)$$

Παράδειγμα $L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\} = L^{-1}\{s\frac{1}{s^2+1}\} \underset{f(0)=\sin 0=0}{=} \left(L^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}\right)' = \sin'(t) = \cos t$

Επίσης

Αν $L\{f(t)\} = F(s)$, ισχύουν οι κάτωθι ιδιότητες:

$$L\{t\cdot f(t)\} = -F(s)'$$

$$L^{-1}\{F(s)'\} = -t\cdot f(t)$$

και γενικά

$$L\{t^\nu f(t)\} = (-1)^\nu \left(L\{f(t)\}\right)^{(\nu)} = (-1)^\nu F(s)^{(\nu)}$$

$$L^{-1}\{F(s)^{(\nu)}\} = (-1)^\nu t^\nu L^{-1}\{F(s)\} = (-1)^\nu t^\nu f(t)$$

Παράδειγμα

$$L\{t\sinh(2t)\} = -\left(L\{\sinh(2t)\}\right)' = -\left(\frac{2}{s^2-2^2}\right)' = -(-1)\frac{2\left(s^2-4\right)'}{\left(s^2-4\right)^2} = \frac{4s}{\left(s^2-4\right)^2}$$

Παράδειγμα

$$L\{t^2\sin(3t)\} = (-1)^2\left(L\{\sin(3t)\}\right)'' = \left(\frac{3}{s^2+3^2}\right)'' = \left(-\frac{3\left(s^2+9\right)'}{\left(s^2+9\right)^2}\right)' = -6\left(\frac{s}{\left(s^2+9\right)^2}\right)' =$$

$$= -6\frac{\left(s^2+9\right)^2 - s2\left(s^2+9\right)2s}{\left(s^2+9\right)^4} = -6\frac{\left(s^4+18s^2+81\right)-4s^4-36s^2}{\left(s^2+9\right)^4} = 18\frac{s^4+6s^2-27}{\left(s^2+9\right)^4} =$$

$$= 18\frac{\left(s^2-3\right)\left(s^2+9\right)}{\left(s^2+9\right)^4} = 18\frac{\left(s^2-3\right)}{\left(s^2+9\right)^3}$$

Παράδειγμα

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\} = -L^{-1}\{-\frac{1}{s^2}\} = -L^{-1}\{\left(s^{-1}\right)'\} = -\left(-tL^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}\right) = t\cdot 1 = t$$

Φυσικά τον ίδιο μετασχηματισμό τον έχουμε δει και με άλλο τρόπο.

Επίσης ισχύει:

$$\boxed{\begin{gathered} L\{\int_0^t f(u)du\} = \frac{L\{f(t)\}}{s} = \frac{F(s)}{s} \\ L^{-1}\{\frac{F(s)}{s}\} = \int_0^t L^{-1}\{F(s)\}du = \int_0^t f(u)du \end{gathered}}$$

Παράδειγμα

$$L\{\int_0^t \cos(4u)du\} = \frac{L\{\cos(4t)\}}{s} = \frac{1}{s}\frac{s}{s^2+16} = \frac{1}{s^2+16}$$

Που πράγματι ισχύει διότι,

$$\int_0^t \cos(4u)du = \left[\frac{\sin(4u)}{4}\right]_0^t = \frac{\sin(4t)}{4} \text{ και } L\{\frac{\sin(4t)}{4}\} = \frac{1}{4}\frac{4}{\left(s^2+16\right)} = \frac{1}{\left(s^2+16\right)}.$$

Παράδειγμα

$$L\{\int_0^t \sinh(2u)du\} = \frac{L\{\sinh(2t)\}}{s} = \frac{1}{s}\frac{2}{s^2-2^2} = \frac{2}{s\left(s^2-4\right)}$$

Που πράγματι ισχύει διότι,

$$\int_0^t \sinh(2u)du = \int_0^t \left(\frac{\cosh(2u)}{2}\right)' du = \left[\frac{\cosh(2u)}{2}\right]_0^t = \frac{\cosh(2t)-1}{2} \text{ και}$$

$$L\{\frac{\cosh(2t)-1}{2}\} = \frac{L\{\cosh(2t)\}-L\{1\}}{2} = \frac{\frac{s}{s^2-2^2}-\frac{1}{s}}{2} = \frac{\frac{s^2-s^2+2^2}{s\left(s^2-2^2\right)}}{2} = \frac{2}{s\left(s^2-4\right)}$$

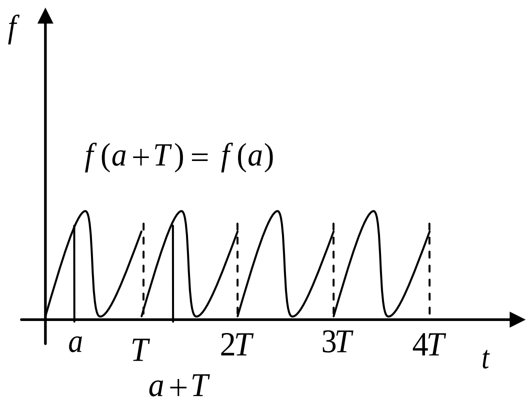
Παράδειγμα

$$L^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+4)}\} = L^{-1}\{\frac{\frac{1}{s^2+4}}{s}\} = \int_0^t L^{-1}\{\frac{1}{s^2+4}\}du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t L^{-1}\{\frac{2}{s^2+2^2}\}du = \frac{1}{2}\int_0^t \sin\left(2u\right)du = -\frac{1}{4}\cos(2u)\Big|_0^t = \frac{1}{4}(1-\cos(2t))$$

1.1.3.5 Μετασχηματισμός Laplace περιοδικής συνάρτησης

Μία συνάρτηση ονομάζεται περιοδική με περίοδο Τ εάν ισχύει $f(t+nT)=f(t),\ \ \forall n\in N,\ \ \forall t\in R$. Το γράφημα μίας περιοδικής συνάρτησης έχει τη μορφή:



Στην βασική περίοδο μία τέτοια συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\bar{f}(t)=\begin{cases} f(t) & 0\le t<T \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Στη δεύτερη περίοδο η συνάρτηση μπορεί να περιγραφεί με τη βοήθεια της συνάρτησης του **Heaviside** ως εξής:

$$\bar{f}(t-T)u(t-T)=\begin{cases} f(t) & T\le t<2T \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Παρόμοια στην 3^{η} περίοδο:

$$\bar{f}(t-2T)u(t-2T)=\begin{cases} f(t) & 2T\le t<3T \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Στην 4^{η}

$$\bar{f}(t-3T)u(t-3T)=\begin{cases} f(t) & 3T\le t<4T \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Οπότε η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως

$$f(t)=\bar{f}(t)u(t)+\bar{f}(t-T)u(t-T)+\bar{f}(t-2T)u(t-2T)+\bar{f}(t-3T)u(t-3T)+....$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της $\bar{f}(t)$ με βάση τον ορισμό ισούται:

$$L\{\bar{f}(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\bar{f}(t)dt=\int_0^T e^{-st}f(t)dt$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$L\{f(t)\}=L\{\bar{f}(t)u(t)\}+L\{\bar{f}(t-T)u(t-T)\}+L\{\bar{f}(t-2T)u(t-2T)\}+L\{\bar{f}(t-3T)u(t-3T)\}+....$$

Από το 2^{o} θεώρημα Μετατόπισης έχουμε

$$L\{u(t-nT)\bar{f}(t-nT)\}=e^{-nTs}L\{\bar{f}(t)\}=e^{-nTs}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$$

Οπότε ισχύει:

$$L\{f(t)\} = L\{\overline{f}(t)\} + e^{-Ts}L\{\overline{f}(t)\} + e^{-2Ts}L\{\overline{f}(t)\} + e^{-3Ts}L\{\overline{f}(t)\} + ... \Leftrightarrow$$

$$L\{f(t)\} = (1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + e^{-3Ts} + ...)L\{\overline{f}(t)\} = (1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + e^{-3Ts} + ...)\int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

Από την άλγεβρα είναι γνωστό ότι:

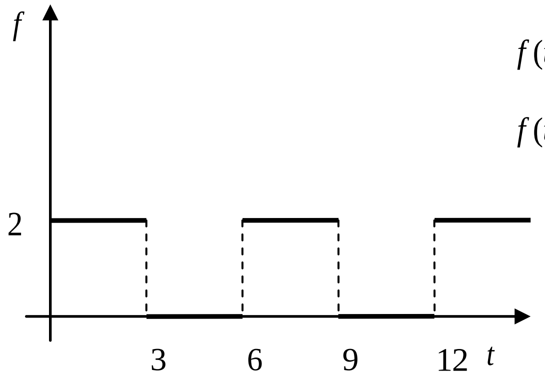
$$(1 + x + x^2 + x^3 + ...) = (1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x}$$

Οπότε $1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + ... = \left(1 - e^{-sT}\right)^{-1} = \frac{1}{1-e^{-sT}}$ από όπου συμπεραίνουμε το ακόλουθο:

Εάν η συνάρτηση *f(t)* είναι περιοδική με περίοδο T τότε

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)dt}{1-e^{-sT}}$$

Παράδειγμα



$$f(t) = \begin{cases} 2 & 0 \le t < 3 \\ 0 & 3 \le t < 6 \end{cases}$$

$$f(t+6) = f(t)$$

Για την παραπάνω περιοδική συνάρτηση με περίοδο T=6 οπότε έχουμε

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^6 e^{-st} f(t)dt}{1-e^{-6s}} = \frac{\int_0^3 e^{-st} 2dt}{1-e^{-6s}}$$

$$\int_0^3 e^{-st} 2dt = 2\int_0^3 e^{-st}dt = 2\int_0^3 \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)' dt = 2\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_0^3 = 2\frac{1-e^{-3s}}{s}$$

$$L\{f(t)\} = \frac{2\frac{1-e^{-3s}}{s}}{1-e^{-6s}} = 2\frac{1-e^{-3s}}{s\left(1-e^{-6s}\right)} = 2\frac{1-e^{-3s}}{s\left(1-\left(e^{-3s}\right)^2\right)} = 2\frac{\left(1-e^{-3s}\right)}{s\left(1-e^{-3s}\right)\left(1+e^{-3s}\right)} = \frac{2}{s\left(1+e^{-3s}\right)}$$

Παράδειγμα Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace $L^{-1}\{\frac{1-e^{-3s}}{s\left(1-e^{-4s}\right)}\}$ και σχεδιάστε για $t \ge 0$ την συνάρτηση που βρήκατε.

Ο όρος $\frac{1}{\left(1-e^{-4s}\right)}$ μας οδηγεί να σκεφτούμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική (και μάλιστα με περίοδο 4.

Ανάλογα με τα όσα είπαμε παραπάνω ισχύει:

$$\frac{1}{\left(1-e^{-4s}\right)}=\left(1-e^{-4s}\right)^{-1}=1+e^{-4s}+\left(e^{-4s}\right)^{2}+\left(e^{-4s}\right)^{3}+....=1+e^{-4s}+e^{-8s}+e^{-12s}+....$$

Δηλαδή,

$$\frac{1-e^{-3s}}{s\left(1-e^{-4s}\right)}=\frac{1}{s}\left(1-e^{-3s}\right)\left(1+e^{-4s}+e^{-8s}+e^{-12s}+....\right)=$$

$$=\frac{1}{s}\left(1+e^{-4s}+e^{-8s}+e^{-12s}+....-e^{-3s}-e^{-7s}-e^{-11s}-e^{-15s}+...\right)=$$

$$=\frac{1}{s}\left(1-e^{-3s}+e^{-4s}-e^{-7s}+e^{-8s}-e^{-11s}+e^{-12s}-e^{-15s}+....\right)$$

Οπότε

$$L^{-1}\{\frac{1-e^{-3s}}{s\left(1-e^{-4s}\right)}\}=L^{-1}\{\frac{1}{s}-\frac{e^{-3s}}{s}+\frac{e^{-4s}}{s}-\frac{e^{-7s}}{s}+\frac{e^{-8s}}{s}-\frac{e^{-11s}}{s}+\frac{e^{-12s}}{s}-\frac{e^{-15s}}{s}+....\}=$$

$$=L^{-1}\{\frac{1}{s}\}-L^{-1}\{\frac{e^{-3s}}{s}\}+L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{s}\}-L^{-1}\{\frac{e^{-7s}}{s}\}+L^{-1}\{\frac{e^{-8s}}{s}\}-L^{-1}\{\frac{e^{-11s}}{s}\}+L^{-1}\{\frac{e^{-12s}}{s}\}-...=$$

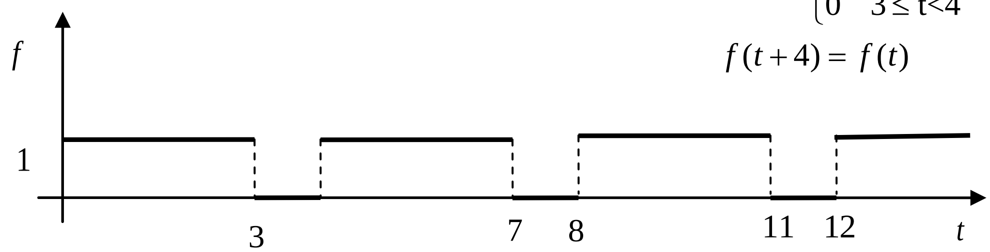
$$=u(t)-u(t-3)+u(t-4)-u(t-7)+u(t-8)-u(t-11)+u(t-12)-u(t-15)+....$$

Αφού ισχύει $L^{-1}\{\frac{1}{s}\}=1=f(t)$ και $L^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\}=u(t-a)f(t-a)=u(t-a)$

Οπότε το γράφημα της συνάρτησης είναι:

$$f(t)=\begin{cases}1 & 0\leq t<3\\ 0 & 3\leq t<4\end{cases}$$

$$f(t+4)=f(t)$$



Παράδειγμα Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace $L^{-1}\{\frac{3}{s\left(1+e^{-2s}\right)}\}$ και σχεδιάστε για $t\geq 0$ την συνάρτηση που βρήκατε.

Ανάλογα με τα όσα είπαμε παραπάνω ισχύει:

$$\frac{1}{\left(1-(-e^{-2s})\right)}=\left(1-(-e^{-2s})\right)^{-1}=1-e^{-2s}+\left(-e^{-2s}\right)^{2}+\left(-e^{-2s}\right)^{3}+\left(-e^{-2s}\right)^{4}+....=$$
$$=1-e^{-2s}+e^{-4s}-e^{-6s}+e^{-8s}-....$$

Οπότε

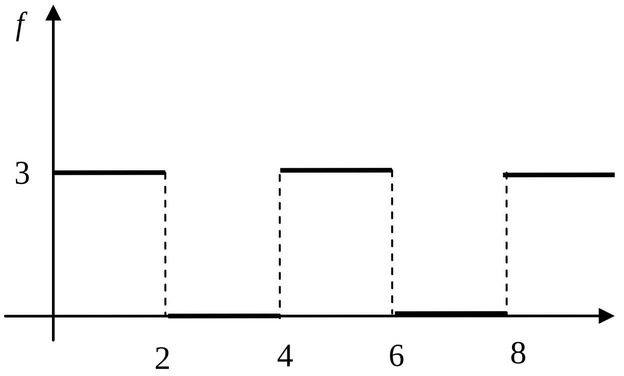
$$\frac{3}{s\left(1+e^{-2s}\right)}=\frac{3}{s}\left(1-e^{-2s}+e^{-4s}-e^{-6s}+e^{-8s}-....\right)$$

και

$$L^{-1}\{\frac{3}{s\left(1+e^{-2s}\right)}\}=L^{-1}\{\frac{3}{s}-\frac{3e^{-2s}}{s}+\frac{3e^{-4s}}{s}-\frac{3e^{-6s}}{s}+\frac{3e^{-8s}}{s}-....\}=$$
$$=3L^{-1}\{\frac{1}{s}\}-3L^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{s}\}+3L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{s}\}-3L^{-1}\{\frac{e^{-6s}}{s}\}+3L^{-1}\{\frac{e^{-8s}}{s}\}-....=$$
$$=3u(t)-3u(t-2)+3u(t-4)-3u(t-6)+3u(t-8)-....$$

Αφού ισχύει $L^{-1}\{\frac{1}{s}\}=1=f(t)$ και $L^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\}=u(t-a)f(t-a)=u(t-a)$

Οπότε το γράφημα της συνάρτησης είναι:



$$f(t)=\begin{cases}3 & 0\le t<2\\ 0 & 2\le t<4\end{cases}$$
$$f(t+4)=f(t)$$

1.1.3.6 Μετασχηματισμός Laplace Συνέλιξης συναρτήσεων

Αν οι συναρτήσεις *f(t), g(t),* είναι συνεχείς ή κατά τμήματα συνεχείς για $t\ge 0$ ορίζουμε **συνέλιξη** *f(t)*g(t)* των δύο συναρτήσεων

$$(f*g)(t)=f(t)*g(t)=\int_0^t f(u)g(t-u)du$$

Για τη συνέλιξη ισχύουν τα εξής:

$$(f*g)(t)=(g*f)(t)$$
$$L\{\left(f*g\right)(t)\}=L\{f(t)\}\cdot L\{g(t)\}=F(s)\cdot G(s)$$
$$L^{-1}\{F(s)\cdot G(S)\}=L^{-1}\{F(s)\}*L^{-1}\{G(s)\}=f(t)*g(t)$$

Παράδειγμα

$$L^{-1}\{\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2}\}=\frac{1}{a}L^{-1}\{\frac{a}{s^2+a^2}\cdot\frac{s}{s^2+a^2}\}=\frac{1}{a}L^{-1}\{\frac{a}{s^2+a^2}\}*L^{-1}\{\frac{s}{s^2+a^2}\}=$$

$$=\frac{1}{a}\sin\left(at\right)*\cos at=\frac{1}{a}\int_0^t \sin\left(au\right)\cos(a(t-u))du=\frac{1}{2a}\int_0^t 2\sin\left(au\right)\cos(a(t-u))du=$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^t \sin(au+(at-au))+\sin(au-(at-au))du=$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^t \left(\sin(at)+\sin(2au-at)\right)du=\frac{1}{2a}\left[\sin(at)u-\frac{\cos(2au-at)}{2a}\right]_0^t=$$

$$=\frac{1}{2a}\left(\sin(at)t-\frac{\cos(2at-at)}{2a}\right)-\frac{1}{2a}\left(\sin(at)0-\frac{\cos(2a0-at)}{2a}\right)=$$

$$=\frac{1}{2a}\left(\sin(at)t-\frac{\cos(at)}{2a}+\frac{\cos(at)}{2a}\right)=\frac{t\sin(at)}{2a}$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε την $2\sin A\cos B=\sin\left(A+B\right)+\sin(A-B)$

1.2 Η μέθοδος του Heavyside και ο Μετασχηματισμός Laplace

1.2.1 Ανάλυση Ρητής συνάρτησης σε απλά κλάσματα

1. Περίπτωση που ο παρονομαστής μιας ρητής παράστασης αναλύεται σε παράγοντες πρώτου βαθμού, όπου δεν υπάρχουν κοινές ρίζες π.χ.

$$f\left(x\right)=\frac{n(x)}{d(x)}=\frac{n\left(x\right)}{\left(x-a_1\right)\left(x-a_2\right)\cdots\left(x-a_n\right)}=\frac{A_1}{\left(x-a_1\right)}+\frac{A_2}{\left(x-a_2\right)}+\cdots+\frac{A_n}{\left(x-a_n\right)}$$

$$\deg n\left(x\right)<\deg d\left(x\right)=n, a_i\neq a_j$$

2. Περίπτωση που ο παρονομαστής έχει ρίζες πολλαπλότητας μεγαλύτερης του 1 π.χ.

$$f\left(x\right)=\frac{n(x)}{d(x)}=\frac{n\left(x\right)}{\left(x-a_1\right)^{k_1}\left(x-a_2\right)^{k_2}\cdots\left(x-a_n\right)^{k_n}}=$$

$$=\frac{A_{11}}{\left(x-a_1\right)}+\frac{A_{12}}{\left(x-a_1\right)^2}+\cdots+\frac{A_{1k_1}}{\left(x-a_1\right)^{k_1}}+$$

$$+\frac{A_{21}}{\left(x-a_2\right)}+\frac{A_{22}}{\left(x-a_2\right)^2}+\cdots+\frac{A_{2k_2}}{\left(x-a_2\right)^{k_2}}+$$

$$+\cdots+\frac{A_{n1}}{\left(x-a_n\right)}+\frac{A_{n2}}{\left(x-a_n\right)^2}+\cdots+\frac{A_{nk_n}}{\left(x-a_n\right)^{k_n}}$$

$$\deg n\left(x\right)<\deg d\left(x\right)=k_1+k_2+\cdots+k_n, a_i\neq a_j$$

3. Περίπτωση που ο παρονομαστής μιας ρητής παράστασης αναλύεται σε παράγοντες πρώτου βαθμού και δευτέρου, όπου δεν υπάρχουν κοινές ρίζες π.χ $\frac{\kappa x^2+\lambda x+\mu}{(x+a)(x^2+bx+c)}=\frac{A}{x+a}+\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$

4. Περίπτωση που ο παρονομαστής μιας ρητής παράστασης αναλύεται σε παράγοντες πρώτου βαθμού και δευτέρου, όπου δεν υπάρχουν κοινές ρίζες με πολλαπλότητα μεγαλύτερη του 1.

π.χ $\dfrac{\kappa x^2+\lambda x+\mu}{(x+a)^2(x^2+bx+c)^2}=\dfrac{A_1}{x+a}+\dfrac{A_2}{\left(x+a\right)^2}+\dfrac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c}+\dfrac{B_2x+C_2}{\left(x^2+bx+c\right)^2}$

5. Στην περίπτωση που ο αριθμητής έχει βαθμό μεγαλύτερο από τον παρονομαστή:

$$f\left(x\right)=\frac{n(x)}{d(x)}$$
$$\deg n\left(x\right)>\deg d\left(x\right)$$

Εκτελούμε τη διαίρεση και έχουμε ως αποτέλεσμα έναν αριθμό και ένα κλάσμα του οποίου ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του αριθμητή.

$$f\left(x\right)=A+\frac{n_1(x)}{d(x)}$$
$$\deg n_1\left(x\right)<\deg d\left(x\right)$$

και οδηγούμαστε σε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις.

Παράδειγμα

Να γραφεί η παράσταση

$$\frac{x\ +2}{(x-2)(x+4)}$$

ως άθροισμα μερικών κλασμάτων, δηλαδή να βρεθούν οι πραγματικοί A,B , τέτοιοι ώστε

$$\frac{x\ +2}{(x-2)(x+4)}=\frac{\mathrm{A}}{x-2}+\frac{\mathrm{B}}{x+4}$$

Η παράσταση

$$\frac{\mathrm{x}+2}{(\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}+4)}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{x}-2}+\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{x}+4}=\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{x}+4\mathrm{A}-2\mathrm{B}}{(\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}+4)}$$

δίνει το σύστημα $\begin{array}{ll}\mathrm{A}+\mathrm{B} & =1\\ 4\mathrm{A}-2\mathrm{B} & =2\end{array}\Leftrightarrow\begin{array}{l}\mathrm{A}=2/3\\ \mathrm{B}=1/3\end{array}.$

Παράδειγμα

Δίνεται η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-3}{x^3-3x^2+2x}$. Παρατηρείστε ότι ο παρονομαστής παραγοντοποιείται στην μορφή:

$$x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)$$

και αναλύστε την f(x) σε “απλά” κλάσματα ως εξής:

$$f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{\Gamma}{x-2}, \qquad (*)$$

όπου Α, Β, Γ είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Έστω ότι

$$\frac{(x-3)}{x(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}.$$

Προσθέτοντας τα κλάσματα στο β μέλος παίρνουμε $\frac{(x-3)}{x(x-1)(x-2)}=\frac{A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$ και εξισώνοντας τους δυο αριθμητές έχουμε

$$x-3=A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1).$$

Θέτοντας διαδοχικά στην παραπάνω σχέση $x=0, x=1, x=2$ παίρνουμε : $-3=2A$, $-2=-B, -1=2C$, δηλαδή $A=-\frac{3}{2}, B=2, C=-\frac{1}{2}$.

Παράδειγμα

Δίνεται η ρητή συνάρτηση $f(x)=\frac{x^4+x^3+2x-2}{x^5-x^4+x^3-x^2}$. Αποδείξτε ότι ο παρονομαστής παραγοντοποιείται στην μορφή:

$$x^5-x^4+x^3-x^2 = x^2(x^2+1)(x-1)$$

και αναλύστε την f(x) σε “απλά” κλάσματα ως εξής:

$$f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{\Gamma}{x-1}+\frac{\Delta x+\mathrm{E}}{x^2+1}, \qquad (*)$$

όπου Α, Β, Γ, Δ, Ε είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Τα δύο πρώτα κλάσματα αντιστοιχούν στον παράγοντα x^2, το τρίτο στον x-1 ενώ το τέταρτο στον x^2+1.

Η σχέση $x^5-x^4+x^3-x^2 = x^2(x^2+1)(x-1)$ μπορεί να ελεγχθεί εύκολα αν κανείς εκτελέσει τους πολλαπλασιασμούς στο δεύτερο μέρος.

Για την ανάλυση της f(x) σε απλά κλάσματα εργαζόμαστε ως εξής:

$$f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{\Gamma}{x-1}+\frac{\Delta x+\mathrm{E}}{x^2+1}\Leftrightarrow$$

$$x^4+x^3+2x-2=Ax(x-1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+\Gamma x^2(x^2+1)+(\Delta x+\mathrm{E})x^2(x-1)$$

Η τελευταία σχέση δίνει:

Για x=0 έχουμε -2 = -Β ⇔ Β=2

Για x=1 έχουμε 2 = 2Γ ⇔ Γ=1

Για x=-1 έχουμε -4 = 4Α-8+2-2(-Δ+Ε) ⇔ 2Α+Δ-Ε = 1

Για x=2 έχουμε 26 = 10Α+10+20+4(2Δ+Ε) ⇔ 5Α+4Δ+2Ε = -2

Για x=-2 έχουμε 2 = 30Α-30+20-12(-2Δ+Ε) ⇔ 5Α+4Δ-2Ε = 2

Τελικά A=0, B=2, Γ=1, Δ=0, E=-1 και $f(x)=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2+1}$.

Παράδειγμα

Παραγοντοποιήστε το $\frac{(x-1)}{x^3+1}$ αφού παραγοντοποιήσετε πρώτα τον παρονομαστή και αναλύσετε το κλάσμα σύμφωνα με τον αλγόριθμο: $\frac{\kappa x^2+\lambda x+\mu}{(x+a)(x^2+bx+c)}=\frac{A}{x+a}+\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$

Το κλάσμα αναλύεται ως εξής

$$\frac{x-1}{x^3+1}=\frac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=\frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=$$

$$=\frac{Ax^2-Ax+A+Bx^2+Bx+Cx+C}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{(A+B)x^2+(-A+B+C)x+(A+C)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Οι αριθμητές των κλασμάτων πρέπει να είναι ταυτοτικά ίσοι άρα θα έχω

$$A+B=0$$
(1)

$$-A+B+C=1$$
(2)

$$A+C=-1$$
(3)

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $A=-\frac{2}{3}$, $B=\frac{2}{3}$, $C=-\frac{1}{3}$

Παράδειγμα

Παραγοντοποιήστε το $\frac{x^4-x^3+2x-3}{x^2-1}$

Αφού ο βαθμός του παρονομαστή είναι μικρότερος από το βαθμό του αριθμητή, κάνουμε τη διαίρεση

$$\begin{array}{r|l} x^4-x^3\qquad+2x-3 & x^2-1 \\ \cline{2-2} -x^4\qquad+x^2\qquad\qquad & x^2-x+1 \\ \hline -x^3+x^2+2x-3 & \\ x^3\qquad-x\quad & \\ \hline x^2+x-3 & \\ -x^2\qquad+1 & \\ \hline x-2 & \end{array}$$

Οπότε ισχύει $x^4-x^3+2x-3=\left(x^2-1\right)\left(x^2-x+1\right)+x-2$.

Άρα έχουμε

$$\frac{x^4-x^3+2x-3}{x^2-1}=\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2-x+1\right)+x-2}{x^2-1}=\left(x^2-x+1\right)+\frac{x-2}{x^2-1}=$$

$$=\left(x^2-x+1\right)+\frac{x-2}{\left(x-1\right)(x+1)}$$

1.2.2 Μέθοδος του Heaviside

Η μέθοδος του Heaviside χρησιμοποιείται για να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace μίας ρητής συνάρτησης πηλίκου πολυωνύμων $F(s)=\frac{p(s)}{q(s)}$ όπου ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος του βαθμού του αριθμητή και ο παρονομαστής αναλύεται σε παράγοντες.

Παραδείγματα

α) Να υπολογιστεί ο $L^{-1}\{\frac{4s^2+s+4}{s^3+4s}\}$

Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής παραγοντοποιείται. Ένας τρόπος να τον υπολογίσουμε είναι να ακολουθήσουμε την ακόλουθη ανάλυση σε απλά κλάσματα.

$$\frac{4s^2+s+4}{s^3+4s}=\frac{4s^2+s+4}{s(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+4}=\frac{As^2+4A+Bs^2+Cs}{s(s^2+4)}=\frac{(A+B)s^2+Cs+4A}{s(s^2+4)}$$

Από την παραπάνω ανάλυση σε κλάσματα οδηγούμαστε στο παρακάτω σύστημα:

$$A+B=4$$
$$C=1$$
$$4A=4$$

του οποίου η λύση μας δίνει $A=1, B=3, C=1$. Οπότε,

$$L^{-1}\{\frac{4s^2+s+4}{s^3+4s}\}=L^{-1}\{\frac{1}{s}+\frac{3s+1}{s^2+4}\}=L^{-1}\{\frac{1}{s}\}+3L^{-1}\{\frac{s}{s^2+4}\}+L^{-1}\{\frac{1}{s^2+4}\}=$$

$$=L^{-1}\{\frac{1}{s}\}+3L^{-1}\{\frac{s}{s^2+2^2}\}+\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{2}{s^2+2^2}\}=1+3\cos(2t)+\frac{1}{2}\sin(2t)$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσε κάποιος να ακολουθήσει μία άλλη τακτική:

$$\frac{4s^2+s+4}{s^3+4s}=\frac{4s^2+s+4}{s(s^2+4)}=\frac{4s^2}{s(s^2+4)}+\frac{s}{s(s^2+4)}+\frac{4}{s(s^2+4)}=\frac{4s}{s^2+4}+\frac{1}{s^2+4}+\frac{4}{s(s^2+4)}$$

Είναι γνωστό ότι

$$L^{-1}\{\frac{4s}{s^2+4}\}=4L^{-1}\{\frac{s}{s^2+4}\}=4\cos(2t)$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^2+4}\}=\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{2}{s^2+4}\}=\frac{1}{2}\sin(2t)$$

Και είτε να αναλύσει το τελευταίο κλάσμα:

$$\frac{4}{s(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+4}=\frac{As^2+4A+Bs^2+Cs}{s(s^2+4)}=\frac{(A+B)s^2+Cs+4A}{s(s^2+4)}$$

Οπότε $4A=4 \Leftrightarrow A=1, c=0$ και $A+B=0 \Rightarrow B=-A=-1$.

Και $L^{-1}\{\frac{4}{s(s^2+4)}\}=L^{-1}\{\frac{1}{s}\}-L^{-1}\{\frac{s}{s^2+4}\}=1-\cos(2t)$

Εναλλακτικά θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει γνωστή ιδιότητα όπως ακολουθεί:

$$L^{-1}\{\frac{4}{s(s^2+4)}\}=4L^{-1}\{\frac{\frac{1}{s^2+4}}{s}\}=4\int_0^t L^{-1}\{\frac{1}{s^2+4}\}du=$$

$$=2\int_0^t L^{-1}\{\frac{2}{s^2+2^2}\}du=2\int_0^t \sin(2u)\,du=-\cos(2u)\Big|_0^t=1-\cos(2t)$$

Οπότε

$$L^{-1}\{\frac{4s^2+s+4}{s^3+4s}\}=L^{-1}\{\frac{4s}{s^2+4}\}+L^{-1}\{\frac{1}{s^2+4}\}+L^{-1}\{\frac{4}{s(s^2+4)}\}=$$

$$=4\cos(2t)+\frac{1}{2}\sin(2t)+1-\cos(2t)=1+3\cos(2t)+\frac{1}{2}\sin(2t)$$

β) Να υπολογιστεί ο $L^{-1}\{\frac{2}{s\left(s^2-4\right)}\}$.

Θα πρέπει να αναλύσουμε σε κλάσματα:

$$\frac{2}{s\left(s^2-4\right)}=\frac{2}{s(s-2)(s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s+2}=\frac{A(s^2-4)+B(s^2+2s)+C(s^2-2s)}{s(s-2)(s+2)}=$$

$$=\frac{\left(A+B+C\right)s^2+2(B-C)s-4A}{s(s-2)(s+2)}$$

Από όπου έχουμε $\left\{\begin{matrix} A+B+C=0 \\ B-C=0 \\ -4A=2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} A+2B=0 \\ B=C \\ A=-\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} B=-\frac{A}{2} \\ B=C \\ A=-\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} B=\frac{1}{4} \\ C=\frac{1}{4} \\ A=-\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$

Οπότε

$$L^{-1}\{\frac{2}{s\left(s^2-4\right)}\}=L^{-1}\{-\frac{1}{2}\frac{1}{s}+\frac{1}{4}\frac{1}{s-2}+\frac{1}{4}\frac{1}{s+2}\}=-\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{1}{s}\}+\frac{1}{4}L^{-1}\{\frac{1}{s-2}\}+\frac{1}{4}L^{-1}\{\frac{1}{s+2}\}=$$

$$=\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{e^{2t}+e^{-2t}-2}{4}=\frac{\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}-1}{2}=\frac{\cosh(2t)-1}{2}$$

Πράγματι ισχύει,

$$L\{\frac{\cosh(2t)-1}{2}\}=\frac{L\{\cosh(2t)\}-L\{1\}}{2}=\frac{\frac{s}{s^2-2^2}-\frac{1}{s}}{2}=\frac{\frac{s^2-s^2+2^2}{s\left(s^2-2^2\right)}}{2}=\frac{2}{s\left(s^2-4\right)}$$

Από όπου συμπεραίνουμε ότι

$$L^{-1}\{\frac{2}{s\left(s^2-4\right)}\}=\frac{\cosh(2t)-1}{2}.$$

γ) Όπως έχουμε δει, στην περίπτωση που ο παρονομαστής μιας ρητής παράστασης δεν αναλύεται σε παράγοντες θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της μετατόπισης. Για παράδειγμα να υπολογιστεί ο

$$L^{-1}\{\frac{150}{s^2+8s+25}\}=L^{-1}\{\frac{150}{(s+4)^2+3^2}\}=50\,L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}\Bigg|_{s=s+4}=$$

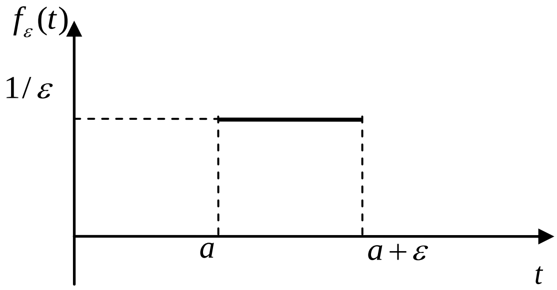
$$=50e^{-4t}L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}=50e^{-4t}\sin(3t)$$

1.3 Εφαρμογές μετασχηματισμού Laplace σε ειδικές συναρτήσεις

1.3.1 Η συνάρτηση δ του Dirac

Ορίζουμε

$$f_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon} & a\le t\le \varepsilon+a\\ 0 & t<a, t>\varepsilon+a\end{cases}$$



Ισχύει $\int_0^{+\infty} f_\varepsilon(t)dt=1$ και επίσης $f_\varepsilon(t)=\dfrac{u(t-\alpha)-u(t-\alpha-\varepsilon)}{\varepsilon}$

Οπότε $L\{f_\varepsilon(t)\}=\dfrac{e^{-as}-e^{-(a+\varepsilon)s}}{\varepsilon s}=e^{-as}\dfrac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}$

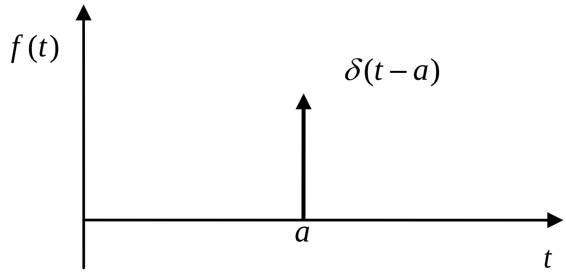
Ορίζω τη συνάρτηση **συνάρτηση δ του Dirac** ως

$$\delta(t-\alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & t\ne\alpha\\ \infty & t=\alpha\end{cases}$$

Ισχύει $\int_0^{+\infty} \delta(t-\alpha)dt = 1$ και για κάθε συνάρτηση $f(t)$, $\int_0^{+\infty} f(t)\delta(t-\alpha)dt = f(t)$.

Τέλος, αφού από τον κανόνα του L'Hospital έχω ότι $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} = 1$ ισχύει $L\{\delta(t-\alpha)\} = e^{-as}$ και $L^{-1}\{e^{-as}\} = \delta(t-\alpha)$. Επίσης $L\{\delta(t)\} = 1$ και $L\{f(t)\delta(t-a)\} = f(a)e^{-as}$.

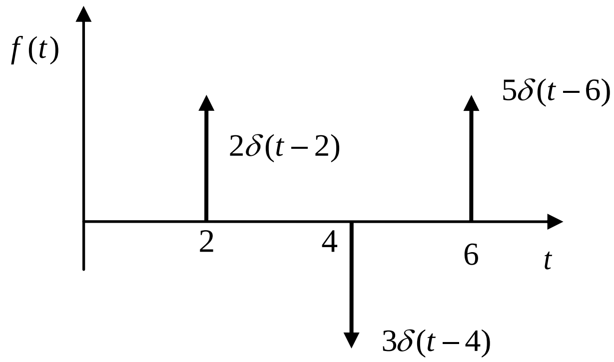
Μία γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης δ του Dirac είναι η ακόλουθη:



Στα ηλεκτρονικά χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει ρεύματα εκτόνωσης (impulses) ή στιγμιαίους παλμούς.

Παράδειγμα

Εάν ρεύματα εκτόνωσης με ισχύ 2,3 και 5 μονάδες παρουσιάζονται με τη φορά που υπάρχει στο σχήμα τις χρονικές στιγμές $t = 2, 4, 6$.



Γράψτε τον τύπο που χαρακτηρίζει το σχήμα και βρείτε το μετασχηματισμό του Laplace.

Ο τύπος είναι $f(t) = 2\delta(t-2) - 3\delta(t-4) + 5\delta(t-6)$ και ο μετασχηματισμός Laplace:

$$L\{f(t)\} = 2L\{\delta(t-2)\} - 3L\{\delta(t-4)\} + 5L\{\delta(t-6)\} = 2e^{-2s} - 3e^{-4s} + 5e^{-6s}$$

1.4 Εφαρμογές μετασχηματισμού Laplace

1.4.1 Μετασχηματισμός Laplace και Διαφορικές εξισώσεις

1.4.1.1 Μετασχηματισμός Laplace και Προβλήματα Αρχικών Τιμών

Η μη ομογενής διαφορική εξίσωση $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_2y''+a_1y'+a_0y=f(t)$ με σταθερούς όρους (όπου $a_i\in\mathbb{R}$ δηλαδή) μπορεί να λυθεί με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace. Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό στο αριστερό και στο δεξί μέλος μετατρέπουμε την διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική. Λύνουμε την αλγεβρική εξίσωση και εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace για να πάρουμε τη λύση της δ.ε.

Θα χρειαστούμε τις ιδιότητες:

$$L\{y'(t)\}=sL\{y(t)\}-y(0)$$

$$L\{y''(t)\}=s^2L\{y(t)\}-sy(0)-y'(0)$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'-5y=e^{5t}$ με $y(0)=0$

$$y'-5y=e^{5t}\Leftrightarrow L\{y'-5y\}=L\{e^{5t}\}\Leftrightarrow L\{y'\}-5L\{y\}=L\{e^{5t}\}\Leftrightarrow$$

$$sL\{y\}-y(0)-5L\{y\}=\frac{1}{s-5}\overset{y(0)=0}{\Leftrightarrow}(s-5)L\{y\}=\frac{1}{s-5}\Leftrightarrow$$

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{1}{\left(s-5\right)^2}\}=e^{5t}L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}=te^{5t}$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητες της μετατόπισης:

$$L\{e^{at}f(t)\}=L\{f(t)\}\Big|_{s=s-a}=F(s)\Big|_{s=s-a}=F(s-a)$$

$$L^{-1}\{F(s-a)\}=L^{-1}\{F(s)\Big|_{s\to s-a}\}=e^{at}L^{-1}\{F(s)\}=e^{at}f(t)$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y''+y=2e^{-t}$ με $y(0)=y'(0)=1$

$$y''+y=2e^{-t}\Leftrightarrow L\{y''+y\}=L\{2e^{-t}\}\Leftrightarrow L\{y''\}+L\{y\}=2L\{e^{-t}\}\Leftrightarrow$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)+L\{y\}=\frac{2}{s+1}\Leftrightarrow s^2L\{y\}-s-1+L\{y\}=\frac{2}{s+1}\Leftrightarrow$$

$$\left(s^2+1\right)L\{y\}=s+1+\frac{2}{s+1}\Leftrightarrow L\{y\}=\frac{s}{\left(s^2+1\right)}+\frac{1}{\left(s^2+1\right)}+\frac{2}{\left(s+1\right)\left(s^2+1\right)}\Leftrightarrow$$

$$y=L^{-1}\{\frac{s}{\left(s^2+1\right)}+\frac{1}{\left(s^2+1\right)}+\frac{2}{\left(s+1\right)\left(s^2+1\right)}\}$$

Ισχύει $\frac{2}{\left(s+1\right)\left(s^2+1\right)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2+1}=\frac{As^2+A+Bs^2+Cs+Bs+C}{\left(s+1\right)\left(s^2+1\right)}$

από όπου $A+B=0,\ A+C=2,\ B+C=0$ και $A=1,B=-1,C=1$

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{s}{\left(s^2+1\right)}+\frac{1}{\left(s^2+1\right)}+\frac{2}{\left(s+1\right)\left(s^2+1\right)}\}=L^{-1}\{\frac{s}{\left(s^2+1\right)}+\frac{1}{\left(s^2+1\right)}+\frac{1}{\left(s+1\right)}+\frac{-s+1}{\left(s^2+1\right)}\}=$$

$$=L^{-1}\{\frac{2}{\left(s^2+1\right)}+\frac{1}{\left(s+1\right)}\}=2L^{-1}\{\frac{1}{\left(s^2+1\right)}\}+L^{-1}\{\frac{1}{\left(s+1\right)}\}=2\sin\left(t\right)+e^{-t}$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y''+y'=2e^{-t}$ με $y(0)=y'(0)=0$

$$y''+y'=2e^{-t}\Leftrightarrow L\{y''+y'\}=L\{2e^{-t}\}\Leftrightarrow L\{y''\}+L\{y'\}=2L\{e^{-t}\}\Leftrightarrow$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)+sL\{y\}-y(0)=\frac{2}{s+1}\Leftrightarrow s^2L\{y\}+sL\{y\}=\frac{2}{s+1}\Leftrightarrow$$

$$\left(s^2+s\right)L\{y\}=\frac{2}{s+1}\Leftrightarrow L\{y\}=\frac{2}{\left(s+1\right)\left(s^2+s\right)}\Leftrightarrow$$

$$y=L^{-1}\{\frac{2}{s\left(s+1\right)^2}\}$$

$$\frac{2}{s\left(s+1\right)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{\left(s+1\right)^2}=\frac{A(s^2+2s+1)+B(s^2+s)+Cs}{s\left(s+1\right)^2}=$$

$$=\frac{(A+B)s^2+(2A+B+C)s+A}{s\left(s+1\right)^2}$$

από όπου $A+B=0,\ 2A+B+C=0, A=2$ και τελικά $A=2, B=-2, C=-2$

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{2}{s\left(s+1\right)^2}\}=L^{-1}\{\frac{2}{s}-\frac{2}{s+1}+\frac{-2}{\left(s+1\right)^2}\}=2L^{-1}\{\frac{1}{s}\}-2L^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}-2L^{-1}\{\frac{1}{\left(s+1\right)^2}\}$$

Το $L^{-1}\{\frac{1}{\left(s+1\right)^2}\}=L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}\Big|_{s\to s+1}=e^{-t}L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}=e^{-t}t$, όπου χρησιμοποιήσαμε τις ακόλουθες ιδιότητες $L^{-1}\{F(s-a)\}=L^{-1}\{F(s)\big|_{s\to s-a}\}=e^{at}L^{-1}\{F(s)\}=e^{at}f(t)$ και $L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}=t$.

Οπότε έχουμε τελικά $y(t)=2-2e^{-t}-2te^{-t}$.

Παράδειγμα

Να λυθεί με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace η διαφορική εξίσωση $y''+4y'+13y=2\delta(t)$ με $y(0)=2, y'(0)=0$.

$$y''+4y'+13y=2\delta(t)\Leftrightarrow L\{y''+4y'+13y\}=L\{2\delta(t)\}\Leftrightarrow$$

$$L\{y''\}+4L\{y'\}+13L\{y\}=2L\{\delta(t)\}\Leftrightarrow$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)+4(sL\{y\}-y(0))+13L\{y\}=2\cdot 1\Leftrightarrow$$

$$s^2 L\{y\} - 2s - 0 + 4sL\{y\} - 8 + 13L\{y\} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\left(s^2 + 4s + 13\right)L\{y\} = 2s + 10 \Leftrightarrow L\{y\} = \frac{2s+10}{s^2+4s+13} \Leftrightarrow$$

$$L\{y\} = \frac{2s+10}{\left(s+2\right)^2+9} \Leftrightarrow L\{y\} = \frac{2s+4}{\left(s+2\right)^2+9} + \frac{6}{\left(s+2\right)^2+9} \Leftrightarrow$$

$$L\{y\} = \frac{2\left(s+2\right)}{\left(s+2\right)^2+9} + \frac{6}{\left(s+2\right)^2+9}\ y = L^{-1}\left\{\frac{2\left(s+2\right)}{\left(s+2\right)^2+9}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{6}{\left(s+2\right)^2+9}\right\} \Leftrightarrow$$

$$y = L^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+9}\right\}\Bigg|_{s=s+2} + L^{-1}\left\{\frac{6}{s^2+9}\right\}\Bigg|_{s=s+2} \Leftrightarrow$$

$$y = 2e^{-2t}\left(L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}\right)$$

$$\Leftrightarrow y(t) = 2e^{-2t}\left(\cos(3t) + \sin(3t)\right)$$

1.4.1.2 Μετασχηματισμός Laplace και Συστήματα διαφορικών εξισώσεων

Επίσης και συστήματα διαφορικών εξισώσεων μπορούν να λυθούν με τη μέθοδο μετασχηματισμού Laplace. Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό στο αριστερό και στο δεξί μέλος καθεμίας από τις εξισώσεις μετατρέπουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων σε σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Λύνουμε το αλγεβρικό σύστημα και εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace για να πάρουμε τη λύση της δ.ε.

Παράδειγμα

Εάν όπου $x = x(t), y = y(t)$ και $\frac{dx}{dt} = x', \frac{dy}{dt} = y'$, να λυθεί το σύστημα διαφορικών εξισώσεων, $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = y - 2x \end{cases}$ με $x(0) = 8, y(0) = 3$.

Για ευκολία, συμβολίζω $L\{x\} = X$ και $L\{y\} = Y$ Τότε

$$\left.\begin{matrix} x' = 2x - 3y \\ y' = y - 2x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} L\{x'\} = L\{2x - 3y\} \\ L\{y'\} = L\{y - 2x\} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} L\{x'\} = 2L\{x\} - 3L\{y\} \\ L\{y'\} = L\{y\} - 2L\{x\} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} sL\{x\} - x(0) = 2L\{x\} - 3L\{y\} \\ sL\{y\} - y(0) = L\{y\} - 2L\{x\} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} sX - 8 = 2X - 3Y \\ sY - 3 = Y - 2X \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} s - 2\ X + 3Y = 8 \\ 2X + (s-1)Y = 3 \end{matrix}\right\}$$

Λύνουμε το σύστημα.

Από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε $X = \frac{3 - (s-1)Y}{2}$ και αντικαθιστώντας στην πρώτη:

$$s-2\ \frac{3-(s-1)Y}{2}+3Y=8 \Leftrightarrow Y(3-\frac{(s-1)(s-2)}{2})=8-\frac{3}{2}(s-2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{6-s^2+s+2s-2}{2}Y=\frac{-3s+22}{2} \Leftrightarrow Y=\frac{3s-22}{s^2-3s-4}=\frac{3s-22}{s+1\quad s-4}=\frac{5}{s+1}-\frac{2}{s-4}$$

Και τελικά

$$X=\frac{3-(s-1)Y}{2}=\frac{3-(s-1)\dfrac{3s-22}{s+1\quad s-4}}{2}=\frac{3(s^2-3s-4)-(3s^2-22s-3s+22)}{2\ s+1\quad s-4}=$$

$$=\frac{16s-34}{2\ s+1\quad s-4}=\frac{8s-17}{s+1\quad s-4}=\frac{5}{s+1}+\frac{3}{s-4}$$

Αφού $\frac{8s-17}{(s+1)(s-4)}=\frac{A}{(s+1)}+\frac{B}{(s-4)}=\frac{As-4A+BS+B}{(s+1)(s-4)}=\frac{(A+B)s-4A+B}{(s+1)(s-4)}$

Από όπου έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} A+B=8 \\ -4A+B=-17 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} B=8-A \\ -4A+8-A=-17 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} B=8-A \\ -5A=-25 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} B=8-5=3 \\ A=5 \end{array}\right\}$$

Και $\frac{3s-22}{(s+1)(s-4)}=\frac{A}{(s+1)}+\frac{B}{(s-4)}=\frac{As-4A+BS+B}{(s+1)(s-4)}=\frac{(A+B)s-4A+B}{(s+1)(s-4)}$

Από όπου έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} A+B=3 \\ -4A+B=-22 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} B=3-A \\ -4A+3-A=-22 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} B=3-A \\ -5A=-25 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} B=3-5=-2 \\ A=5 \end{array}\right\}$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace

$$X=\frac{5}{(s+1)}+\frac{3}{(s-4)} \Leftrightarrow x=L^{-1}\{\frac{5}{(s+1)}+\frac{3}{(s-4)}\} \Leftrightarrow$$

$$x=5L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)}\}+3L^{-1}\{\frac{1}{(s-4)}\} \Leftrightarrow x=5e^{-t}+3e^{4t}$$

Και

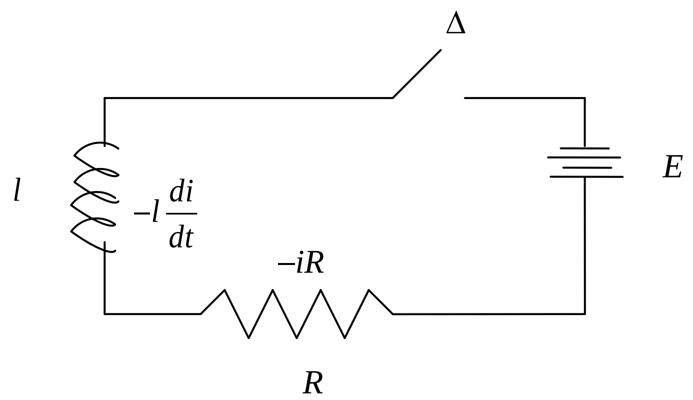
$$Y=\frac{5}{(s+1)}-\frac{2}{(s-4)} \Leftrightarrow y=L^{-1}\{\frac{5}{(s+1)}-\frac{2}{(s-4)}\} \Leftrightarrow$$

$$y=5L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)}\}-2L^{-1}\{\frac{1}{(s-4)}\} \Leftrightarrow y=5e^{-t}-2e^{4t}$$

1.4.2 Μετασχηματισμός Laplace και Στοιχειώδη κυκλώματα

1.4.2.1 Κύκλωμα RL

Έστω ένα κύκλωμα το οποίο αποτελείται από μία πηγή ηλεκτρεργετικής δύναμης *E (Volt)*, η οποία μπορεί να είναι σταθερή ή να εξαρτάται από το χρόνο δηλαδή *E=E(t)*, πηνίο αυτεπαγωγής *l (Herny)*, ωμική αντίσταση *R (Ohm)* και διακόπτη *Δ*, συνδεδεμένα σε σειρά.



Τη χρονική στιγμή $t=0$ ο διακόπτης κλείνει και ζητείται να προσδιοριστεί η τιμή του ρεύματος $i=i(t)$ που αρχίζει να διαρρέει στο κύκλωμα. Εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο (των τάσεων) του Kirchoff ο οποίος μας λέει ότι η ηλεκτρεργετική δύναμη ισοφαρίζει κάθε χρονική στιγμή την πτώση τάσης στο πηνίο $l\frac{di}{dt}$ και την πτώση τάσης στην αντίσταση iR, δηλαδή:

$$iR + l\frac{di}{dt} = E(t) \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{l}i = \frac{E(t)}{l},$$

Δεδομένου $i(0)=0$. Αυτή είναι μία διαφορική εξίσωση της μορφής $y' + ay = e(t)$. Είναι δηλαδή ένα πρόβλημα αρχικών τιμών πρώτης τάξης με σταθερούς όρους το οποίο λύνουμε με τον μετασχηματισμό Laplace.

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{l}i = \frac{E(t)}{l} \Leftrightarrow L\{\frac{di}{dt}\} + \frac{R}{l}L\{i\} = \frac{L\{E(t)\}}{l} \Leftrightarrow$$

$$sL\{i\} - i(0) + \frac{R}{l}L\{i\} = \frac{L\{E(t)\}}{l} \Leftrightarrow (s + \frac{R}{l})L\{i\} = \frac{L\{E(t)\})}{l} \Leftrightarrow$$

$$L\{i\} = \frac{E(t)}{l}\frac{1}{s + \frac{R}{l}} \Leftrightarrow i(t) = \frac{1}{l}L^{-1}\left\{\frac{L\{E(t)\}}{s + \frac{R}{l}}\right\}$$

Εάν το $E(t) = E$ είναι σταθερό τότε $L\{E(t)\} = EL\{1\} = \frac{E}{s}$ η λύση είναι η ακόλουθη:

$$i(t) = \frac{E}{l}L^{-1}\{\frac{1}{s\left(s + \frac{R}{l}\right)}\}$$

και επειδή

$$\frac{1}{s\left(s + \frac{R}{l}\right)} = \frac{l}{R}(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{l}})$$

Συμπεραίνουμε ότι $i = \frac{E}{l}\frac{l}{R}L^{-1}\{(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{l}})\} = \frac{E}{R}(L^{-1}\{\frac{1}{s}\} - L^{-1}\{\frac{1}{s + \frac{R}{l}}\}) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{l}t})$

Παράδειγμα:

Για παράδειγμα εάν το κύκλωμα RL αποτελείται από μία πηγή ηλεκτρεργετικής δύναμης *E=300 Volt* σταθερή πηνίο αυτεπαγωγής *l=2 Herny,* ωμική αντίσταση *R=16 Ohm* και διακόπτη *Δ* τότε έχουμε

$$iR + l\frac{di}{dt} = E(t) \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{l}i = \frac{E}{l} \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{16}{2}i = \frac{300}{2} \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + 8i = 150$$

Εφαρμόζω μετασχηματισμό Laplace και συμβολίζω $L\{i\} = \tilde{i}$

$$L\{\frac{di}{dt}\} + 8L\{i\} = 150L\{1\} \Leftrightarrow s\tilde{i} - i(0) + 8L\{i\} = \frac{150}{s} \Leftrightarrow (s+8)L\{i\} = \frac{150}{s} \Leftrightarrow$$

$$L\{i\} = 150\frac{1}{s(s+8)} \Leftrightarrow i = 150L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+8)}\right\} \Leftrightarrow i = \frac{150}{8}L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+8)}\right\}$$

Αφού

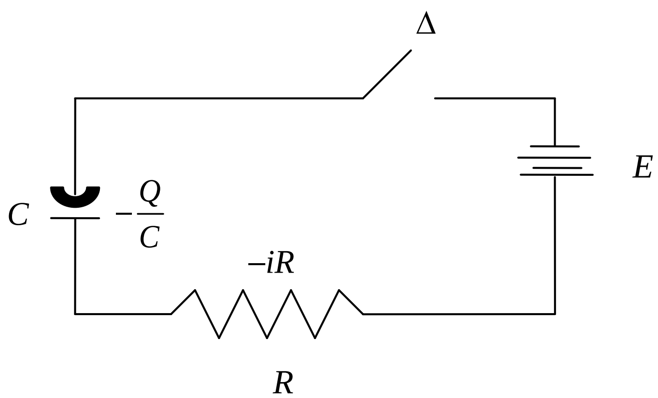
$\dfrac{1}{s(s+8)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{(s+8)} = \dfrac{(A+B)s+8A}{s(s+8)}$ από όπου $A = \dfrac{1}{8}, B = -A = -\dfrac{1}{8}$.

Τελικά

$$i(t) = \frac{150}{8}\left(L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+8)}\right\}\right) = \frac{75}{4}(1 - e^{-8t})$$

1.4.2.2 Κύκλωμα RC

Έστω ένα κύκλωμα το οποίο αποτελείται από μία πηγή ηλεκτρεργετικής δύναμης *E (Volt)*, η οποία μπορεί να είναι σταθερή ή να εξαρτάται από το χρόνο δηλαδή *E=E(t)*, πυκνωτή χωρητικότητας *C (Farad)*, ωμική αντίσταση *R (Ohm)* και διακόπτη *Δ*, συνδεδεμένα σε σειρά.



Εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο (των τάσεων) του Kirchoff ο οποίος μας λέει ότι η ηλεκτρεργετική δύναμη ισοφαρίζει κάθε χρονική στιγμή την πτώση τάσης στον πυκνωτή $\dfrac{Q}{C}$ όπου $Q = Q(t)$ είναι το φορτίο του πυκνωτή και την πτώση τάσης στην αντίσταση iR, δηλαδή:

$$iR + \frac{Q}{C} = E(t) \Rightarrow R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t),$$

Αφού λάβουμε υπόψη ότι η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα ισούται με το ρυθμό μεταβολής του φορτίου του πυκνωτή, δηλαδή $i = \frac{dQ}{dt}$.

Είναι δηλαδή ένα πρόβλημα αρχικών τιμών πρώτης τάξης με σταθερούς όρους το οποίο λύνουμε με τον μετασχηματισμό Laplace όπως και πριν και να βρούμε το $Q(t)$.

Όταν ο πυκνωτής δεν είναι φορτισμένος την στιγμή που κλείνει ο διακόπτης δηλαδή $Q(0) = 0$, ολοκληρώνοντας τη

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \Rightarrow \int_0^t i(w)dw = \int_0^t \frac{dQ}{dw}dw \Rightarrow \int_0^t i(w)dw = Q(t) - Q(0) \Rightarrow$$

$$\int_0^t i(w)dw = Q(t)$$

Όπου θεωρούμε τη μεταβλητή w μία μεταβλητή χρόνου. Για λόγους απλότητας εναλλάσσουμε τις μεταβλητές t και w έχουμε δηλαδή $\int_0^t i(w)dw = Q(t)$. Οπότε το πρόβλημα γίνεται

$R \cdot i + \frac{1}{C}\int_0^t i(w)dw = E(t),$ το οποίο λύνεται ως προς το i χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $L\{\int_0^t f(u)du\} = \frac{L\{f(t)\}}{s}$:

$$R \cdot i + \frac{1}{C}\int_0^t i(w)dw = E(t) \Leftrightarrow R \cdot L\{i\} + \frac{1}{C}L\{\int_0^t i(w)dw\} = L\{E(t)\} \Leftrightarrow$$

$$R \cdot L\{i\} + \frac{1}{C}\frac{L\{i\}}{s} = L\{E(t)\} \Leftrightarrow L\{i\} = \frac{CsL\{E(t)\}}{1+RCs} \Leftrightarrow i(t) = L^{-1}\{\frac{CsL\{E(t)\}}{1+RCs}\}$$

Παράδειγμα:

Εάν το κύκλωμα RC αποτελείται από μία πηγή ηλεκτρεργετικής δύναμης *E=300 Volt* σταθερή, πυκνωτή χωρητικότητας *C=0.02 Farad*, ωμική αντίσταση *R=16 Ohm* και διακόπτη *Δ*.

Εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο (των τάσεων) του Kirchoff ο οποίος μας λέει ότι η ηλεκτρεργετική δύναμη ισοφαρίζει κάθε χρονική στιγμή την πτώση τάσης στον πυκνωτή $\frac{Q}{C}$ όπου $Q = Q(t)$ είναι το φορτίο του πυκνωτή και την πτώση τάσης στην αντίσταση iR, δηλαδή:

$$iR + \frac{Q}{C} = E \Leftrightarrow 16 \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{0.02}Q = 300,$$

Αφού λάβουμε υπόψη ότι η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα ισούται με το ρυθμό μεταβολής του φορτίου του πυκνωτή, δηλαδή $i = \frac{dQ}{dt}$.

Είναι δηλαδή ένα πρόβλημα αρχικών τιμών πρώτης τάξης με σταθερούς όρους το οποίο λύνουμε με τον μετασχηματισμό Laplace όπως και πριν και να βρούμε το $Q(t)$.

Όταν ο πυκνωτής δεν είναι φορτισμένος την στιγμή που κλείνει ο διακόπτης δηλαδή $Q(0)=0$, ολοκληρώνοντας τη

$$i(t)=\frac{dQ(t)}{dt}\Rightarrow\int_0^w i(t)dt=\int_0^w\frac{dQ}{dt}dt\Rightarrow\int_0^w i(t)dt=Q(w)-Q(0)\Rightarrow\int_0^w i(t)dt=Q(w)$$

Όπου θεωρούμε τη μεταβλητή w μία μεταβλητή χρόνου. Για λόγους απλότητας εναλλάσσουμε τις μεταβλητές t και w έχουμε δηλαδή $\int_0^t i(w)dw=Q(t)$. Οπότε το πρόβλημα γίνεται

$16\cdot i+\frac{1}{0.02}\int_0^t i(w)dw=300,$ το οποίο λύνεται ως προς το i χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $L\{\int_0^t f(u)du\}=\frac{L\{f(t)\}}{s}$.

Οπότε η σχέση γίνεται:

$$16\cdot i+\frac{1}{0.02}\int_0^t i(w)dw=300\Leftrightarrow 16\cdot L\{i\}+\frac{1}{0.02}L\{\int_0^t i(w)dw\}=L\{300\}\Leftrightarrow$$

$$16\cdot L\{i\}+\frac{1}{0.02}\frac{L\{i\}}{s}=L\{300\}\Leftrightarrow$$

$$16\cdot L\{i\}+\frac{1}{0.02}\frac{L\{i\}}{s}=300L\{1\}\Leftrightarrow 16\cdot L\{i\}+50\frac{L\{i\}}{s}=300\frac{1}{s}\Leftrightarrow\left(16+\frac{50}{s}\right)L\{i\}=300\frac{1}{s}\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{16s+50}{s}\right)L\{i\}=300\frac{1}{s}\Leftrightarrow(16s+50)\cdot L\{i\}=300\Leftrightarrow L\{i\}=\frac{300}{(16s+50)}\Leftrightarrow$$

$$L\{i\}=\frac{75}{4}\frac{1}{s+\frac{25}{8}}\Leftrightarrow i=\frac{75}{4}L^{-1}\{\frac{1}{s+\frac{25}{8}}\}\Leftrightarrow i=\frac{75}{4}e^{-\frac{25}{8}t}$$

Το φορτίο τώρα μπορεί να υπολογισθεί από την

$$Q(t)=\int_0^t i(w)dw\Leftrightarrow Q(t)=\int_0^t\frac{75}{4}e^{-\frac{25}{8}w}dw\Leftrightarrow Q(t)=-\frac{75}{4}\frac{8}{25}\int_0^t e^{-\frac{25}{8}w}d\left(-\frac{25}{8}w\right)$$

$$\Leftrightarrow Q(t)=-6\left(e^{-\frac{25}{8}t}-1\right)\Leftrightarrow Q(t)=6\left(1-e^{-\frac{25}{8}t}\right)$$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε από την

$$16\cdot\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{0.02}Q=300\Leftrightarrow 16\cdot\frac{dQ}{dt}+50Q=300\Leftrightarrow 16L\{\frac{dQ}{dt}\}+50L\{Q\}=300L\{1\}\Leftrightarrow$$

$$16\big(sL\{Q\}-Q(0)\big)+50L\{Q\}=300L\{1\}\Leftrightarrow(16s+50)L\{Q\}=300\frac{1}{s}\Leftrightarrow L\{Q\}=\frac{300}{s(16s+50)}$$

Τώρα έχουμε

$$\frac{300}{s(16s+50)}=\frac{A}{(16s+50)}+\frac{B}{s}=\frac{\left(A+16B\right)s+50B}{s(16s+50)}$$

Από όπου έχουμε

$B=\frac{300}{50}=6, A=-16B=-96$ και συνεχίζουμε

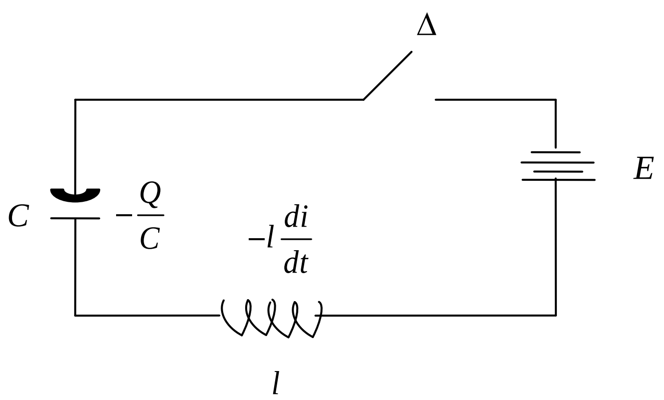
$$L\{Q\}=\frac{300}{s(16s+50)} \Leftrightarrow L\{Q\}=\frac{-96}{(16s+50)}+\frac{6}{s} \Leftrightarrow Q=L^{-1}\{-\frac{96}{(16s+50)}+\frac{6}{s}\} \Leftrightarrow$$

$$Q=-6L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\frac{25}{8})}\right\}+6L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} \Leftrightarrow Q(t)=6\left(1-e^{-\frac{25}{8}t}\right)$$

από όπου παραγωγίζοντας εξάγουμε την ένταση του ρεύματος.

1.4.2.3 Κύκλωμα LC

Έστω ένα κύκλωμα το οποίο αποτελείται από μία πηγή ηλεκτρεργετικής δύναμης *E (Volt)*, η οποία μπορεί να είναι σταθερή ή να εξαρτάται από το χρόνο δηλαδή *E=E(t)*, πυκνωτή χωρητικότητας *C (Farad)*, πηνίο αυτεπαγωγής *l (Herny)* και διακόπτη *Δ*, συνδεδεμένα σε σειρά.



Εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο (των τάσεων) του Kirchoff ο οποίος μας δίνει

$$l\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\cdot Q=E(t) \Rightarrow \frac{di}{dt}+\frac{1}{lC}Q=\frac{E(t)}{l},$$

Θεωρούμε ότι ο πυκνωτής δεν είναι φορτισμένος την στιγμή που κλείνει ο διακόπτης, δηλαδή $Q(0)=0$ όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, οπότε έχουμε

$$\frac{di}{dt}+\frac{1}{lC}\int_0^t i(w)dw=\frac{E(t)}{l},$$

Για να λύσουμε εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace

$$L\{\frac{di}{dt}\}+\frac{1}{lC}L\{\int_0^t i(w)dw\}=\frac{1}{l}L\{E(t)\} \Leftrightarrow sL\{i\}-i(0)+\frac{1}{lC}\frac{L\{i\}}{s}=\frac{1}{l}L\{E(t)\}$$

και λύνουμε ως προς $L\{i\}$.

Εναλλακτικά, από $i=\frac{dQ}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt}=\frac{d^2Q}{dt^2}$ έχουμε ισοδύναμα

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{1}{lC}Q=\frac{E(t)}{l}$$

από όπου εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace έχουμε

$$L\{\frac{d^2Q}{dt^2}\}+\frac{1}{lC}L\{Q\}=L\{\frac{E(t)}{l}\}\Leftrightarrow s^2L\{Q\}-sQ'(0)-Q(0)+\frac{1}{lC}L\{Q\}=\frac{1}{l}L\{E(t)\}$$

και λύνουμε ως προς $L\{Q\}$.

Παράδειγμα:

Εάν το κύκλωμα LC αποτελείται από μία πηγή ηλεκτρεργετικής δύναμης *E=300 Volt* σταθερή, πυκνωτή χωρητικότητας *C=0.02 Farad*, πηνίο αυτεπαγωγής *l=2 Herny* και διακόπτη *Δ*.
Εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο (των τάσεων) του Kirchoff ο οποίος μας δίνει

$$l\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\cdot Q=E(t)\Rightarrow\frac{di}{dt}+\frac{1}{2\cdot 0.02}Q=\frac{300}{2},$$

Όταν ο πυκνωτής δεν είναι φορτισμένος την στιγμή που κλείνει ο διακόπτης δηλαδή $Q(0)=0$, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε

$$\frac{di}{dt}+\frac{1}{2\cdot 0.02}\int_0^t i(w)dw=\frac{300}{2},$$

Για να λύσουμε εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace και έχουμε

$$L\{\frac{di}{dt}\}+\frac{1}{2\cdot 0.02}L\{\int_0^t i(w)dw\}=L\{\frac{300}{2}\}\Leftrightarrow sL\{i\}-i(0)+\frac{1}{2\cdot 0.02}\frac{L\{i\}}{s}=\frac{300}{2}L\{1\}$$

Η παραπάνω σχέση γίνεται, όταν η ένταση του ρεύματος χρονική στιγμή t=0 είναι 0,

$$sL\{i\}+25\frac{L\{i\}}{s}=150\frac{1}{s}\Leftrightarrow\left(s^2+25\right)L\{i\}=150\Leftrightarrow L\{i\}=\frac{150}{\left(s^2+25\right)}\Leftrightarrow$$

$$i=30L^{-1}\{\frac{5}{\left(s^2+25\right)}\}\Leftrightarrow i=30\sin(5t)\ .$$

Εναλλακτικά, από $i=\frac{dQ}{dt}\Rightarrow\frac{di}{dt}=\frac{d^2Q}{dt^2}$ έχουμε ισοδύναμα

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{1}{2\cdot 0.02}Q=\frac{300}{2}$$

Θεωρούμε ότι ο πυκνωτής δεν είναι φορτισμένος την στιγμή που κλείνει ο διακόπτης, δηλαδή ισχύει $Q(0)=0$ και ότι $Q'(0)=0$ οπότε έχουμε

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{1}{2\cdot 0.02}Q=\frac{300}{2}\Leftrightarrow L\{\frac{d^2Q}{dt^2}\}+25L\{Q\}=150\Leftrightarrow$$

$$s^2L\{Q\}-sQ'(0)-Q(0)+25L\{Q\}=150L\{1\}\Leftrightarrow$$

$$(s^2+25)L\{Q\}=\frac{150}{s}\Leftrightarrow L\{Q\}=\frac{150}{s(s^2+25)}\Leftrightarrow Q(t)=L^{-1}\{\frac{150}{s(s^2+25)}\}$$

Αναλύουμε σε απλά κλάσματα:

$$\frac{150}{s(s^2+25)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+25}=\frac{(A+B)s^2+Cs+25A}{s(s^2+25)}$$

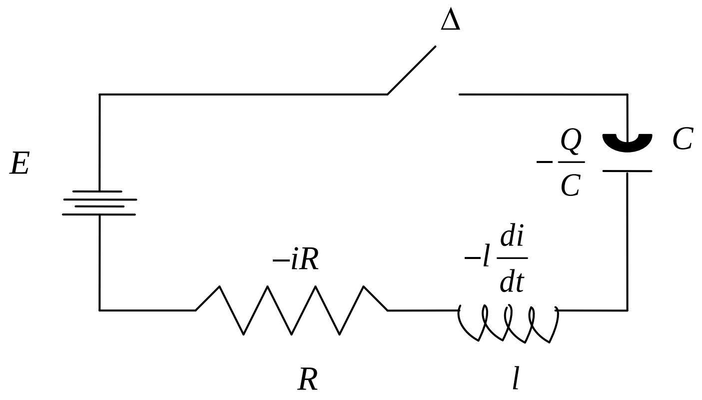
Από όπου έχουμε *A+B=0, C=0, 25A=150* και λύνοντας *A=6, B=-6 και C=0*.

Τελικά έχουμε $Q(t) = 6L^{-1}\{\frac{1}{s}\} - 6L^{-1}\{\frac{s}{s^2+25}\} = 6 - 6\cos(5t)$.

Παραγωγίζοντας το $Q(t)$ παίρνουμε ως αποτέλεσμα την ένταση του ρεύματος που υπολογίσαμε παραπάνω.

1.4.2.4 Κύκλωμα RLC

Έστω ένα κύκλωμα το οποίο αποτελείται από μία πηγή ηλεκτρεργετικής δύναμης *E (Volt)*, η οποία μπορεί να είναι σταθερή ή να εξαρτάται από το χρόνο δηλαδή *E=E(t)*, πυκνωτή χωρητικότητας *C (Farad)*, πηνίο αυτεπαγωγής *l (Herny)*, ωμική αντίσταση *R (Ohm)* και διακόπτη *Δ*, συνδεδεμένα σε σειρά.



Εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο (των τάσεων) του Kirchoff ο οποίος μας δίνει

$$l\frac{di}{dt} + R\cdot i + \frac{1}{C}\cdot Q = E(t) \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{1}{lC}Q + \frac{R}{l}\cdot i = \frac{E(t)}{l},$$

Από $i = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2}$ έχουμε ισοδύναμα

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{lC}Q + \frac{R}{l}\cdot\frac{dQ}{dt} = \frac{E(t)}{l}$$

Αυτή είναι μία διαφορική εξίσωση της μορφής $y'' + ay' + by = e(t)$. Είναι δηλαδή ένα πρόβλημα αρχικών τιμών δευτέρας τάξης με σταθερούς όρους το οποίο λύνουμε με τον μετασχηματισμό Laplace.

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{lC}Q + \frac{R}{l}\cdot\frac{dQ}{dt} = \frac{E(t)}{l} \Leftrightarrow L\{\frac{d^2Q}{dt^2}\} + \frac{1}{lC}L\{Q\} + \frac{R}{l}\cdot L\{\frac{dQ}{dt}\} = \frac{1}{l}L\{E(t)\} \Leftrightarrow$$

$$L\{\frac{d^2Q}{dt^2}\} + \frac{1}{lC}L\{Q\} + \frac{R}{l}\cdot L\{\frac{dQ}{dt}\} = \frac{1}{l}L\{E(t)\} \Leftrightarrow$$

$$s^2L\{Q\} - sQ(0) - Q'(0) + s\frac{R}{l}L\{Q\} - \frac{R}{l}Q(0) + \frac{1}{lC}L\{Q\} = \frac{1}{l}L\{E(t)\}$$

όπου και λύνουμε ως προς $L\{Q\}$.

Όταν ο πυκνωτής δεν είναι φορτισμένος την στιγμή που κλείνει ο διακόπτης δηλαδή $Q(0) = 0$, όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα έχουμε

$$\frac{di}{dt}+\frac{1}{lC}\int_0^t i(w)dw+\frac{R}{l}\cdot i=\frac{E(t)}{l},$$

Για να λύσουμε την παραπάνω ολοκληρωτικοδιαφορική εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace και έχουμε

$$L\{\frac{di}{dt}\}+\frac{1}{lC}L\{\int_0^t i(w)dw\}+\frac{R}{l}\cdot L\{i\}=\frac{1}{l}L\{E(t)\}\Leftrightarrow sL\{i\}-i(0)+\frac{1}{lC}\frac{L\{i\}}{s}+\frac{R}{l}\cdot L\{i\}=\frac{1}{l}L\{E(t)\}$$

και λύνουμε ως προς $L\{i\}$.

Παράδειγμα:

Για παράδειγμα εάν το κύκλωμα RLC αποτελείται από μία πηγή ηλεκτρεργετικής δύναμης *E=300 Volt* σταθερή, πυκνωτή χωρητικότητας *C=0.02 Farad*, πηνίο αυτεπαγωγής *l=2 Herny*, ωμική αντίσταση *R=16 Ohm* και διακόπτη *Δ*.

Εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο (των τάσεων) του Kirchoff ο οποίος μας δίνει

$$E-\frac{1}{C}\cdot Q-l\frac{di}{dt}-R\cdot i=0\Rightarrow\frac{di}{dt}+\frac{1}{2\cdot 0.02}Q+\frac{16}{2}\cdot i=\frac{300}{2},$$

Από $i=\frac{dQ}{dt}\Rightarrow\frac{di}{dt}=\frac{d^2Q}{dt^2}$ οπότε

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+25Q+8\cdot\frac{dQ}{dt}=150$$

Αυτή είναι μία διαφορική εξίσωση της μορφής $y''+ay'+by=e(t)$. Είναι δηλαδή ένα πρόβλημα αρχικών τιμών δευτέρας τάξης με σταθερούς όρους το οποίο λύνουμε με τον μετασχηματισμό Laplace.

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+25Q+8\cdot\frac{dQ}{dt}=150\Leftrightarrow L\{\frac{d^2Q}{dt^2}\}+25L\{Q\}+8\cdot L\{\frac{dQ}{dt}\}=150L\{1\}\Leftrightarrow$$

$$s^2L\{Q\}-sQ(0)-Q'(0)+8sL\{Q\}-8Q(0)+25L\{Q\}=150L\{1\}$$

Από όπου μπορούμε να συνεχίσουμε και να υπολογίσουμε το φορτίο (δείτε λυμένη άσκηση 9). Εναλλακτικά, όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα έχουμε όταν ο πυκνωτής δεν είναι φορτισμένος την στιγμή που κλείνει ο διακόπτης οπότε $Q(0)=0$,

$$\frac{di}{dt}+25\int_0^t i(w)dw+8\cdot i=150,$$

Για να λύσουμε εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace και έχουμε

$$L\{\frac{di}{dt}\}+25L\{\int_0^t i(w)dw\}+8\cdot L\{i\}=150L\{1\}\Leftrightarrow sL\{i\}-i(0)+25\frac{L\{i\}}{s}+8\cdot L\{i\}=150L\{1\}$$

Η παραπάνω σχέση γίνεται, όταν η ένταση του ρεύματος χρονική στιγμή t=0 είναι 0:

$$sL\{i\}+25\frac{L\{i\}}{s}+8\cdot L\{i\}=150L\{1\}\Leftrightarrow sL\{i\}+25\frac{L\{i\}}{s}+8\cdot L\{i\}=150\frac{1}{s}\Leftrightarrow$$

$$(s^2+8s+25)L\{i\}=150\Leftrightarrow L\{i\}=\frac{150}{(s^2+8s+16+9)}\Leftrightarrow L\{i\}=\frac{150}{(s+4)^2+3^2}\Leftrightarrow$$

$$i=50L^{-1}\left\{\frac{3}{(s+4)^2+3^2}\right\}\Leftrightarrow i=50e^{-4t}L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}\Leftrightarrow i=50e^{-4t}\sin(3t)$$

Όπου εκτός από τους απλούς κανόνες χρησιμοποιήσαμε τον παρακάτω κανόνα **μετατόπισης**:

$$L^{-1}\{F(s-a)\} = L^{-1}\{F(s)\}\Big|_{s=s-a} = e^{at}L^{-1}\{F(s)\} = e^{at} f(t)$$

1.5 Ασκήσεις:

1. Βρείτε και σχεδιάστε τη συνάρτηση $f(t) = L^{-1}\left\{\frac{(1-e^{-s})(1+e^{-2s})}{s^2}\right\}, \ \mathrm{t} \geq 0$

Λύση

Ισχύει $\frac{(1-e^{-s})(1+e^{-2s})}{s^2} = \frac{1-e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}}{s^2}$ οπότε η συνάρτηση είναι η :

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^2}\right\},$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t = t\ u(t)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2}\right\} = u(t-1)\, f(t-1)$$

Όπου $f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$ οπότε $L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2}\right\} = u(t-1)(t-1)$

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\} = u(t-2)\, f(t-2)$$

Όπου $f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$ οπότε $f(t) = L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\} = u(t-2)(t-2)$

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^2}\right\} = u(t-3)\, f(t-3)$$

Όπου $f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$ οπότε $f(t) = L^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^2}\right\} = u(t-3)(t-3)$

Άρα

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^2}\right\} = t\ u(t) - u(t-1)(t-1) + u(t-2)(t-2) - u(t-3)(t-3)$$

Οπότε η συνάρτηση είναι:

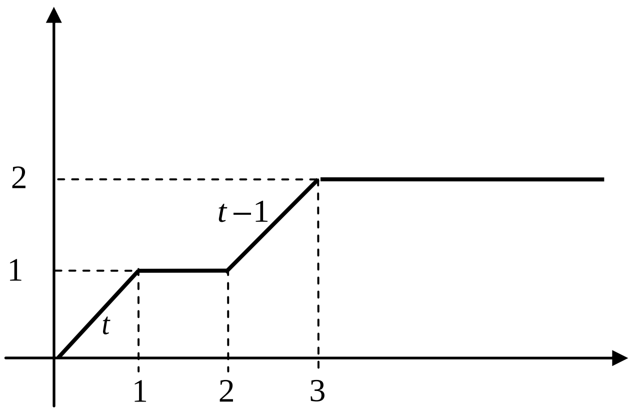
Για $0 \leq t < 1$ ισχύει $f(t) = t$

Για $1 \leq t < 2$ ισχύει $f(t) = t-(t-1) = 1$

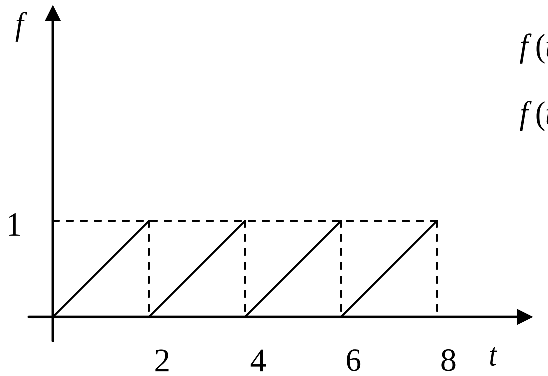
Για $2 \leq t < 3$ ισχύει $f(t) = t-(t-1)+(t-2) = t-1$

Για $t \geq 3$ ισχύει $f(t) = t-(t-1)+(t-2)-(t-3) = 2$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι:



2. Βρείτε το μετασχηματισμό Laplace της ακόλουθης συνάρτησης:



$$f(t)=\frac{t}{2} \quad 0 \leq t<2$$
$$f(t+2)=f(t)$$

Λύση

Για την παραπάνω περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T=2$ οπότε έχουμε

$$L\{f(t)\}=\frac{\int_0^2 e^{-st}\frac{1}{2}tdt}{1-e^{-2s}}$$

$$\int_0^2 e^{-st}\frac{1}{2}tdt=\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-st}tdt=\frac{1}{2}\int_0^2 t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)' dt=\frac{1}{2}\left(\left(-\frac{te^{-st}}{s}\right)_0^2-\int_0^2\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)t'dt\right)$$

$$=-\frac{1}{2s}\left(\left(te^{-st}\right)_0^2-\int_0^2 e^{-st}dt\right)=-\frac{1}{2s}\left(\left(2e^{-2s}-0\right)-\int_0^2\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)' dt\right)=$$

$$=-\frac{1}{2s}\left(2e^{-2s}+\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_0^2\right)=-\frac{1}{2s}\left(2e^{-2s}+\frac{e^{-2s}}{s}-\frac{1}{s}\right)=\frac{1-(2s+1)e^{-2s}}{2s^2}$$

Οπότε $L\{f(t)\}=\dfrac{\int_0^2 e^{-st}\frac{1}{2}tdt}{1-e^{-2s}}=\dfrac{1-(2s+1)e^{-2s}}{2s^2\left(1-e^{-2s}\right)}=\dfrac{1-2se^{-2s}-e^{-2s}}{2s^2\left(1-e^{-2s}\right)}=\dfrac{1}{2s^2}\left(1-\dfrac{2se^{-2s}}{1-e^{-2s}}\right)$

3. Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace $L^{-1}\{\frac{1}{2s^2}\left(1-\frac{2se^{-2s}}{1-e^{-2s}}\right)\}$ και σχεδιάστε την συνάρτηση που βρήκατε.

Λύση

$$L^{-1}\{\frac{1}{2s^2}\left(1-\frac{2se^{-2s}}{1-e^{-2s}}\right)\}=L^{-1}\{\frac{1}{2s^2}\}-L^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{s\left(1-e^{-2s}\right)}\}$$

Ανάλογα με τα είδαμε και στα παραδείγματα ο όρος $\frac{1}{\left(1-e^{-2s}\right)}$ μας οδηγεί να σκεφτούμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική (και μάλιστα με περίοδο 2 Ανάλογα με τα όσα είπαμε παραπάνω ισχύει:

$$\frac{1}{\left(1-e^{-2s}\right)}=\left(1-e^{-2s}\right)^{-1}=1+e^{-2s}+\left(e^{-2s}\right)^2+\left(e^{-2s}\right)^3+....=1+e^{-2s}+e^{-4s}+e^{-6s}+....$$

$$\frac{e^{-2s}}{s\left(1-e^{-2s}\right)}=\frac{1}{s}e^{-2s}\left(1+e^{-2s}+e^{-4s}+e^{-6s}+....\right)=$$

$$=\frac{1}{s}\left(e^{-2s}+e^{-4s}+e^{-6s}+e^{-8s}+....\right)$$

Οπότε

$$L^{-1}\{\frac{1}{2s^2}\left(1-\frac{2se^{-2s}}{1-e^{-2s}}\right)\}=L^{-1}\{\frac{1}{2s^2}\}-L^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{s\left(1-e^{-2s}\right)}\}=$$

$$=L^{-1}\{\frac{1}{2s^2}\}-L^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-4s}}{s}+\frac{e^{-6s}}{s}+\frac{e^{-8s}}{s}+....\}=$$

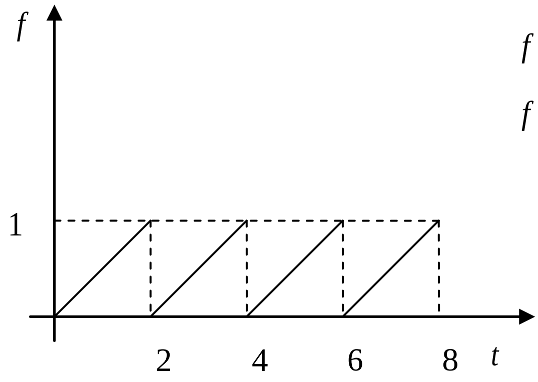
$$=L^{-1}\{\frac{1}{2s^2}\}-L^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{s}\}-L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{s}\}-L^{-1}\{\frac{e^{-6s}}{s}\}-L^{-1}\{\frac{e^{-8s}}{s}\}-....=$$

$$=\frac{1}{2}t\ u(t)-u(t-2)-u(t-4)-u(t-6)-u(t-8)+....$$

Άρα, για τη συνάρτηση αυτή έχουμε:

$0\le t<2$	$f(t)=\frac{t}{2}$	$f(0)=0$	$f(2)=1$
$2\le t<4$	$f(t)=\frac{t}{2}-1$	$f(2)=0$	$f(4)=1$
$4\le t<6$	$f(t)=\frac{t}{2}-1-1$	$f(4)=0$	$f(6)=1$
$6\le t<8$	$f(t)=\frac{t}{2}-1-1-1$	$f(6)=0$	$f(8)=1$
...	...	...	...

Φανερά το γράφημά της είναι το ακόλουθο:



$$f(t) = \frac{t}{2} \quad 0 \le t < 2$$
$$f(t+2) = f(t)$$

4. Να λυθεί με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace η διαφορική εξίσωση $y''+4y = 2\cos t$ με $y(0)=0, y'(0)=0$.

Λύση

$$y''+4y = 2\cos t \Leftrightarrow L\{y''+4y\} = L\{2\cos t\} \Leftrightarrow L\{y''\}+4L\{y\} = 2L\{\cos t\} \Leftrightarrow$$
$$s^2L\{y\} - sy(0) - y'(0) + 4L\{y\} = \frac{2s}{s^2+1} \Leftrightarrow s^2L\{y\} + 4L\{y\} = \frac{2s}{s^2+1} \Leftrightarrow$$
$$\left(s^2+4\right)L\{y\} = \frac{2s}{s^2+1} \Leftrightarrow L\{y\} = \frac{2s}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4\right)} \Leftrightarrow$$
$$y = L^{-1}\{\frac{2s}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4\right)}\}$$
$$\frac{2s}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4\right)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4} = \frac{As^3+Bs^2+4As+4B+Cs^3+Ds^2+Cs+D}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4\right)}$$
$$= \frac{(A+C)s^3+(B+D)s^2+(4A+C)s+\left(4B+D\right)}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4\right)}$$

από όπου *A+C=0, B+D=0, 4A+C=2, 4B+D=0 οπότε A=2/3,B=0,C=-2/3,D=0.*

$$y = L^{-1}\{\frac{2}{3}\frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{3}\frac{s}{s^2+4}\} = \frac{2}{3}L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+4}\} =$$
$$= \frac{2}{3}L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\} - \frac{2}{3}L^{-1}\{\frac{s}{s^2+4}\} = \frac{2}{3}L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\} - \frac{2}{3}L^{-1}\{\frac{s}{s^2+2^2}\} =$$
$$= \frac{2}{3}\cos(t) - \frac{2}{3}\cos 2t$$

5. Να λυθεί με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace η διαφορική εξίσωση $y''-2y'-8y=0$ με $y(0)=1, y'(0)=0$.

Λύση

$$y''-2y'-8y=0 \Leftrightarrow L\{y''-2y'-8y\} = L\{0\} \Leftrightarrow L\{y''\}-2L\{y'\}-8L\{y\}=0 \Leftrightarrow$$
$$s^2L\{y\} - sy(0) - y'(0) - 2(sL\{y\} - y(0)) - 8L\{y\} = 0 \Leftrightarrow s^2L\{y\} - s - 2sL\{y\} + 2 - 8L\{y\} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(s^2-2s-8\right)L\{y\} = s-2 \Leftrightarrow L\{y\} = \frac{s-2}{\left(s^2-2s-8\right)} \Leftrightarrow$$
$$y = L^{-1}\{\frac{s-2}{\left(s^2-2s-8\right)}\}$$

Ισχύει $s^2-2s-8=(s+2)(s-4)$ οπότε,

$$\frac{s-2}{\left(s^2-2s-8\right)}=\frac{s-2}{(s+2)(s-4)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s-4}=\frac{(A+B)s-4A+2B}{(s+2)(s-4)}$$

Από όπου έχουμε *A+B=1, -4A+2B=-2 και τελικά B=1/3, A=2/3.*

$$y=L^{-1}\{\frac{2}{3}\frac{1}{s+2}+\frac{1}{3}\frac{1}{s-4}\}=\frac{2}{3}L^{-1}\{\frac{1}{s+2}\}+\frac{1}{3}L^{-1}\{\frac{1}{s-4}\}=\frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{4t}.$$

6. Να λυθεί με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace η διαφορική εξίσωση $y''-2y'-8y=g(t)$ με $y(0)=1, y'(0)=0$, όπου $g(t)$ ρεύμα εκτόνωσης 3 μονάδων παρουσιάζεται με θετική φορά τη χρονική στιγμή $t=4$.

Λύση

Η διαφορική εξίσωση γράφεται ως εξής:

$$y''-2y'-8y=3\delta(t-4)\Leftrightarrow L\{y''-2y'-8y\}=L\{3\delta(t-4)\}\Leftrightarrow$$

$$L\{y''\}-2L\{y'\}-8L\{y\}=3L\{\delta(t-4)\}\Leftrightarrow$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)-2(sL\{y\}-y(0))-8L\{y\}=3e^{-4s}\Leftrightarrow$$

$$s^2L\{y\}-s-2sL\{y\}+2-8L\{y\}=3e^{-4s}\Leftrightarrow$$

$$\left(s^2-2s-8\right)L\{y\}=s-2+3e^{-4s}\Leftrightarrow L\{y\}=\frac{s-2}{\left(s^2-2s-8\right)}+3\frac{e^{-4s}}{\left(s^2-2s-8\right)}\Leftrightarrow$$

$$y=L^{-1}\{\frac{s-2}{\left(s^2-2s-8\right)}+e^{-4s}\frac{3}{\left(s^2-2s-8\right)}\}$$

Ισχύει $s^2-2s-8=(s+2)(s-4)$ οπότε,

$$\frac{s-2}{\left(s^2-2s-8\right)}=\frac{s-2}{(s+2)(s-4)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s-4}=\frac{(A+B)s-4A+2B}{(s+2)(s-4)}$$

από όπου A+B=1, -4A+2B=-2 και τελικά B=1/3, A=2/3.

Επίσης

$$\frac{3}{\left(s^2-2s-8\right)}=\frac{3}{(s+2)(s-4)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s-4}=\frac{(A+B)s-4A+2B}{(s+2)(s-4)}$$

από όπου A+B=0, -4A+2B=3 και τελικά B=1/2, A=-1/2.

$$y=L^{-1}\{\frac{2}{3}\frac{1}{s+2}+\frac{1}{3}\frac{1}{s-4}-\frac{1}{2}\frac{e^{-4s}}{s+2}+\frac{1}{2}\frac{e^{-4s}}{s-4}\}=$$

$$=\frac{2}{3}L^{-1}\{\frac{1}{s+2}\}+\frac{1}{3}L^{-1}\{\frac{1}{s-4}\}-\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{s+2}\}+\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{s-4}\}=$$

$$=\frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{4t}-\frac{1}{2}e^{-2(t-4)}u(t-4)+\frac{1}{2}e^{4(t-4)}u(t-4).$$

Διότι, από γνωστή ιδιότητα ισχύει $L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-4s}}{s+2}\right\}=u(t-4)f(t-4)$ όπου $f(t)=L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+2}\right\}=e^{-2t}$. Οπότε $L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-4s}}{s+2}\right\}=u(t-4)e^{-2(t-4)}$ και παρόμοια $L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-4s}}{s-4}\right\}=\dfrac{1}{2}e^{4(t-4)}u(t-4)$.

7. Να λυθεί με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace η διαφορική εξίσωση $y''+3y=2\cos t$ με $y(0)=0, y'(0)=0$.

Λύση

$$y''+3y=2\cos t \Leftrightarrow L\{y''+3y\}=L\{2\cos t\} \Leftrightarrow L\{y''\}+3L\{y\}=2L\{\cos t\} \Leftrightarrow$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)+3L\{y\}=\frac{2s}{s^2+1} \Leftrightarrow s^2L\{y\}+3L\{y\}=\frac{2s}{s^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\left(s^2+3\right)L\{y\}=\frac{2s}{s^2+1} \Leftrightarrow L\{y\}=\frac{2s}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+3\right)} \Leftrightarrow$$

$$y=L^{-1}\{\frac{2s}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+3\right)}\}$$

$$\frac{2s}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+3\right)}=\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+D}{s^2+3}=\frac{As^3+Bs^2+3As+3B+Cs^3+Ds^2+Cs+D}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+3\right)}$$

$$=\frac{(A+C)s^3+(B+D)s^2+(3A+C)s+\left(3B+D\right)}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+3\right)}$$

από όπου *A+C=0, B+D=0, 3A+C=2, 4B+D=0* οπότε *A=1,B=0,C=-1,D=0,*

$$y=L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+3}\}=L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+3}\}=$$

$$=L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\}-L^{-1}\{\frac{s}{s^2+3}\}=L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\}-L^{-1}\{\frac{s}{s^2+\sqrt{3}^2}\}=\cos(t)-\cos\sqrt{3}t$$

8. Να λυθεί με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace η διαφορική εξίσωση $y''-2y'+4y=0$ με $y(0)=1, y'(0)=0$.

Λύση

$$y''-2y'+4y=0 \Leftrightarrow L\{y''-2y'+4y\}=L\{0\} \Leftrightarrow L\{y''\}-2L\{y'\}+4L\{y\}=0 \Leftrightarrow$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)-2(sL\{y\}-y(0))+4L\{y\}=0 \Leftrightarrow s^2L\{y\}-s-2sL\{y\}+2+4L\{y\}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(s^2-2s+4\right)L\{y\}=s-2 \Leftrightarrow L\{y\}=\frac{s-2}{\left(s^2-2s+4\right)} \Leftrightarrow L\{y\}=\frac{s-2}{\left(s^2-2s+1-1+4\right)} \Leftrightarrow$$

$$y=L^{-1}\{\frac{s-2}{\left(s-1\right)^2+3}\} \Leftrightarrow y=L^{-1}\{\frac{s-1}{\left(s-1\right)^2+3}-\frac{1}{\left(s-1\right)^2+3}\}$$

$$\Leftrightarrow y=L^{-1}\{\frac{s}{s^2+3}-\frac{1}{s^2+3}\}\Big|_{s=s-1} \Leftrightarrow y=e^tL^{-1}\{\frac{s}{s^2+3}-\frac{1}{s^2+3}\}$$

$$\Leftrightarrow y=e^t\left(L^{-1}\{\frac{s}{s^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\}-\frac{1}{\sqrt{3}}L^{-1}\{\frac{\sqrt{3}}{s^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\}\right)\Leftrightarrow y=e^t\left(\cos\left(\sqrt{3}t\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\sqrt{3}t\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow y=e^t\left(\cos\left(\sqrt{3}t\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\sqrt{3}t\right)\right)$$

9. Έστω ένα κύκλωμα RLC το οποίο αποτελείται από μία πηγή ηλεκτρεργετικής δύναμης $E=300\ Volt$ σταθερή, πυκνωτή χωρητικότητας $C=0.02\ Farad$, πηνίο αυτεπαγωγής $l=2\ Herny$, ωμική αντίσταση $R=16\ Ohm$ και διακόπτη Δ. Το φορτίο του πυκνωτή τη χρονική στιγμή t=0 είναι 0. Βρείτε το φορτίο και την ένταση του ρεύματος τη χρονική στιγμή t>0.

Λύση

Σύμφωνα με τα όσα έχουμε πει ο νόμος του Kirchhoff δίνει

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{1}{lC}Q+\frac{R}{l}\cdot\frac{dQ}{dt}=\frac{E(t)}{l}\Leftrightarrow\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{1}{2\cdot 0.02}Q+\frac{16}{2}\cdot\frac{dQ}{dt}=\frac{300}{2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+25Q+8\frac{dQ}{dt}=150\Leftrightarrow L\{\frac{d^2Q}{dt^2}\}+25L\{Q\}+8L\{\frac{dQ}{dt}\}=150L\{1\}$$

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες $L\{y'(t)\}=sL\{y(t)\}-y(0)$,

$L\{y''(t)\}=s^2L\{y(t)\}-sy(0)-y'(0)$ αφού θέσουμε $L\{1\}=\frac{1}{s}$ και $Q(0)=Q'(0)=0$

$$s^2q-sQ\{0\}-Q'\{0\}+8\left(sL\{Q\}-Q(0)\right)+25L\{Q\}=150\frac{1}{s}\Leftrightarrow L\{Q\}=\frac{150}{s\left(s^2+8s+25\right)}$$

Το τριώνυμο $s^2+8s+25$ έχει διακρίνουσα μικρότερη του μηδέν και δεν παραγοντοποιείται. Οπότε:

$$q=\frac{150}{s\left(s^2+8s+25\right)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{\left(s^2+8s+25\right)}=\frac{As^2+8As+25A+Bs^2+Cs}{s\left(s^2+8s+25\right)}=$$

$$=\frac{\left(A+B\right)s^2+\left(8A+C\right)s+25A}{s\left(s^2+8s+25\right)}$$

Από όπου έχουμε $25A=150\Rightarrow A=6$, $8A+C=0\Rightarrow C=-8A=-48$, $A+B=0\Rightarrow B=-A=-6$

$$L\{Q\}=\frac{150}{s\left(s^2+8s+25\right)}=\frac{6}{s}-\frac{6s+48}{\left(s^2+8s+25\right)}=\frac{6}{s}-\frac{6s+48}{\left(s^2+8s+16-16+25\right)}=$$

$$=\frac{6}{s}-\frac{6s+48}{\left(s^2+8s+16-16+25\right)}=\frac{6}{s}-\frac{6s+48}{\left(s+4\right)^2+9}=\frac{6}{s}-\frac{6s+24-24+48}{\left(s+4\right)^2+9}=$$

$$=\frac{6}{s}-\frac{6(s+4)+24}{\left(s+4\right)^2+9}=\frac{6}{s}-\frac{6(s+4)}{\left(s+4\right)^2+9}-\frac{24}{\left(s+4\right)^2+9}$$

και τελικά

$$Q(t) = L^{-1}\{\tilde{q}\} = L^{-1}\{\frac{6}{s}\} - L^{-1}\{\frac{6(s+4)}{(s+4)^2+9}\} - L^{-1}\{\frac{24}{(s+4)^2+9}\} =$$

$$= 6L^{-1}\{\frac{1}{s}\} - 6L^{-1}\{\frac{(s+4)}{(s+4)^2+9}\} - 8L^{-1}\{\frac{3}{(s+4)^2+3^2}\} =$$

$$= 6L^{-1}\{\frac{1}{s}\} - 6e^{-4t}L^{-1}\{\frac{s}{s^2+3^2}\} - 8e^{-4t}L^{-1}\{\frac{3}{s^2+3^2}\} = 6 - 6e^{-4t}\cos 3t - 8e^{-4t}\sin 3t \ .$$

Όπου εκτός από τους απλούς κανόνες χρησιμοποιήσαμε τον παρακάτω κανόνα **μετατόπισης**:

$$L^{-1}\{F(s-a)\} = L^{-1}\{F(s)\}\Big|_{s=s-a} = e^{at}L^{-1}\{F(s)\} = e^{at}f(t)$$

Παραγωγίζοντας

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = 24e^{-4t}\cos(3t) + 18e^{-4t}\sin(3t) + 32e^{-4t}\sin(3t) - 24e^{-4t}\cos(3t) =$$

$$= 50e^{-4t}\sin(3t)$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο (όπως φυσικά αναμέναμε αφού τα δεδομένα είναι τα ίδια) με το παράδειγμα που είδαμε παραπάνω στα κυκλώματα RLC. Ωστόσο, η διαδικασία είναι πιο επίπονη. Η αντικατάσταση της $\int_0^t i(w)dw = Q(t)$ πριν κάνουμε το μετασχηματισμό Laplace και η επίλυση ως προς την ένταση του ρεύματος κάνει τη διαδικασία πιο απλή.

10. Έστω ένα κύκλωμα LC το οποίο αποτελείται από μία πηγή ηλεκτρεργετικής δύναμης *E=100 Volt* σταθερή, πυκνωτή χωρητικότητας *C=0.02 Farad*, πηνίο αυτεπαγωγής $l=1$ *Herny* και διακόπτη *Δ*. Το φορτίο του πυκνωτή τη χρονική στιγμή t=0 είναι 0. Με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace βρείτε την ένταση του ρεύματος τη χρονική στιγμή *t*.

Εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο (των τάσεων) του Kirchoff ο οποίος μας δίνει

$$l\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\cdot Q = E(t) \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{Q}{0.02} = 100,$$

Όταν ο πυκνωτής δεν είναι φορτισμένος την στιγμή που κλείνει ο διακόπτης δηλαδή $Q(0)=0$, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε

$$\frac{di}{dt} + 50\int_0^t i(w)dw = 100,$$

Λύση

Για να λύσουμε εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace και έχουμε

$$L\{\frac{di}{dt}\} + 50L\{\int_0^t i(w)dw\} = L\{100\} \Leftrightarrow sL\{i\} - i(0) + 50\frac{L\{i\}}{s} = 100L\{1\}$$

Η παραπάνω σχέση γίνεται, όταν η ένταση του ρεύματος χρονική στιγμή t=0 είναι 0.:

$$sL\{i\}+50\frac{L\{i\}}{s}=\frac{100}{s}\Leftrightarrow\left(s^2+50\right)L\{i\}=100\Leftrightarrow L\{i\}=\frac{100}{\left(s^2+50\right)}\Leftrightarrow$$

$$i=\frac{100}{\sqrt{50}}L^{-1}\{\frac{\sqrt{50}}{\left(s^2+\left(\sqrt{50}\right)^2\right)}\}\Leftrightarrow i=2\sqrt{50}\sin(\sqrt{50}t)$$

11. Έστω ένα κύκλωμα LC το οποίο αποτελείται από μία πηγή ηλεκτρεργετικής δύναμης *E*=$100\cdot t$ *Volt* , πυκνωτή χωρητικότητας *C=0.01 Farad*, πηνίο αυτεπαγωγής $l=1$ *Herny* και διακόπτη *Δ*. Το φορτίο του πυκνωτή τη χρονική στιγμή t=0 είναι 0. Με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace βρείτε την ένταση του ρεύματος τη χρονική στιγμή *t*.

Λύση

Εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο (των τάσεων) του Kirchoff ο οποίος μας δίνει

$$l\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\cdot Q=E(t)\Rightarrow\frac{di}{dt}+\frac{Q}{0.02}=100\cdot t,$$

Όταν ο πυκνωτής δεν είναι φορτισμένος την στιγμή που κλείνει ο διακόπτης δηλαδή $Q(0)=0$, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε

$$\frac{di}{dt}+\frac{1}{0.01}\int_0^t i(w)dw=100\cdot t\ ,$$

Για να λύσουμε εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace και έχουμε

$$L\{\frac{di}{dt}\}+\frac{1}{0.01}L\{\int_0^t i(w)dw\}=100L\{t\}\Leftrightarrow sL\{i\}-i(0)+\frac{1}{0.01}\frac{L\{i\}}{s}=100L\{t\}$$

Η παραπάνω σχέση γίνεται, όταν η ένταση του ρεύματος χρονική στιγμή t=0 είναι 0.:

$$sL\{i\}+100\frac{L\{i\}}{s}=100\frac{1}{s^2}\Leftrightarrow\frac{\left(s^2+100\right)}{s}L\{i\}=100\frac{1}{s^2}\Leftrightarrow L\{i\}=\frac{100}{\left(s^2+100\right)s}\Leftrightarrow$$

$$i=L^{-1}\{\frac{100}{s\left(s^2+10^2\right)}\}$$

Αναλύουμε την έκφραση:

$$\frac{100}{s(s^2+100)}=\frac{As+B}{(s^2+100)}+\frac{C}{s}=\frac{As^2+Bs+Cs^2+100C}{s(s^2+100)}=\frac{\left(A+C\right)s^2+Bs+100C}{s(s^2+100)}$$

Οπότε έχουμε

$$100C=100\Rightarrow C=1,B=0,A+C=0\Rightarrow A=-C=-1$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν,

$$i=L^{-1}\{\frac{100}{s\left(s^2+10^2\right)}\}=L^{-1}\{\frac{-s}{\left(s^2+10^2\right)}+\frac{1}{s}\}=L^{-1}\{\frac{-s}{\left(s^2+10^2\right)}\}+L^{-1}\{\frac{1}{s}\}=-\cos(10t)+1$$

12. Έστω ένα κύκλωμα RL το οποίο αποτελείται από μία πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης *E=20 sin(4t) Volt,* πηνίο αυτεπαγωγής *l=5 Herny,* ωμική αντίσταση *R=10 Ohm* και διακόπτη *Δ*. Η ένταση του ρεύματος τη χρονική στιγμή t=0 είναι 0. Βρείτε την ένταση του ρεύματος τη χρονική στιγμή t>0.

Λύση

$$l\frac{di}{dt}+iR=E(t)\Leftrightarrow \frac{di}{dt}+\frac{R}{l}i=\frac{E(t)}{l}\Leftrightarrow \frac{di}{dt}+\frac{10}{5}i=\frac{20}{5}\sin(4t)\Leftrightarrow \frac{di}{dt}+2i=4\sin(4t)$$

Εφαρμόζω μετασχηματισμό Laplace

$$L\{\frac{di}{dt}\}+2L\{i\}=4L\{\sin(4t)\}\Leftrightarrow sL\{i\}-i(0)+2L\{i\}=\frac{16}{s^2+4^2}\Leftrightarrow (s+2)L\{i\}=\frac{16}{s^2+4^2}\Leftrightarrow$$

$$L\{i\}=\frac{16}{\left(s^2+4^2\right)(s+2)}\Leftrightarrow i=L^{-1}\left\{\frac{16}{\left(s^2+4^2\right)(s+2)}\right\}$$

Αφού

$$\frac{16}{\left(s^2+4^2\right)(s+2)}=\frac{A}{(s+2)}+\frac{Bs+C}{\left(s^2+4^2\right)}=\frac{(A+B)s^2+(C+2B)s+(16A+2C)}{(s+2)\left(s^2+4^2\right)}$$ από όπου

$$\left.\begin{array}{l}A+B=0\\ C+2B=0\\ 16A+2C=16\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}A=-B\\ C=-2B\\ -16B-4B=16\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}A=-B\\ C=-2B\\ \mathrm{B}=-\frac{4}{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}A=\frac{4}{5}\\ C=\frac{8}{5}\\ \mathrm{B}=-\frac{4}{5}\end{array}\right. .$$

Τελικά

$$i(t)=L^{-1}\left\{\frac{\frac{4}{5}}{(s+2)}+\frac{-\frac{4}{5}s+\frac{8}{5}}{\left(s^2+4^2\right)}\right\}\Leftrightarrow i(t)=\frac{4}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}-\frac{s}{\left(s^2+4^2\right)}+\frac{2}{\left(s^2+4^2\right)}\right\}\Leftrightarrow$$

$$i(t)=\frac{4}{5}\left(L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+4^2\right)}\right\}+\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{4}{\left(s^2+4^2\right)}\right\}\right)$$

$$\Leftrightarrow i(t)=\frac{4}{5}\left(e^{-2t}-\cos(4t)+\frac{1}{2}\sin(4t)\right)$$

13. Έστω ένα κύκλωμα RC το οποίο αποτελείται από μία πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης *E=100e*^{3t} *Volt* , πυκνωτή χωρητικότητας *C=1/20,* ωμική αντίσταση *R=10 Ohm* και διακόπτη *Δ*. Το φορτίο του πυκνωτή τη χρονική στιγμή t=0 είναι 0. Με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace βρείτε το φορτίο τη χρονική στιγμή t>0και μετά από τη σχέση που τα συνδέει βρείτε την ένταση του ρεύματος.

Λύση

Εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο (των τάσεων) του Kirchoff ο οποίος μας λέει ότι η ηλεκτρεγερτική δύναμη ισοφαρίζει κάθε χρονική στιγμή την πτώση τάσης στον πυκνωτή $\frac{Q}{C}$ όπου $Q=Q(t)$ είναι το φορτίο του πυκνωτή και την πτώση τάσης στην αντίσταση iR, δηλαδή:

$$iR+\frac{Q}{C}=E(t)\Leftrightarrow R\cdot\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=E(t),$$

Αφού λάβουμε υπόψη ότι η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα ισούται με το ρυθμό μεταβολής του φορτίου του πυκνωτή, δηλαδή $i = \frac{dQ}{dt}$.

Αντικαθιστούμε και έχουμε

$$10 \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{1/20} Q = 100e^{3t} \Rightarrow 10 \cdot \frac{dQ}{dt} + 20Q = 100e^{3t} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + 2Q = 10e^{3t} \Rightarrow$$

$$L\{\frac{dQ}{dt}\} + 2L\{Q\} = 10L\{e^{3t}\} \Rightarrow sL\{Q\} - Q(0) + 2L\{Q\} = 10L\{e^{3t}\} \Rightarrow (s+2)L\{Q\} = \frac{10}{s-3}$$

$$\Rightarrow L\{Q\} = \frac{10}{(s-3)(s+2)} \Rightarrow Q(t) = L^{-1}\left\{\frac{10}{(s-3)(s+2)}\right\}$$

$$\frac{\mathrm{A}}{(x-a_1)(x-a_2)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)}$$

Η παράσταση

$$\frac{10}{(s+2)(s-3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-3} = \frac{(A+B)s - 3A + 2B}{(s+2)(s-3)}$$

δίνει το σύστημα

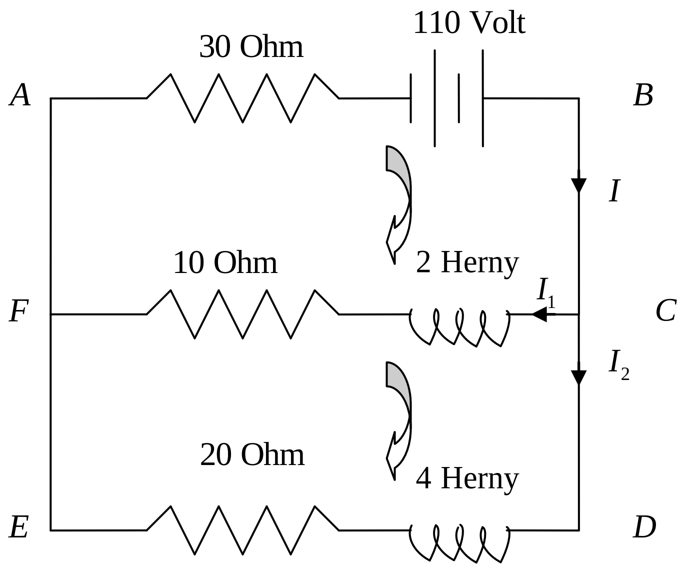
$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ -3A+2B &= 10 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} A = -B &= -2 \\ B &= 2 \end{aligned}.$$

Τελικά

$$Q(t) = 2\left(-L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)}\right\}\right) = 2(e^{3t} - e^{-2t})$$

παραγωγίζοντας εξάγουμε την ένταση του ρεύματος $i(t) = \frac{dQ}{dt} = 6e^{3t} + 4e^{-2t}t$

14. Έστω το παρακάτω κύκλωμα



Λύση

Εφαρμόζοντας το νόμο του Kirchhoff υπολογίστε την ένταση του ρεύματος στους διάφορους κλάδους εάν το αρχικό ρεύμα είναι 0.

Γνωρίζουμε ότι ισχύει $I = I_1 + I_2$. Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο (των τάσεων) του Kirchoff στο ABCF και FCDF παίρνουμε αντίστοιχα:

$$\left\{\begin{array}{c} 30I + 2\dfrac{dI_1}{dt} + 10I_1 = 110 \\ -10I_1 - 2\dfrac{dI_1}{dt} + 4\dfrac{dI_2}{dt} + 20I_2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \dfrac{dI_1}{dt} + 20I_1 + 15I_2 = 55 \\ -5I_1 - \dfrac{dI_1}{dt} + 2\dfrac{dI_2}{dt} + 10I_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Συμβολίζω $x = I_1, y = I_2$ οπότε $L\{x\} = X$ και $L\{y\} = Y$ Τότε

$$\left.\begin{array}{l} x' = -20x - 15y + 55 \\ -x' + 2y' = 5x - 10y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} L\{x'\} = L\{-20x - 15y + 55\} \\ L\{-x' + 2y'\} = L\{5x - 10y\} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} L\{x'\} = -20L\{x\} - 15L\{y\} + 55L\{1\} \\ -L\{x'\} + 2L\{y'\} = 5L\{x\} - 10L\{y\} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} sL\{x\} - x(0) = -20L\{x\} - 15L\{y\} + 55L\{1\} \\ -\left(sL\{x\} - x(0)\right) + 2\left(sL\{y\} - y(0)\right) = 5L\{x\} - 10L\{y\} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} sX = -20X - 15Y + \dfrac{55}{s} \\ -sX + 2sY = 5X - 10Y \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} s(s+20)X + 15sY = 55 \\ (s+5)X - (2s+10)Y = 0 \end{array}\right\}$$

Από τη δεύτερη εξίσωση βλέπουμε ότι $\tilde{x} = 2\tilde{y}$ και οπότε από την πρώτη

$$\left(2s^2 + 55s\right)Y = 55 \Rightarrow Y = \frac{55}{s(2s+55)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(2s+55)} = \frac{\left(2A+B\right)s + 55A}{s(2s+55)}$$

από όπου παίρνουμε $A = 1,\ \ 2A + B = 0 \Rightarrow B = -2A = -2$

Οπότε

$$Y = \frac{1}{s} - \frac{2}{(2s+55)} \Rightarrow I_2 = y = L^{-1}\{\frac{1}{s} - \frac{2}{(2s+55)}\} = L^{-1}\{\frac{1}{s}\} - L^{-1}\{\frac{1}{(s+55/2)}\} = 1 - e^{-\frac{55}{2}t}$$

και $X = 2Y \Rightarrow I_1 = x = 2y = 2 - 2e^{-\frac{55}{2}t}$

$I = I_1 + I_2 = 3 - 3e^{-\frac{55}{2}t}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στο σύγγραμμα που διανέμεται και στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος. Το περιεχόμενο του αρχείου απλά αποτελεί περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Αποτελούν τις διαφάνειες της διδασκαλίας μαθήματος από το διδάσκοντα για δική του χρήση και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί και να μην αναπαραχθεί και διανεμηθεί για άλλο σκοπό.

Ιδιαίτερα παραδείγματα και σχήματα έχουν αντληθεί από τα συγγράμματα :

1. Ανώτερα Μαθηματικά II για Μηχανικούς Α. Αθανασιάδη, Εκδόσεις Τζιόλα.
2. Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Α. Αθανασιάδη, Εκδόσεις Ζήτη.
3. Laplace Transforms, Schaum's Outlines
4. Advanced Engineering Mathematics, K.A. Stroud, Palgrave Macmilan
5. Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Μυλωνάς Ν., Χατζαράκης Γ., Εκδόσεις Τζιόλα.

Και υπόκεινται στο Copyright των εκδόσεων αυτών.