5. ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗΣ

5.1 ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΧΑΡΤΗ ΚΑΡΝΩ (Karnaugh)

5.1.1 Εισαγωγή

Οι λογικές συναρτήσεις που προκύπτουν από τη λύση ενός πρακτικού προβλήματος δεν είναι πάντα στην απλούστερη μορφή τους. Μπορεί και πρέπει να γίνει η απλοποίηση των συναρτήσεων ώστε να προκύψουν οι πλέον **απλές** ισοδύναμες εκφράσεις τους ώστε στην κατασκευή των κυκλωμάτων να χρησιμοποιήσουμε το **μικρότερο** δυνατό πλήθος ολοκληρωμένων κυκλωμάτων και πυλών με αποτέλεσμα τη μείωση της πολυπλοκότητας αλλά και του κόστους των κυκλωμάτων.

Η απλοποίηση λογικών συναρτήσεων με τη χρήση των Θεωρημάτων της άλγεβρας Boole σε μερικές συναρτήσεις (2 ή 3 μεταβλητών) είναι προφανής και εύκολη, σε άλλες όμως συναρτήσεις ειδικά σε περιπτώσεις πολλών μεταβλητών (4,5,6 κ.λ.π.) είναι αρκετά επίπονος και δεν υπάρχει ασφαλής τρόπος ώστε να γνωρίζουμε αν το αποτέλεσμα μπορεί να έλθει σε πιο απλή μορφή, ή πιο τέχνασμα να χρειάζεται ώστε να γίνει αυτό. Όπως π.χ. η πρόσθεση όρων της μορφής $(A\overline{A})$ ή πολλαπλασιασμός με $(A+\overline{A})$ κ.λ.π.

Ας δούμε μερικές εφαρμογές απλοποίησης με Boole:

1$^{\eta}$**.** $Z=A\overline{B}+B\overline{C}+\overline{B}C+\overline{A}B$. Πολλαπλασιάζουμε τον 2^{o} & 3^{o} όρο επί $(A+\overline{A})$ και τον 1^{o} & 4^{o} επί $(C+\overline{C})$ οπότε:

$$Z=A\overline{B}(C+\overline{C})+(A+\overline{A})B\overline{C}+(A+\overline{A})\overline{B}C+\overline{A}B(C+\overline{C})=$$

$$=A\overline{B}C+A\overline{B}.\overline{C}+AB\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}.\overline{B}C+\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}=$$

$$=A\overline{B}(1+C)+(1+\overline{A})B\overline{C}+\overline{A}C(B+\overline{B})=A\overline{B}+B\overline{C}+\overline{A}C$$ τελικά έμειναν 3 όροι.

2$^{\eta}$**.** $Z=\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}+AB\overline{C}+A\overline{B}.\overline{C}$. Προσθέτουμε τον όρο $A\overline{B}.\overline{C}$ αφού $(A+A)=A$

$$Z=\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}+AB\overline{C}+A\overline{B}.\overline{C}+A\overline{B}.\overline{C}=(\overline{B}.\overline{C}(A+\overline{A})+A\overline{C}(B+\overline{B})=\overline{B}.\overline{C}+A\overline{C}$$ έμειναν 2 όροι.

3$^{\eta}$. $Z=(\overline{A}+\overline{B}+C)(A+B+C)(A+\overline{B}+C)$ (με DE MORGAN και στα δυο μέλη)

$$\overline{Z}=\overline{(\overline{A}+\overline{B}+C)(A+B+C)(A+\overline{B}+C)}=\overline{(\overline{A}+\overline{B}+C)}+\overline{(A+B+C)}+\overline{(A+\overline{B}+C)}=$$

$$=AB\overline{C}+\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}=AB\overline{C}+\overline{A}.\overline{C}(B+\overline{B})=AB\overline{C}+\overline{A}.\overline{C}=\overline{C}(AB+\overline{A})$$

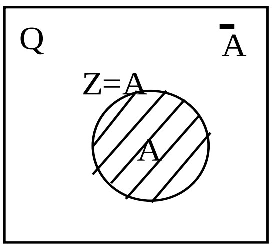
$$\Rightarrow \overline{\overline{Z}}=Z=\overline{\overline{C}(AB+\overline{A})}=\overline{(\overline{A}+AB)}+\overline{\overline{C}}=C+\overline{\overline{A}}(\overline{AB})=C+A(\overline{A}+\overline{B})=A\overline{A}+A\overline{B}+C=A\overline{B}+C.$$

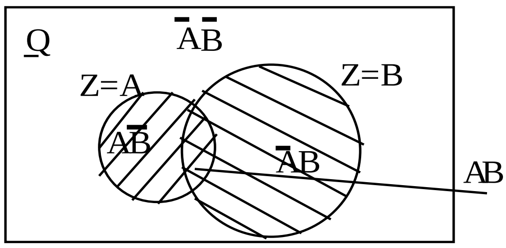
5.1.2. Συσχέτιση διαγραμμάτων Vein με τον χάρτη Καρνώ.

Μια πιο απλή και τεχνική διαδικασία απλοποίησης είναι η γραφική μέθοδος με τους Χάρτες (ή πίνακες) Καρνώ (KARNAUGH). Η μέθοδος είναι εύχρηστη για συναρτήσεις μέχρι και έξι μεταβλητές. Για περισσότερες παρουσιάζει δυσκολία και συνήθως χρησιμοποιούνται άλλοι μέθοδοι όπως πίνακες των QUINE-Mc CLUSKEY. Βέβαια σήμερα με την ανάπτυξη των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων σε κλίμακες MSI & LSI η απλοποίηση δεν έχει την ίδια αξία όπως παλαιότερα στα κυκλώματα με διακριτά στοιχεία (πύλες) όμως εξακολουθεί να είναι απαραίτητη διαδικασία πριν τη σχεδίαση οποιουδήποτε κυκλώματος (Η δυνατή οικονομία ποτέ δεν κάνει κακό).

Από την θεωρία των συνόλων είναι γνωστό ότι το σύνολο μιας περιοχής ενός διαγράμματος καθορίζει και το χώρο μεταβολής των μεταβλητών της συνάρτησης. Στο συγκεκριμένο αυτό χώρο κάθε μεταβλητή χαρακτηρίζεται από την περιοχή της. Ο χώρος έξω από αυτή την περιοχή χαρακτηρίζεται από το συμπλήρωμά της Από τα παραπάνω προκύπτουν τα γνωστά διαγράμματα Vein.

Έστω η λογική συνάρτηση Q με χώρο μεταβολής το τετράγωνο του σχήματος και μια συνάρτηση Z=A



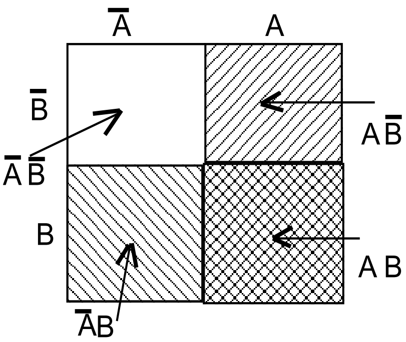


Ο γραμμοσκιασμένος χώρος είναι ο χώρος μεταβολής της A, ενώ ο χώρος έξω από το κύκλο είναι ο χώρος μεταβολής της συμπληρωματικής της A. Αν έχουμε τώρα δυο συναρτήσεις Z=A & Z=B οι οποίες έχουν ένα κοινό χώρο, όπως φαίνεται στο σχήμα, τότε ο χώρος που δεν περιέχεται ούτε στο A ούτε στο B είναι ο χώρος που ανήκει στα συμπληρωματικά των A,B δηλαδή ($\overline{A}.\overline{B}$), ο χώρος που περιέχεται στο A αλλά δεν περιέχεται στο B είναι ο χώρος $A.\overline{B}$, ο χώρος που περιέχεται στο B αλλά δεν περιέχεται στο A είναι ο χώρος $\overline{A}.B$ και τέλος ο χώρος που περιέχεται στο A και στο B είναι ο χώρος AB.

Αν επεκτείνουμε τις έννοιες των διαγραμμάτων Vein, και αντικαταστήσουμε τους κύκλους με τετράγωνα, οδηγούμαστε στους χάρτες Καρνώ. Π.χ. για τις δυο μεταβλητές του διαγράμματος Venn ο αντίστοιχος χάρτης Καρνώ φαίνεται στο σχήμα.

Ο χάρτης Καρνώ είναι ένας πίνακας αληθείας που παριστάνεται με διαφορετικό τρόπο ώστε να διευκολύνει Τεχνικά την διαδικασία της απλοποίησης.

Αποτελείται από **2^n** το πλήθος τετράγωνα, όπου **η** το πλήθος των μεταβλητών και κάθε τετράγωνο ανήκει σε ένα όρο (ελάχιστο όρο). Εξωτερικά του πίνακα τοποθετούνται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των μεταβλητών του που αντιστοιχούν στην στήλη ή στην γραμμή.



Το βασικό χαρακτηριστικό του είναι ότι αλλάζει η τιμή μιας **μόνο** μεταβλητής από τετράγωνο σε τετράγωνο οριζόντια ή κάθετα (στις στήλες ή τις γραμμές).

Η ιδιότητα αυτή επιτρέπει να χρησιμοποιείται **τεχνικά** η σχέση $X+.\overline{X}$ για την απαλοιφή της μεταβλητής που ανήκει σε δυο διαδοχικά (οριζόντια ή κατακόρυφα) τετράγωνα.

Για να υπάρχει αυτή η αλλαγή της μιας μεταβλητής από τετράγωνο σε τετράγωνο πρέπει η αρίθμηση των τετραγώνων να γίνει με κώδικα που έχει τέτοια ιδιότητα και αυτός είναι ο κώδικας GRAY (είναι συμμετρικός, κυκλικός, ανακλαστικός και από συνδυασμό σε συνδυασμό των μεταβλητών **μόνο μια** μεταβλητή **αλλάζει** τιμή π.χ. για δυο μεταβλητές έχουμε 00 01 11 10).

Το ότι ο κώδικας είναι κυκλικός μας επιτρέπει να συνδυάζουμε και τα ακραία τετράγωνα (πάνω ή κάτω, δεξιά ή αριστερά)

5.1.3. Απλοποίηση συναρτήσεων με χάρτη Καρνώ

Προκειμένου τώρα να απλοποιήσουμε μια λογική συνάρτηση με την βοήθεια του χάρτη Καρνώ θα ακολουθήσουμε την τεχνική των έξι βημάτων. Τα βασικά αυτά βήματα της απλοποίησης με Καρνώ αναπτύσσονται αναλυτικά παρακάτω :

1^o Βήμα. Κανονική μορφή λογικής συνάρτησης (ΚΜ-ΛΣ)

2^o Βήμα. Πλήθος τετραγώνων Χάρτη Καρνώ (ΠΤ-ΧΚ)

3^o Βήμα. Συμπλήρωση τετραγώνων χάρτη Καρνώ (ΣΤ-ΧΚ)

4^o Βήμα. Σχηματισμός Ομάδων (ΣΧ-ΟΜ) γειτονικών τετραγώνων

5^o Βήμα. Απλοποιημένη λογική συνάρτηση (Α.Λ.Σ)

6^o Βήμα. Σχεδίαση του Λογικού Κυκλώματος (ΣΧ-Λ.Κ)

1^o Βήμα. Κανονική μορφή λογικής συνάρτησης (ΚΜ-ΛΣ)

Η λογική συνάρτηση πρέπει να είναι σε μια από τις κανονικές μορφές της δηλαδή να είναι άθροισμα ελάχιστων όρων ΑΕΟ (ή άθροισμα γινομένων **Α.Γ**) ή γινόμενο μέγιστων όρων ΓΜΟ (ή γινόμενο αθροισμάτων **Γ.Α**) (όπου όλοι οι όροι περιέχουν όλες τις μεταβλητές στην κανονική ή στην συμπληρωματική μορφή τους).

Αν **δεν είναι** σε μια από τις κανονικές μορφές την **μετατρέπουμε** πολλαπλασιάζοντας κάθε όρο με την μεταβλητή που λείπει στη μορφή $(X+\overline{X})$ αν είναι στη μορφή ΑΕΟ ή προσθέτοντας σε κάθε όρο την μεταβλητή που λείπει στην μορφή $(X\overline{X})$ αν είναι στη μορφή ΓΜΟ.

2ο Βήμα. Πλήθος τετραγώνων Χάρτη Καρνώ (ΠΤ-ΧΚ)

Ανάλογα τώρα με το πλήθος των μεταβλητών της λογικής συνάρτησης, την τοποθετούμε στον πίνακα Καρνώ, αυτός θα έχει τόσα τετράγωνα, όσο το πλήθος των δυνατών συνδυασμών των μεταβλητών. Το πλήθος των τετραγώνων προκύπτει από τη σχέση **Π.Τ**=**2**$^{\mathbf{n}}$ όπου **n** το πλήθος των μεταβλητών. Π.χ.

1) **n**=2 (A,B) $\Rightarrow$ **ΠΤ**=2^2= 4 θέσεις 2) **n**=3 (A,B,C) $\Rightarrow$ **ΠΤ**=2^3= 8 θέσεις

3) **η**=4 (A,B.C,D) $\Rightarrow$ **ΠΤ**=2^4=16 θέσεις 4) **n**=5 (A,B,C,D,E)$\Rightarrow$**ΠΤ**=2^5=32 θέσεις

5) **n**=6 (A,B,C,D,E,F)$\Rightarrow$ **ΠΤ**=2^6=64 θέσεις

Ας δούμε μερικούς χάρτες Καρνώ για διαφορετικό πλήθος μεταβλητών.

1) Πλήθος μεταβλητών **n=2** έστω **(A,B)**

B \ A	$\bar{A}\bar{B}$	$A\bar{B}$
$\bar{A}B$		
AB		

B \ A	0	1
0	0	2
1	1	3

αντικαθιστούμε τα A,B με 0,1 έχουμε

2) Πλήθος μεταβλητών **n=3** έστω **(A,B,C)**

C \ AB	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$	A B	$A\bar{B}$
$\bar{C}$				
C				

C \ AB	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

αντικαθιστούμε τα A,B,C με 0,1 έχουμε

3) Πλήθος μεταβλητών **n=4** έστω **(A,B,C,D)** (Όπου 0,1, κ.λ. οι ελαχιστόροι $m_0, m_1,, m_{n-1}$)

CD \ AB	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$	A B	$A\bar{B}$
$\bar{C}\bar{D}$				
$\bar{C}D$				
C D				
$C\bar{D}$				

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

αντικαθιστούμε τα A,B,C,D με 0,1 έχουμε

4) Πλήθος μεταβλητών **n=5** έστω **(A,B,C,D,E)**

DE \ BC	$\bar{A}$ 00	$\bar{A}$ 01	$\bar{A}$ 11	$\bar{A}$ 10	A 10	A 11	A 01	A 00
00	0	4	12	8	24	28	20	16
01	1	5	13	9	25	29	21	17
11	3	7	15	11	27	31	23	19
10	2	6	14	10	26	30	22	18

5) Πλήθος μεταβλητών **n=6 (A,B,C,D,E,F)**

	EF \ CD	$\bar{B}$ 00	$\bar{B}$ 01	$\bar{B}$ 11	$\bar{B}$ 10	B 10	B 11	B 01	B 00
$\bar{A}$	00	0	4	12	8	24	28	20	16
$\bar{A}$	01	1	5	13	8	25	29	21	17
$\bar{A}$	11	3	7	15	11	27	31	23	19
$\bar{A}$	10	2	6	14	10	26	30	22	18
A	10	34	38	46	42	58	62	54	50
A	11	35	39	47	43	59	63	55	51
A	01	33	37	45	41	57	61	53	49
A	00	32	36	44	40	56	60	52	48

3^Ο^ Βήμα. Συμπλήρωση τετραγώνων χάρτη Καρνώ (ΣΤ-ΧΚ)

Κάθε τετράγωνο χαρακτηρίζεται από τις συντεταγμένες του, και διαφέρει από τα γειτονικά του **μόνο** κατά **μια** μεταβλητή λόγω του κώδικα GRAY όπως έχουμε πει (Δείτε το αυτό στους πίνακες).

Κάθε συνδυασμός τιμών των μεταβλητών **αντιστοιχεί** σε **ένα** μόνο τετράγωνο

Για να **εισάγουμε** (τοποθετήσουμε) τώρα μια λογική συνάρτηση στον χάρτη Καρνώ κάνουμε τα παρακάτω:

α) Σημειώνουμε ένα-"**1**" στα τετράγωνα των οποίων οι συντεταγμένες τους αντιστοιχούν στους όρους της συνάρτησης, όταν είναι στην μορφή ΑΕΟ. Δηλαδή σημειώνουμε στον πίνακα **όλους** τους **ελάχιστους** όρους που έχει η συνάρτηση με ένα-**"1"** (ή μεταφέρουμε τους άσσους που έχει ο πίνακας αληθείας αν έχουμε τέτοιο) και στα υπόλοιπα τετράγωνα βάζουμε μηδέν-"**0**".

β) Σημειώνουμε μηδέν-"**0**" στα τετράγωνα των οποίων συντεταγμένες τους αντιστοιχούν στους όρους της συνάρτησης, όταν είναι στην μορφή ΓΜΟ. Δηλαδή σημειώνουμε στον πίνακα **όλους** τους **μέγιστους** όρους που έχει η συνάρτηση με μηδέν-**"0"** (ή μεταφέρουμε τα μηδενικά που έχει ο πίνακας αληθείας αν έχουμε τέτοιο) και στα υπόλοιπα τετράγωνα βάζουμε ένα-"**1**").

Παραδείγματα: Συμπλήρωση τετραγώνων Χ.Κ αν η λογική συνάρτηση είναι :

α) Στην μορφή ΑΕΟ (ή ΑΓ) έστω $Z=\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$ = Σ(0,5,6,7).

Συμπληρώνουμε τον Καρνώ σημειώνοντας άσσο στα τετράγωνα που δείχνουν τα βάρη της συνάρτησης (Η έκφραση της συνάρτησης με την μορφή αθροίσματος των “βαρών” της διευκολύνει την συμπλήρωση).

β) Στην μορφή ΓΜΟ (ή ΓΑ) έστω $Z=(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(A+B+\overline{C})(A+B+C)$.

Με την ιδιότητα De Morgan εκφράζουμε την λογική συνάρτηση στη μορφή του συμπληρώματος οπότε έχουμε $\overline{Z}=ABC+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}.\overline{B}.C++\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$ =Σ(0,1,2,7) και στη συνέχεια σημειώνουμε μηδενικά στα αντίστοιχα τετράγωνα που δείχνουν τα βάρη της συνάρτησης. Οι παραπάνω συναρτήσεις τοποθετημένες στους χάρτη Καρνώ φαίνονται παρακάτω.

α)

C \ AB	00	01	11	10
0	^{0} **1**	^{2}	^{6} **1**	^{4}
1	^{1}	^{3}	^{7} **1**	^{5} **1**

β)

C \ AB	00	01	11	10
0	^{0} **0**	^{2} **0**	^{6}	^{4}
1	^{1} **0**	^{3}	^{7} **0**	^{5}

4^{O} Βήμα. Σχηματισμός Ομάδων (ΣΧ-ΟΜ) γειτονικών τετραγώνων

Μετά τη συμπλήρωση του χάρτη, την τοποθέτηση δηλαδή της λογικής συνάρτησης σε αυτόν με την μια ή την άλλη μορφή, πρέπει να σχηματίσουμε "ομάδες γειτονικών (διαδοχικών) τετραγώνων" τα οποία να έχουν περιεχόμενο **α)** ένα-"**1**" ή **β)** μηδέν-"**0**" ανάλογα με το σε ποια κανονική μορφή θέλουμε να εκφράσουμε την τελική λογική συνάρτηση.

Τέτοιες ομάδες γειτονικών τετραγώνων μπορεί να αποτελούν ένα **ορθογώνιο** παραλληλόγραμμο **(οριζόντιο** ή **κάθετο)** ή ένα **τετράγωνο**. Τις ομάδες αυτές τις αποκαλούμε συχνά υπο-ομάδες ή υπόκυβους επειδή σε τρεις διαστάσεις δίνουν τέτοια εντύπωση.

Εδώ έχουμε μερικούς κανόνες ώστε να πετύχουμε το σωστό αποτέλεσμα Οι κανόνες σχηματισμού των ομάδων είναι:

<u>Κανόνες σχηματισμού ομάδων</u>

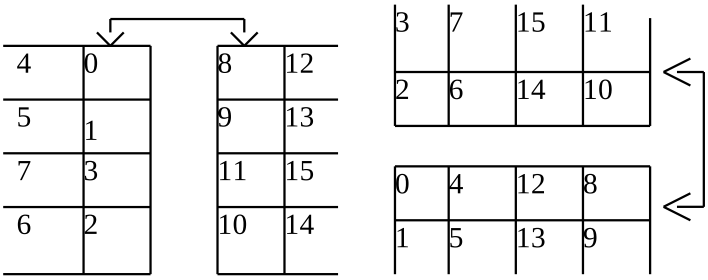
α) Στις ομάδες που θα σχηματίσουμε πρέπει να συμπεριληφθούν **όλα** τα τετράγωνα που έχουν ένα-"**1**" για έκφραση της λογικής συνάρτησης στην μορφή ΑΕΟ ή μηδέν-"**0**" για έκφραση της λογικής συνάρτησης στην μορφή ΓΜΟ.

β) Το πλήθος των γειτονικών (διαδοχικών) τετραγώνων της **ομάδας** πρέπει **να** υπακούει στη σχέση **Π**=**2^{m}**, όπου **m=0,1,2,3,..** τα οποία περιέχουν μονάδες ή μηδενικά. Μια υπο-ομάδα δηλαδή μπορεί να περιλαμβάνει 1,2,4,8,16,32 κ.λ.π διαδοχικά (γειτονικά) τετράγωνα.

γ) Οι ομάδες πρέπει να είναι <u>**όσο** το δυνατόν μεγαλύτερες</u> (να περιέχουν το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος τετραγώνων) και να είναι <u>**όσο** το δυνατόν **λιγότερες.**</u> (το μικρότερο δυνατό πλήθος ομάδων)

ΣΗΜ 1: Ο πίνακας θεωρείται ότι δεν έχει άκρα λόγω του κώδικα GRAY όπως είπαμε. Δηλαδή η επάνω και η κάτω γραμμή του πίνακα είναι γειτονικές όπως και η αριστερή με τη δεξιά στήλη. π.χ

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10



ΣΗΜ 2: Πολλές φορές ή σε περιπτώσεις όπου η συνάρτηση εκφράζεται με τη μορφή αθροίσματος, είναι χρήσιμη η αρίθμηση των τετραγωνιδίων να γίνεται με δεκαδικούς αριθμούς. Για παράδειγμα στον προηγούμενο πίνακα των τεσσάρων μεταβλητών όπου πήραμε A=2^{3}=8,B=2^{2}=4,C=2^{1}=2,D=2^{0}=1

5^{ο} Βήμα. Απλοποιημένη Λογική Συνάρτηση (Α.Λ.Σ)

Αν τώρα έχουμε τοποθετήσει μια συνάρτηση στο χάρτη Καρνώ και έχουμε σχηματίσει τις ομάδες, σύμφωνα με τα προηγούμενα, τότε η ζητούμενη συνάρτηση **εκφράζεται** σε μια από τις δυο μορφές (ανάλογα με την λογική σχεδίασης) ή και στις δυο μορφές αν αυτό απαιτείται,

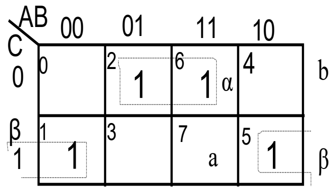
Δηλαδή σαν:

α) **άθροισμα** ελάχιστων όρων ΑΕΟ (ή **Α.Γ**) παίρνοντας υπ' όψιν όλους τους άσσους "**1**" του χάρτη και σχεδίαση με λογική NAND (AND-OR) ή

β) **γινόμενο** μεγίστων όρων ΓΜΟ (ή **Γ.Α**) παίρνοντας υπόψη όλα τα μηδενικά "**0**" του χάρτη και σχεδίαση με λογική NOR (OR-AND).

Παράδειγμα: Δίδεται ο χάρτης Καρνώ του σχήματος με σημείωση των όρων με άσσους και ζητείται η Α.Λ.Σ στην μορφή α) ΑΕΟ ή (Α.Γ) και β) ΓΜΟ ή (Γ.Α)

Σχηματίζουμε ομάδες διαδοχικών τετραγώνων, τις υπο-ομάδες, με άσσους για την έκφραση Α.Γ και μηδενικών για την έκφραση Γ.Α. Ας δούμε πως πάμε στην απλοποιημένη έκφραση της συνάρτησης. Όπως είπαμε οι ομάδες περιλαμβάνουν όσο το δυνατό περισσότερα γειτονικά τετράγωνα με "**1**" ή "**0**", γιατί ομάδα με δυο γειτονικά "**1**" ή "**0**" σημαίνει **απαλοιφή** μιας μεταβλητής, ***αυτής που αλλάζει τιμή*** στα ***δυο διαδοχικά τετράγωνα,*** οριζόντια ή κατακόρυφα. Χρησιμοποιούμε για την απαλοιφή την ιδιότητα Boole $B+A\overline{B}=A(B+\overline{B})=A.1=A$.



Η κάθε ομάδα θα περιέχει **μόνο** τις μεταβλητές που διατηρούνται **σταθερές** σε **όλα** τα **τετράγωνά** της. Επομένως για **4** γειτονικά τετράγωνα με "**1**" ή "**0**" συνεπάγεται απαλοιφή 2 μεταβλητών και γενικά σε ομάδα με $\mathbf{2^n}$ γειτονικά "**1**" ή "**0**" συνεπάγεται απαλοιφή **n** μεταβλητών.

Οι όροι των γινομένων που θα προκύψουν από τις ομάδες αθροίζονται και αυτό που προκύπτει αντιστοιχεί στην απλοποιημένη έκφραση της λογικής συνάρτησης στην μορφή Α.Γ $Z=\overline{B}C+B\overline{C}$, ενώ οι όροι των αθροισμάτων που θα προκύψουν πολλαπλασιάζονται και αυτό που προκύπτει αντιστοιχεί στην απλοποιημένη έκφραση της λογικής συνάρτησης στην μορφή Γ.Α $Z=(\overline{B}+\overline{C})+(B+C)$

6$^{\mathbf{o}}$ Βήμα. Σχεδίαση Λογικού Κυκλώματος (ΣΧ-Λ.Κ.) Αφού έχουμε εκφράσει την Α.Λ.Σ σε μια από τις μορφές της σχεδιάζουμε το κύκλωμα που την επαληθεύει με την χρήση μιας τεχνικής σχεδίασης (ή απλά πύλες) α) AND-OR ή NAND αν είναι στη μορφή Α.Γ και β) OR-AND ή NOR αν είναι στη μορφή Γ.Α.

5.1.4. Εφαρμογές απλοποίησης με Καρνώ

1$^{\mathbf{η}}$-Εφαρμογή: Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση $Z_{(A.B)}=\overline{A}.\overline{B}+A\overline{B}$.

1$^{\mathbf{o}}$: Κ.Μ-Λ.Σ Είναι στην κανονική μορφή σαν Α.Γ (άθροισμα ελαχιστόρων)

2$^{\mathbf{o}}$: Π.Τ-ΧΚ ΠΤ=2^n όπου n=2 άρα Π.Τ=2^2=4 τετράγωνα.

3$^{\mathbf{o}}$: Σ.Τ-ΧΚ Συμπληρώνουμε τον χάρτη σημειώνοντας ‘**1**’ στις θέσεις των συντεταγμένων ή των βαρών (0, 2) των όρων της συνάρτησης.

B \ A	0	1
0	0: 1	2: 1
1	1: 0	3: 0

4$^{\mathbf{o}}$:ΣΧ-ΟΜ. Η μια ομάδα που σχηματίζεται αποτελείται από τα τετράγωνα με βάρη 0,2 είναι μια δυάδα άρα απαλείφεται η μεταβλητή Α, που αλλάζει τιμή και μένει η Β που δεν αλλάζει τιμή, με συμπλήρωμα, γιατί ανήκει στη γραμμή με συντεταγμένη ‘**0**’.

5$^{\mathbf{o}}$: Α.Λ.Σ Η έκφραση της ΑΛΣ από την ομάδα του πίνακα είναι $Z_{(A,\,B)}=\overline{B}$

2$^{\mathbf{η}}$-Εφαρμογή: Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση $Z=(\overline{A}+\overline{B}).(A+\overline{B})$

1$^{\mathbf{o}}$: Κ.Μ-Λ.Σ Είναι στην κανονική μορφή σαν ΓΑ (γινόμενο μεγιστόρων). Για την απλούστευση της διαδικασίας τρέπουμε την Z στην συμπληρωματική μορφή της με DeMorgan οπότε έχουμε την $\overline{Z} = A.B + \overline{A}B$ και στη συνέχεια ακολουθούμε την προηγούμενη πορεία.

2ο: Π.Τ-ΧΚ ΠΤ=2^n όπου n=2 άρα Π.Τ=2^2=4 τετράγωνα.

3ο: Σ.Τ-ΧΚ Συμπληρώνουμε τον χάρτη σημειώνοντας εδώ ‘**0**’ στις αντίστοιχες θέσεις των συντεταγμένων ή των βαρών της συνάρτησης.

B \ A	0	1
0	(0) 1	(2) 1
1	(1) 0	(3) 0

4ο: ΣΧ-ΟΜ. Η μια ομάδα που σχηματίζεται αποτελείται από τα τετράγωνα με βάρη 1,3 είναι μια δυάδα άρα απαλείφεται η μεταβλητή A, που αλλάζει τιμή και μένει η B που δεν αλλάζει τιμή και ανήκει στη γραμμή με συντεταγμένη ‘**1**’.

5ο: Α.Λ.Σ Η έκφραση της ΑΛΣ από την ομάδα του πίνακα είναι $\overline{Z}_{(A,B)} = B$ και με τη χρήση DeMorgan έχουμε την τελική μορφή της συνάρτησης $Z_{(A,B)} = \overline{B}$

3η-Εφαρμογή: Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση $Z= \overline{A}.\overline{B}C+ \overline{A}BC+A\overline{B}.\overline{C} +AB\overline{C}$.

Η έκφρασή της με την μορφή αθροίσματος των “βαρών” της είναι: $Z=m_1+m_3+m_4+m_6$ ή Z= 001+011+100+110 = Σ(1,3,4,6).

1ο: Κ.Μ-Λ.Σ Είναι στην κανονική μορφή σαν Α.Γ (άθροισμα ελαχιστόρων)

2ο: Π.Τ-ΧΚ ΠΤ=2^n όπου n=3 άρα Π.Τ=2^3=8 τετράγωνα.

3ο: Σ.Τ-ΧΚ Επειδή η λογική συνάρτηση είναι στη μορφή Α.Γ σημειώνουμε ‘**1**’ στις αντίστοιχες θέσεις των βαρών της.

C \ AB	00	01	11	10
0	(0)	(2)	(6) 1	(4) 1 β
1	(1) 1 α	(3) 1	(7)	(5)

4ο: ΣΧ-ΟΜ. Κάθε μια από τις δυο ομάδες αποτελείται από τα τετράγωνα 1,3 και 4,6. Είναι ομάδες δυάδων άρα απαλείφεται μια μεταβλητή σε κάθε μια, αυτή που αλλάζει τιμή, η B στην **α-ομάδα** και μένουν αυτές που **δεν** αλλάζουν τιμή οι A,C με συμπλήρωμα, καθώς επίσης και η B στην **β-**ομάδα και μένουν αυτές που δεν αλλάζουν τιμή οι A συμπλήρωμα & C γιατί δεν αλλάζει γραμμή η υπο-ομάδα αλλά μόνο στήλη

5ο: Α.Λ.Σ Η έκφραση της Α.Λ.Σ από τον πίνακα είναι $Z=\overline{A}.C+A.\overline{C}$ ή $Z=A\oplus C$

4η-Εφαρμογή: Να απλοποιηθεί η Λ.Σ $Z = (\overline{A} + \overline{B} + C).(\overline{A} + B + C).(A + \overline{B} + \overline{C}).(A + B + \overline{C})$.

1ο: Κ.Μ-Λ.Σ Είναι στην κανονική μορφή σαν Γ.Α (γινόμενο μεγιστόρων)

Για την απλούστευση της διαδικασίας τρέπουμε την Z στην συμπληρωματική μορφή της με DeMorgan οπότε έχουμε την $\overline{Z} = A.B.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.C + \overline{A}.\overline{B}.C$ και στη συνέχεια ακολουθούμε την προηγούμενη πορεία. Η έκφρασή της με την μορφή του συμπληρώματος αθροίσματος των “βαρών” της είναι: $\overline{Z} =$ 110+100+011+001 =6 + 4 + 3 + 1 =Σ(1,3,4,6).

2ο: Π.Τ-ΧΚ ΠΤ=2^n όπου n=3 άρα Π.Τ=2^3=8 τετράγωνα.

3ο: Σ.Τ-ΧΚ Επειδή η λογική συνάρτηση είναι στη μορφή Γ.Α σημειώνουμε '**0**' στις αντίστοιχες θέσεις των βαρών της.

4ο: ΣΧ-ΟΜ. Κάθε μια από τις δυο ομάδες αποτελείται από τα τετράγωνα 1,3 και 4,6. Είναι ομάδες δυάδων άρα απαλείφεται μια μεταβλητή σε κάθε μια, αυτή που αλλάζει τιμή, η Β στην **α-ομάδα** και μένουν αυτές που **δεν** αλλάζουν τιμή οι Α,C με συμπλήρωμα, καθώς επίσης και η Β στην **β-**ομάδα και μένουν αυτές που δεν αλλάζουν τιμή οι Α συμπλήρωμα & C γιατί δεν αλλάζει γραμμή η υπο-ομάδα αλλά μόνο στήλη

C \ AB	00	01	11	10
0	0	2	6: 0	4: 0 (β)
1	1: 0 (α)	3: 0	7	5

5ο: Α.Λ.Σ Η έκφραση της Α.Λ.Σ από τον πίνακα είναι $\Rightarrow \overline{Z}_{(A,B,C)} = \overline{A}.C + A.\overline{C}$ ή $\overline{Z} = A \oplus C$ και η τελική συνάρτηση)με DeMorgan $Z = \overline{A \oplus C}$

5η-Εφαρμογή: Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση $Z=AB\overline{C}+ABC+\overline{A}BC$.

1ο: Κ.Μ-Λ.Σ Είναι στην κανονική μορφή σαν Α.Γ

2ο: Π.Τ-ΧΚ ΠΤ=2^n όπου n=3 άρα Π.Τ=2^3=8 τετράγωνα.

3ο: Σ.Τ-ΧΚ Επειδή η λογική συνάρτηση είναι στη μορφή Α.Γ σημειώνουμε '**1**' στις αντίστοιχες θέσεις των βαρών της.

4ο: ΣΧ-ΟΜ. Κάθε μια από τις δυο ομάδες αποτελείται από τα τετράγωνα 3,7 και 6,7. Παρατηρούμε ότι και οι δυο περιέχουν το τετράγωνο με βάρος 7 (είναι κοινό), είναι ομάδες δυάδων άρα απαλείφεται μια μεταβλητή σε κάθε ομάδα, αυτή που αλλάζει τιμή, η Α στην **α-**ομάδα και μένουν αυτές που δεν αλλάζουν τιμή οι B,C ενώ απαλείφεται η C στην **β-**ομάδα και μένουν οι A,B γιατί αλλάζει γραμμή ή υπο-ομάδα και δεν αλλάζει στήλη.

C \ AB	00	01	11	10
0	0	2	6: 1 (β)	4
1	1	3: 1 (α)	7: 1	5

5ο: Α.Λ.Σ Η έκφραση της Α.Λ.Σ από τον πίνακα είναι $Z_{(A,B,C)}=A.B+B.C$

Εφαρμόζουμε τώρα ταυτόχρονα με τον Χ.Κ τους Νόμους της; Άλγεβρας Boole και έχουμε $Z=AB\overline{C}+ABC+\overline{A}BC+ABC=AB(\overline{C}+C)+BC(\overline{A}+A)=AB+BC$.

Τον κοινό όρο ABC που προστέθηκε στην περίπτωση αυτή τον λάβαμε αυτόματα υπ' όψιν στον πίνακα σαν τον **κοινό όρο** δυο ομάδων.

6η-Εφαρμογή: Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση $Z=\overline{A}.\overline{B}.\overline{D}+A\overline{B}.\overline{C}+ABCD+A\overline{B}C\overline{D}$

1ο: ΚΜ-ΛΣ Επειδή η συνάρτηση **δεν είναι σε κανονική μορφή**, λείπουν δηλαδή κάποιες μεταβλητές από μερικούς όρους, πρέπει να μετατρέψουμε πολλαπλασιάζοντας, κάθε ένα από αυτούς τους όρους με την μεταβλητή που του λείπει στην μορφή $(X+\overline{X})$ οπότε:

$Z=\overline{A}.\overline{B}.\overline{D}(C+\overline{C})+A\overline{B}.\overline{C}(D+\overline{D})+ABCD+A\overline{B}C\overline{D}$

και $Z=\overline{A}.\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}+A\overline{B}.\overline{C}D+A\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}+ABCD+A\overline{B}C\overline{D}$

= 0 0 1 0 + 0 0 0 0 + 1 0 0 1 + 1 0 0 0 + 1 1 1 1+ 1 0 1 0

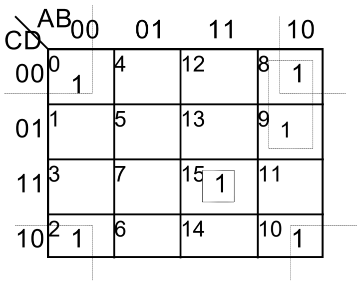
= 2 + 0 + 9 + 8 + 15 + 10 = Σ(0,2,8,9,10,15)

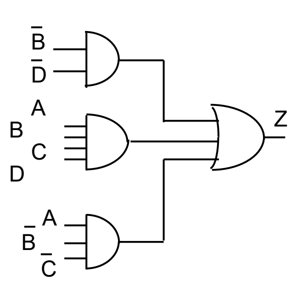
2ο: ΠΤ-ΧΚ Επειδή n=4 το πλήθος των τετραγώνων είναι ΠΤ=2^n=2^4=16 τετράγωνα ή Π.Τ=2*8 ή Π.Τ=4*4 τετράγωνα

3ο: ΣΤ-ΧΚ Σημειώνουμε "**1**" στα τετράγωνα που έχουν ίδιο αριθμό με αυτόν που εκφράζει "βάρος" τη λογικής συνάρτησης, στην περίπτωσή μας στις θέσεις 0,2,8,9,10,15.

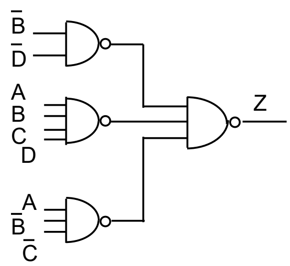
4ο: ΣΧ-ΟΜ Τα 4 γωνιακά τετράγωνα είναι μια ομάδα με στοιχεία $\overline{B}.\overline{D}$, τα δυο συνεχόμενα με βάρη 8,9 αποτελούν άλλη μια ομάδα με στοιχεία $\acute{A}\overline{B}.\overline{C}$ και τέλος ο μοναδικός άσσος "1" με βάρος 15 αποτελείται από τα ABCD.

5ο: Α.Λ.Σ Η απλοποιημένη έκφραση της λογικής συνάρτησης σαν Α.Γ είναι το άθροισμα των παραπάνω όρων, δηλαδή: $Z_{(A,\,B,\,C,\,D)} = \overline{B}.\overline{D} + A\overline{B}.\overline{C} + ABCD$





α. Με AND-OR



β) Με NAND

6ο: ΣΧ-Λ.Κ Σχεδιάζουμε το κύκλωμα της Α.Λ.Σ με τεχνική σχεδίασης AND-OR ή NAND. Τα αντίστοιχα κυκλώματα, σχεδιασμένα σε δυο επίπεδα σχεδίασης, φαίνονται στα σχήματα.

Σημείωση: Στη σχεδίαση δυο επιπέδων θεωρούμε ότι διατίθενται τα συμπληρώματα των μεταβλητών και δεν απαιτούνται αντιστροφείς.

7η-Εφαρμογή: Δίδεται η λογική συνάρτηση $Z= \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.BD + \overline{A}.\overline{B}C + A\overline{B}C\overline{D}$**.**

Να απλοποιηθεί με Καρνώ και το αποτέλεσμα να εκφραστεί σαν:

1) ΑΕΟ (άθροισμα ελάχιστων όρων) ή **Α.Γ** (άθροισμα γινομένων)

2) ΓΜΟ (γινόμενο μέγιστων όρων) ή **Γ.Α** (γινόμενο αθροισμάτων)

1ο: ΚΜ-ΛΣ Επειδή η συνάρτηση **δεν είναι** σε κανονική μορφή πρέπει να την φέρουμε σε αυτήν πολλαπλασιάζοντας κάθε όρους με την μεταβλητή που δεν περιέχεται στην έκφρασή του στη μορφή $(X+\overline{X})$ οπότε η λογική συνάρτηση

$Z= \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}BD + \overline{A}.\overline{B}C + A\overline{B}C\overline{D}$ μετά τις πράξεις που κάνουμε γράφεται

$Z= \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}D + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.B.CD + \overline{A}.B.\overline{C}D + \overline{A}.\overline{B}.CD + \overline{A}.\overline{B}.C.\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D}$

Εκφράζουμε την κανονική μορφή της λογικής συνάρτησης στην μορφή του αθροίσματος των βαρών της

$Z= \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}D + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}BCD + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}.\overline{B}CD + \overline{A}.\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D}$ ή

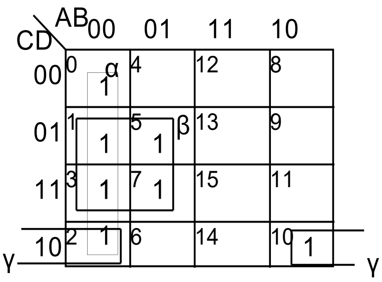
Z= 0 0 0 1+ 0 0 0 0 +0 1 1 1+01 01 +0 0 11+ 0 01 0+1 0 1 0 ή

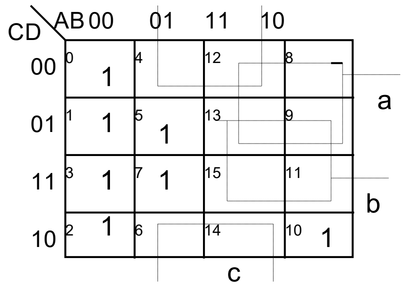
Z= 1 + 0 + 7 + 5 + 3 + 2 + 10 ή Z=Σ(0,1,2,3,5,7,10)

2ο: ΠΤ-ΧΚ Έχουμε n=4 άρα το πλήθος των τετραγώνων είναι ΠΤ=2^n=2^4=16= =2*8=4*4

3ο: ΣΤ-ΧΚ Σημειώνουμε ‘**1**’ στις θέσεις των "βαρών" της συνάρτησης

4ο: ΣΧ-.ΟΜ Σχηματίζουμε τις ομάδες α,β,γ ή a,b,c και έχουμε:





5ο: Α.Λ.Σ. Η απλοποιημένη έκφραση της λογικής συνάρτησης σαν Α.Γ είναι το άθροισμα των ομάδων με ‘**1**’: $Z_1 = \overline{A}.\overline{B} + \overline{A}D + \overline{B}C\overline{D}$ και σαν Γ.Α είναι το γινόμενο των ομάδων με ‘**0**’: $Z_2 = (\overline{A} + C)(\overline{A} + \overline{D})(\overline{B} + D)$

Η Z_2 προκύπτει πιο εύκολα αν εκφράσουμε το συμπλήρωμα της Z_2 στην μορφή αθροίσματος, αλλά για τις ομάδες με μηδενικά οπότε έχουμε $\overline{Z_2} = A\overline{C} + AD + B\overline{D}$ και στη συνέχεια παίρνουμε το συμπλήρωμα της έκφρασης αυτής.

$$\overline{\overline{Z_2}} = \overline{(A\overline{C} + AD + B\overline{D})} = (\overline{A\overline{C}})(\overline{AD})(\overline{B\overline{D}}) = (\overline{A} + \overline{\overline{C}})(\overline{A} + \overline{D})(\overline{B} + \overline{\overline{D}}) = (\overline{A} + C)(\overline{A} + \overline{D})(\overline{B} + D)$$

8η-Εφαρμογή: Δίδεται η λογική συνάρτηση $Z=(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B}+D)(\overline{A} + \overline{B}+C)(A+\overline{B}+C+\overline{D})$ **.**

Να απλοποιηθεί με Καρνώ και η Α.Λ.Σ να εκφραστεί στη μορφή Γ.Α.

1ο: ΚΜ-ΛΣ Η λογική συνάρτηση **δεν είναι** στην κανονική μορφή και την τρέπουμε σε αυτήν προσθέτοντας τους όρους που λείπουν στην μορφή $X.\overline{X}$:

$$Z=(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + D\overline{D})(\overline{A} + \overline{B}+C\overline{C}+D)(\overline{A} + \overline{B}+C+D\overline{D})(A+\overline{B}+C+\overline{D})$$

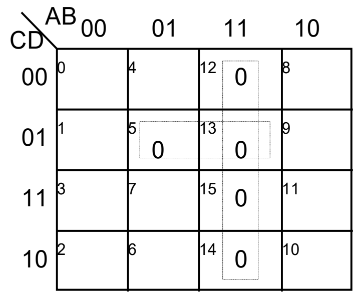
$$Z=(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+D)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})(\overline{A}+\overline{B}+C+D)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+D)(\overline{A}+\overline{B}+C+D)(\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D})(A+\overline{B}+C+\overline{D})$$

$$Z=(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + D)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D})(\overline{A} + \overline{B}+C+D)(\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D})(A+\overline{B}+C+\overline{D})$$

Z=(0 0 0 1)(0 0 0 0)(0 0 1 1)(0 0 1 0)(1 0 1 0)

Z= 14 15 12 13 5 ή $\overline{Z}$ =Σ(5,12,13,14,15)

2ο: ΠΤ-ΧΚ Έχουμε n=4 και το πλήθος των τετραγώνων είναι ΠΤ=2^n=2^4=16= =2*8=4*4



3ο: ΣΤ-ΧΚ Σημειώνουμε ‘0’ στις θέσεις των "βαρών" της συνάρτησης

4ο: ΣΧ-ΟΜ Σχηματίζουμε τις ομάδες α,β με ‘**0**’ επειδή η Λ.Σ δίδεται στη μορφή ΓΜΟ.

5ο: ΑΛ.Σ Η έκφραση της Α.Λ.Σ στη μορφή Γ.Α είναι: $Z=(\overline{A} + \overline{B})(\overline{B}+C+\overline{D})$

Η Ζ προκύπτει πιο εύκολα αν πάρουμε το συμπλήρωμά της για τις ομάδες με τα μηδενικά $\overline{Z} = AB + B\overline{C}D$ και παίρνουμε το συμπλήρωμα αυτής (δηλαδή το διπλό συμπλήρωμα):

$$\overline{\overline{Z}} = Z = (\overline{AB + B.\overline{C}.D}) = (\overline{A.B})(\overline{B.\overline{C}.D})$$

$$\text{ή} \quad Z = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{B} + \overline{\overline{C}} + \overline{D}) = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{B} + C + \overline{D})$$

Το πλεονέκτημα της μεθόδου με το συμπλήρωμα είναι ότι εργαζόμαστε όπως και στην περίπτωση του Α.Γ(άθροισμα) δηλαδή και στις δυο περιπτώσεις με τον ίδιο τρόπο και στην δεύτερη περίπτωση παίρνουμε το συμπλήρωμα με εφαρμογή του De Morgan.

9η-Εφαρμογή: Έστω η Λ.Σ με βάρη Ζ=Σ(1,4,5,6,9,12,13,17,20,21,22,25,28,29,30) και ζητείται να απλοποιηθεί.

1ο: ΚΜ-ΛΣ. Είναι στην κανονική μορφή Α.Γ (σαν άθροισμα των βαρών).

2ο: ΠΤ-ΧΚ. Έχουμε n=5 άρα Π.Τ=2^5=32 τετράγωνα ή 2*16 (2 πίνακες των 16 τετραγώνων). Η παράσταση γίνεται σε δυο χάρτες όπου ο ένας ανήκει στην 5η μεταβλητή και ο άλλος στο συμπλήρωμά της.

3ο: ΣΤ-ΧΚ Σημειώνουμε ΄**1**΄ στις θέσεις των "βαρών" της συνάρτησης

4ο: ΣΧ-ΟΜ. Σχηματίζουμε τις ομάδες α,β,γ,δ με τους άσσους επειδή η Λ.Σ δίδεται στη μορφή ΑΕΟ, όπου στην **α**-ομάδα αντιστοιχεί ο όρος $\overline{D}E$, στην **β**-ομάδα ο όρος $\overline{B}C\overline{D}$, στην **γ**-ομάδα ο όρος $C\overline{D}$, στην **δ**-ομάδα ο όρος $AC\overline{E}$. Από τις κοινές ομάδες α,β,γ λείπει η 5η μεταβλητή, δηλαδή η Α.

DE \ BC	$\overline{A}$: 00	01 β	11	10	A: 10	11 δ	01 β	00
00	0	4: 1	12: 1 γ	8	24	28: γ 1	20: 1	16
01	1: 1	5: 1	13: 1	9: α 1	25: α 1	29: 1	21: 1	17: 1
11	3	7	15	11	27	31	23	19
10	2	6: 1 β	14	10	26	30: 1 δ	22: 1 β	18

5ο: ΑΛ.Σ Η έκφραση της Α.Λ.Σ γίνεται όπως στην περίπτωση απλοποίησης με 4 μεταβλητές, μόνο που η τελική εξίσωση δεν περιλαμβάνει την 5η μεταβλητή στους όρους που είναι κοινοί και στους δυο πίνακες, (εφαρμόζεται η σχέση $\overline{A}B + AB = B(\overline{A} + A) = B$. Από τις ομάδες α,β,γ και την ανεξάρτητη ομάδα δ που ανήκει μόνο στο ένα πίνακα έχουμε την τελική έκφραση

$$Z = \overline{D}E + \overline{B}C\overline{D} + C\overline{D} + AC\overline{D}$$

10η-Εφαρμογή: Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση των 6 μεταβλητών που δίδεται με τα βάρη της Ζ=Σ(5,7,9,10,13,14,15,19,21,23,25,26,29,30,31,37,39,41, 43,44,45, 46,47,53,55,57,58,59,61,63)

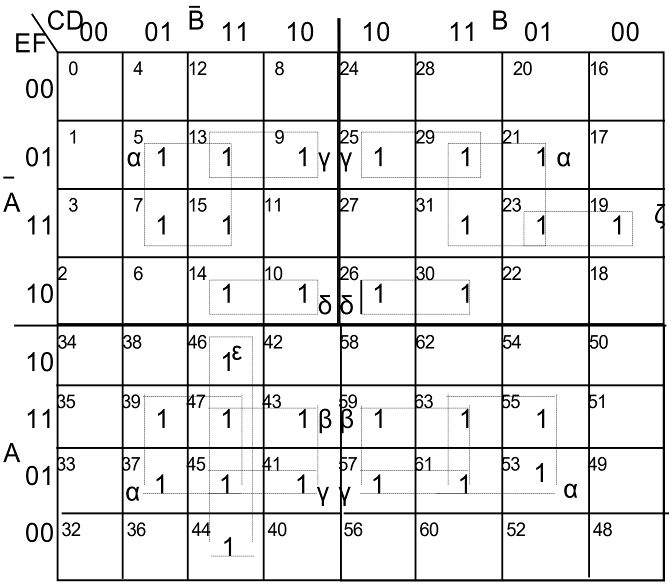
1ο: ΚΜ-ΛΣ: Η συνάρτηση είναι στην κανονική μορφή

2ο: ΠΤ-ΧΚ: Έχουμε **n**=6 άρα ΠΤ=2^6=64 τετράγωνα ή 2∗32 (2 πίνακες των 32 τετραγώνων). Η παράσταση γίνεται σε 4 χάρτες όπου οι 2 κατακόρυφοι ανήκουν στη 5η μεταβλητή και το συμπλήρωμά της και οι 2 οριζόντιοι στην $6^{η}$ μεταβλητή και στο συμπλήρωμά της.

$3^{ο}$: ΣΤ-ΧΚ. Η λογική συνάρτηση τοποθετείται αμέσως στον χάρτη Καρνώ με άσσους στις αντίστοιχες θέσεις των βαρών της.

$4^{ο}$: ΣΧ-ΟΜ Σχηματίζουμε τις ομάδες α,β,γ,δ,ε,ζ έχοντας κατά νου ότι θέλουμε να σχηματίσουμε ομάδες κοινές και στους 4 υποπίνακες ή τουλάχιστον σε 2 υπο-πίνακες, οπότε να έχουμε απαλοιφή των δυο μεταβλητών Α,Β ή μιας μεταβλητής της Α ή της Β, που ανήκουν στους 4 υπο-πίνακες.

1) Παρατηρούμε τις ομάδες που είναι κοινές και στους 4 υπο-πίνακες, τις **α**, **γ** να εμφανίζονται χωρίς τη 1η και 2η μεταβλητή δηλαδή τις Α&Β επειδή αυτές αλλάζουν τιμή αφού μετακινούμαστε από υπο-πίνακα σε υπο-πίνακα.



2) Παρατηρούμε τις ομάδες που είναι κοινές σε 2 υπο-πίνακες, τις **β, δ** να εμφανίζονται χωρίς τη 1η μεταβλητή δηλαδή την Α επειδή αυτή αλλάζει τιμή κατά την μετακίνηση από υπο πίνακα σε υπο πίνακα.

$5^{ο}$: Α.Λ.Σ Η έκφραση της απλοποιημένης λογικής συνάρτησης Α.Λ.Σ είναι:

$$Z=DF+ACF+C\bar{E}F+ACE\bar{F}+A\bar{B}CD+\bar{A}B\bar{C}EF$$

$11^{η}$-Εφαρμογή: Να σχεδιαστεί ένα λογικό κύκλωμα με τρεις εισόδους που να δίδει έξοδο Ζ="1" όταν τουλάχιστον δυο από τις εισόδους του "1" (συνάρτηση πλειοψηφίας).

$1^{ο}$: ΚΜ-ΛΚ Από τον πίνακα καταστάσεων ή αληθείας (Π.Κ) η λογική συνάρτηση είναι:

$$Z=\bar{A}BC+A\bar{B}C+ABC+AB\bar{C}$$

$2^{ο}$: ΠΤ-ΧΚ Έχουμε η=3 άρα Π.Τ=2^{3}=8 τετράγωνα στον χάρτη Καρνώ.

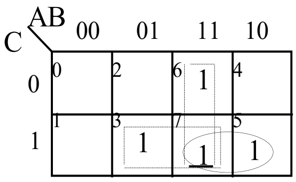
$3^{ο}$: ΣΤ-ΧΚ Σημειώνουμε '1' στις θέσεις 3,5,6,7

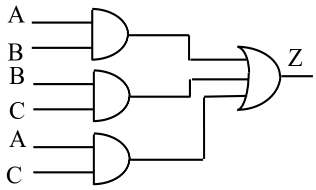
$4^{ο}$: ΣΧ-ΟΜ Σχηματίζουμε τις 3 ομάδες α,β,γ

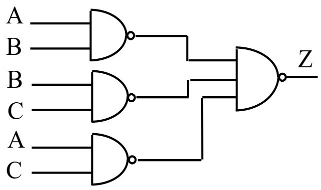
$5^{ο}$: Α.Λ.Σ Η απλοποιημένη λογική συνάρτηση που προκύπτει από τον Καρνώ είναι Z=AB+BC+AC

$6^{ο}$: ΣΧ-ΛΚ Σχεδιάζουμε το κύκλωμα με τεχνική (ή πύλες) AND-OR και NAND. Τα δυο κυκλώματα (σχεδίαση δυο επιπέδων) φαίνονται στα σχήματα.

	A B C	Z
0	0 0 0	0
1	0 0 1	0
2	0 1 0	0
3	0 1 1	1
4	1 0 0	0
5	1 0 1	1
6	1 1 0	1
7	1 1 1	1







12η-Εφαρμογή: Δίδεται ο πίνακας αλήθειας 4 μεταβλητών με έξοδο Z που σημειώνεται στον πίνακα καταστάσεων. Να βρεθεί η απλοποιημένη έκφραση της συνάρτησης και να σχεδιαστεί το λογικό της κύκλωμα

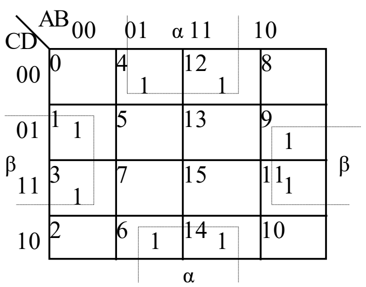
1ο: ΚΜ-ΛΣ Είναι στην Κ.Μ αφού προέρχεται από Πίνακα Αληθείας

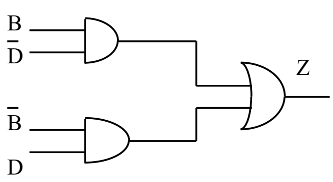
2ο: ΠΤ-ΧΚ Έχουμε η=4 άρα Π.Τ=2^4=16 τετράγωνα στον Καρνώ.

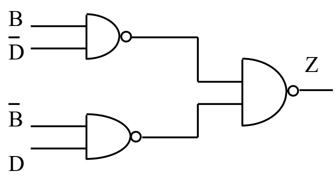
3ο: ΣΤ-ΧΚ Συμπληρώνουμε ‘1’ στις θέσεις 1,3,4,6,9,11,12,14 του χάρτη

	A B C D	Z		A B C D	Z
0	0 0 0 0	0	8	1 0 0 0	0
1	0 0 0 1	1	9	1 0 0 1	1
2	0 0 1 0	0	10	1 0 1 0	0
3	0 0 1 1	1	11	1 0 1 1	1
4	0 1 0 0	1	12	1 1 0 0	1
5	0 1 0 1	0	13	1 1 0 1	0
6	0 1 1 0	1	14	1 1 1 0	1
7	0 1 1 1	0	15	1 1 1 1	0

4ο: ΣΧ-ΟΜ Οι δυο ομάδες **α,β** που προκύπτουν έχουν 4 τετράγωνα.







5ο: Α.Λ.Σ Η έκφραση $Z = B\overline{D} + \overline{B}D = B \oplus D$ δηλαδή η πύλη XOR

6ο: ΣΧ-ΛΚ Σχεδιάζουμε το κύκλωμα της Z με πύλες AND-OR και NAND (σχεδίαση δυο επιπέδων). Τα κυκλώματα φαίνονται στα παραπάνω σχήματα.

13η-Εφαρμογή: Να σχεδιαστεί κύκλωμα που να δίδει ένα ψηφίο περιττής ισοτιμίας για τον κώδικα των 3 ψηφίων με πύλες XOR.

Γράφουμε τον Π.Α μιας συνάρτησης 3 μεταβλητών και σημειώνουμε άσσο, στην στήλη της ισοτιμίας, που για εμάς είναι η έξοδος και στις γραμμές όπου το πλήθος των άσσων είναι άρτιος αριθμός (δηλ. 0 ή 2), που είναι οι θέσεις 0,3,5,6.

Από τον πίνακα προκύπτει η λογική συνάρτηση με την μορφή των βαρών της για τις θέσεις που έχουμε στην έξοδο άσσο. Z=Σ(0,3,5,6)

1ο: ΚΜ-ΛΣ Είναι στην κανονική μορφή (από Π.Α)

2ο: ΠΤ-Χ.Κ Έχουμε η=3 άρα ΠΤ=2^3=8

3ο: ΣΤ-ΧΚ Συμπληρώνουμε "1" στις αντίστοιχες θέσεις του χάρτη, σύμφωνα με τον πίνακα καταστάσεων ή με τα βάρη της Λ.Σ.

	A B C	P
0	0 0 0	1
1	0 0 1	0
2	0 1 0	0
3	0 1 1	1
4	1 0 0	0
5	1 0 1	1
6	1 1 0	1
7	1 1 1	0

C \ AB	00	01	11	10
0	0: 1	2:	6: 1	4:
1	1:	3: 1	7:	5: 1

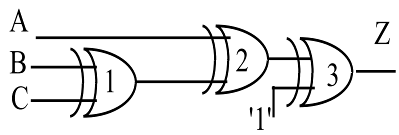
4ο: ΣΧ-ΟΜ Παρατηρούμε, στον χάρτη, ότι **δεν** υπάρχουν γειτονικοί όροι με άσσους επομένως δεν σχηματίζονται ομάδες.

5ο: Α.Λ.Σ Δεν γίνεται απλοποίηση εφόσον **δεν** σχηματίζονται ομάδες

6ο: ΣΧ-ΛΚ. **Τροποποιούμε** την λογική συνάρτηση που προκύπτει από τον Π.Α με χρήση της άλγεβρας Boole ώστε να χρησιμοποιήσουμε την πύλη XOR η οποία αντικαθιστά με την λειτουργία της 5 πύλες. Ας δούμε την διαδικασία της τροποποίησης βήμα-βήμα. $Z=\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}=\overline{A}(\overline{B}.\overline{C}+BC)+A(\overline{B}C+B\overline{C})$

$Z=\overline{A}(\overline{\overline{B}C+B\overline{C}})+A(\overline{B}C+B\overline{C})=\overline{A}(\overline{B\oplus C})+A(B\oplus C)$ Η τελευταία μορφή της Λ.Σ ταιριάζει με την συνάρτηση της πύλης XNOR οπότε γράφεται

$$Z=A\otimes(B\oplus C)=\overline{A\oplus(B\oplus C)}$$



Το τελικό κύκλωμα σχεδιάζεται με τρεις πύλες XOR όπου η 3η εκτελεί λειτουργία πύλης NOT όπως φαίνεται στο σχήμα, δηλαδή τρεις πύλες έναντι των οκτώ πυλών που απαιτούνται με άμεση σχεδίαση.

14η-Εφαρμογή: Δίδεται ο Π.Κ συνάρτησης 4 μεταβλητών και ζητείται η σχεδίαση του Λ.Κ με NOR.

1ο: ΚΜ-ΛΣ Είναι στην κανονική μορφή από πίνακα αληθείας.

2ο: ΠΤ-ΧΚ Έχουμε η=4 άρα ΠΤ=2^4=16 τετράγωνα στον Χ.Κ

3ο: ΣΤ-ΧΚ. Συμπληρώνουμε "1" στις θέσεις των βαρών ή με την βοήθεια της αρίθμησης του πίνακα, αφού αυτή εκφράζει ταυτόχρονα και το βάρος του κάθε όρου.

4ο: ΣΧ-ΟΜ Σχηματίζουμε τις ομάδες **α,β** για την ζητούμενη συνάρτηση αν λάβουμε υπ΄ όψιν μας τα τετράγωνα που έχουν μηδενικά αντί των άσσων

	A B C D	Z		A B C D	Z
0	0 0 0 0	1	8	1 0 0 0	1
1	0 0 0 1	1	9	1 0 0 1	1
2	0 0 1 0	0	10	1 0 1 0	1
3	0 0 1 1	1	11	1 0 1 1	1
4	0 1 0 0	0	12	1 1 0 0	0
5	0 1 0 1	0	13	1 1 0 1	0
6	0 1 1 0	0	14	1 1 1 0	1
7	0 1 1 1	1	15	1 1 1 1	1

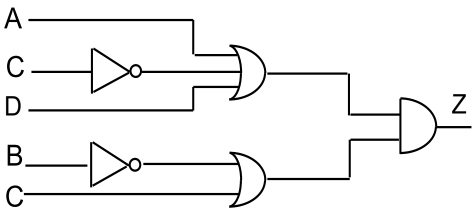
CD \ AB	00	01	11	10
00	0: 1	4: 0	12: 0	8: 1
01	1: 1	5: 0	13: 0	9: 1
11	3: 1	7: 1	15: 1	11: 1
10	2: 0	6: 0	14: 1	10: 1

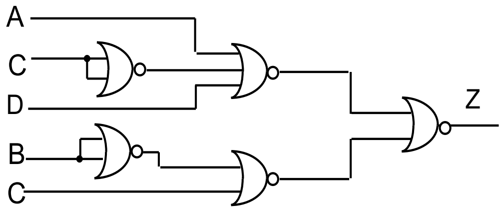
5ο: Α.Λ.Σ Εκφράζουμε το συμπλήρωμα της Α.Λ.Σ Ζ(δηλαδή την Z) και παίρνουμε το συμπλήρωμά της $\overline{\overline{Z}}$ (διπλό) οπότε έχουμε την τελική έκφραση

$$\overline{Z} = B\overline{C} + \overline{A}.C\overline{D} => \overline{\overline{Z}} = Z = \overline{(B\overline{C} + \overline{A}C\overline{D})} = (\overline{B\overline{C}})(\overline{\overline{A}C\overline{D}}) = (\overline{B} + \overline{\overline{C}})(\overline{\overline{A}} + \overline{C} + \overline{\overline{D}}) = (\overline{B} + C)(A + \overline{C} + D)$$

6ο-Βήμα:ΣΧ-ΛΚ Σχεδιάζουμε το λογικό κύκλωμα με πύλες OR-AND και NOR.

Τα κυκλώματα φαίνονται στα σχήματα.





5.1.4.1 Εμπειρική μέθοδος εισαγωγής Λ.Σ στον Καρνώ

Δίδεται η λογική συνάρτηση $Z = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.D + A.\overline{C}.D + A\overline{B}C\overline{D}$ και ζητείται να απλοποιηθεί με χάρτη Καρνώ.

1ο: ΚΜ-ΛΣ. Η συνάρτηση **δεν είναι** σε **κανονική μορφή**. Δεν χρησιμοποιούμε την τυπική διαδικασία μετατροπής της σε Κ.Μ, αλλά θα **περάσουμε** την Λ.Σ κατευθείαν στον Χ.Κ.

2ο:ΠΤ-ΧΚ. Έχουμε n=4 επομένως πλήθος τετραγώνων ΠΤ=2^n=2^4=16 τετράγωνα.

3ο: ΣΤ-ΧΚ. Συμπληρώνουμε τον χάρτη **σημειώνοντας ΄1΄** στα αντίστοιχα τετράγωνα που θα προκύψουν με την παρακάτω διαδικασία.

Χωρίζουμε τις μεταβλητές των όρων σε στήλες **/** γραμμές, με την κάθετο, και σημειώνουμε ‘**1**’ στο/στα τετράγωνο/να με συντεταγμένες τις σημειωμένες μεταβλητές, λαμβάνοντας υπ΄ όψιν μας και αυτές που λείπουν. Για τη δοθείσα έχουμε:

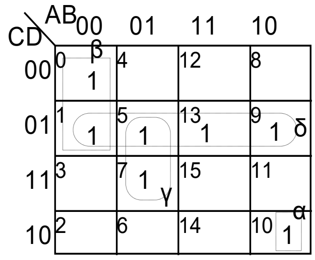
α) Ο πρώτος όρος του αθροίσματος είναι $\overline{A}.\overline{B}/\overline{C}$_ και σημειώνουμε ‘**1**’ στα τετράγωνα με συντεταγμένες **00/0_** (**00** είναι η 1η στήλη και 0<u>0</u> , **0**<u>1</u>είναι η 1η & 2η γραμμή).

β) Ο δεύτερος όρος του αθροίσματος είναι $\overline{A}.B./\_\ D$ και σημειώνουμε ‘**1**’ στα τετράγωνα με συντεταγμένες **01/_1** (**01** είναι η 2η στήλη και 0**1** , 1**1** είναι η 2η & 3η γραμμή).

γ) Ο τρίτος όρος του αθροίσματος είναι $A.\_/\overline{C}.D$ και σημειώνουμε ‘**1**’ στα τετράγωνα με συντεταγμένες **1_/01** (**01** είναι η 2η γραμμή και **1**0 , **1**1 είναι η 4η & 3η στήλη).

δ) Ο τέταρτος όρος του αθροίσματος είναι $A\overline{B}/C\overline{D}$ έχει και τις 4 μεταβλητές οπότε σημειώνουμε ‘**1**’ κατευθείαν στον χάρτη και στο τετράγωνο με συντεταγμένες **10/10** (**10** είναι η 4η στήλη και **10** είναι η 4η γραμμή ή ο τετράγωνο με βάρος 10.

(Σημείωση: Αν υπάρχει διπλή σημείωση του ΄1΄ σε μια θέση θα οφείλεται στους όμοιους όρους που εμφανίζονται στη συνάρτηση μετά την εκτέλεση των πράξεων.)



4ο: ΣΧ-.ΟΜ Σχηματίζουμε τις ομάδες α,β,γ,δ

5ο: Η Α.Λ.Σ στη μορφή **ΑΓ** είναι: $Z=A\overline{B}.C.\overline{D}+\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}+\overline{A}.B.D+\overline{C}.D$

6ο: Σχεδιάζουμε το κύκλωμα της Α.Λ.Σ που προκύπτει από τους πίνακες καρνώ κατά τα γνωστά.

Σημείωση: Αν η Λ.Σ δίδεται σε Γ.Α, παίρνουμε το συμπλήρωμά της, εργαζόμαστε με παρόμοιο τρόπο αλλά σημειώνουμε με ΄0΄

Σύντομος Τρόπος Μετατροπής μιας Λ.Σ σε Κ.Μ

Μια διαδικασία μετατροπής μιας Λ.Σ (είτε στη μορφή ΑΓ είτε ΓΑ) σε κανονική μορφή και Α.Γ. είναι η παρακάτω:

1) Αν είναι σε ΑΓ: Δίδεται η λογική συνάρτηση $Z=\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}+\overline{A}.B.D+A.\overline{C}.D+A\overline{B}C\overline{D}$ και ζητείται να απλοποιηθεί με χάρτη Καρνώ και να σχεδιαστεί το κύκλωμα της Α.Λ.Σ της Ζ με τεχνική NOR και τεχνική NAND.

1ο: ΚΜ-ΛΣ. Η συνάρτηση είναι ΑΓ αλλά **δεν είναι** σε **κανονική μορφή** και την μετατρέπουμε ως εξής.

Γράφουμε τους όρους της συνάρτησης σημειώνοντας ‘**0**’ ή ‘**1**’ ή _ στη θέση κάθε μεταβλητής (‘**0**’ για το συμπλήρωμα ‘**1**’ για την κανονική τιμή και _ αν δεν υπάρχει η μεταβλητή).

Για τη δοθείσα έχουμε:

Z= 000_		**+ 01_ 1**		**+ 1_01**	**+ 1010**	**10**
0	**0**	0	**5**	0	**9**	
1	**1**	1	**7**	1	**13**	

και η τελική μορφή σαν άθροισμα των βαρών της θα είναι Ζ=Σ(0,1,5,7,9,10,13)

Σημείωση: Σημειώνουμε όλα τα βάρη των όρων μια φορά αγνοώντας τα όμοια

Στη συνέχεια ακολουθούμε την τυπική διαδικασία

2^{o}: ΠΤ-ΧΚ. Έχουμε n=4 επομένως πλήθος τετραγώνων ΠΤ=2^n=2^4=16 τετράγωνα.

3^{o}: ΣΤ-ΧΚ. Συμπληρώνουμε τον χάρτη με ΄**1**΄ στα τετράγωνα με τα βάρη της Λ.Σ επειδή είναι στη μορφή ΑΓ.

Σημείωση: Από τον Καρνώ μπορούμε να πάρουμε την Α.Λ.Σ στην μορφή Γ.Α, για τα τετράγωνα με μηδενικά.

CD \ AB	00	01	11	10
00	0: 1	4: 0	12: 0	8: 0
01	1: 1	5: 1	13: 1	9: 1
11	3: 0	7: 1	15: 0	11: 0
10	2: 0	6: 0	14: 0	10: 1

2) Αν είναι σε ΓΑ: Δίδεται η Λ.Σ $Z=(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}).(\overline{A}+B+D).(A+\overline{C}+D).(A+\overline{B}+C+\overline{D})$ και ζητείται να απλοποιηθεί με χάρτη Καρνώ και να σχεδιαστεί το κύκλωμα της Α.Λ.Σ της Z με τεχνική NAND και τεχνική NOR.

Ακολουθούμε την ίδια πορεία όπως στην 1^{η} περίπτωση **αφού όμως πρώτα** μετατρέψουμε τη δοθείσα με DeMorgan στο συμπλήρωμά της σαν ΑΓ

Δηλαδή $\overline{Z}=A.B.C+A.\overline{B}.\overline{D}+\overline{A}.C.\overline{D}+\overline{A}.B.\overline{C}.D$ που γίνεται εύκολα αν θυμηθούμε την τεχνική ότι όπου **δεν έχουμε** μπάρα (‾) βάζουμε και **όπου έχουμε** μπάρα (‾) την βγάζουμε και ταυτόχρονα αλλάζουμε τα (**+**) με (•) και τα (•) με (**+**)

Στη συνέχεια ακολουθούμε τα ίδια βήματα 1^{o} , 2^{o} , 3^{o} ,4^{o} ,5^{o} και στο 3^{o} βήμα σημειώνουμε ΄**0**΄ στα τετράγωνα με το αντίστοιχο βάρος της συνάρτησης επειδή είναι στη μορφή Γ.Α.

Σημείωση: Από τον Καρνώ μπορούμε να πάρουμε την Α.Λ.Σ στην μορφή Α.Γ για τα τετράγωνα με άσσους

5.1.5 Αδιάφοροι όροι (don't care conditions)

Σε μια λογική συνάρτηση που προκύπτει από την μελέτη ενός πρακτικού προβλήματος υπάρχουν όροι που δεν μπορεί να συμβούν, δηλαδή ορισμένοι συνδυασμοί τιμών εισόδου δεν έχουν ουσιαστική σημασία π.χ. ένας δεκαδικός μετρητής των 4 Bits, στον BCD, μπορεί να πάρει 2^4=16 δυνατούς συνδυασμούς εισόδου όπου μόνο οι δέκα (10) συνδυασμοί χρησιμοποιούνται στην κωδικοποίηση των δέκα ψηφίων του δεκαδικού συστήματος (0-9), οι άλλοι συνδυασμοί δεν πρέπει να συμβούν και είναι, για την περίπτωση μας, οι λεγόμενοι "**αδιάφοροι όροι**", επειδή η τιμή τους - '**0**' ή '**1**' - δεν μας ενδιαφέρει τους σημειώνουμε με **d** από τον όρο don't care ή με **X** στο αντίστοιχο τετράγωνο.

Όταν τώρα **κατά την απλοποίηση** μιας συνάρτησης ο σχηματισμός των ομάδων περιέχει αδιάφορους όρους, η **τιμή** τους επιλέγεται έτσι ώστε να διευκολύνεται όσο γίνεται η απλοποίηση. Το ότι επιλέγουμε **μια συγκεκριμένη τιμή** για ένα αδιάφορο όρο **δεν επηρεάζει** την μορφή της συνάρτησης αφού οι όροι αντιστοιχούν σε απαγορευμένους συνδυασμούς τιμών των εισόδων του κυκλώματος.

Ας δούμε μερικές εφαρμογές.

1η-Εφαρμογή. Δίδεται η ΛΣ $Z=\overline{A}.\overline{B}CD+\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}D+A\overline{B}.\overline{C}D+A\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}$ με αδιάφορους όρους $D=\overline{A}B\overline{C}.\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}D+AB\overline{C}.\overline{D}+AB\overline{C}D+ABCD+ABC\overline{D}+A\overline{B}CD+A\overline{B}C\overline{D}$ και ζητείται να βρεθεί η Α.Λ.Σ αυτής.

Με τη διαδικασία των 6 βημάτων, συμπληρώνουμε τον Καρνώ με άσσους, στις θέσεις των όρων της Λ.Σ Ζ και με **d** ή **X** στις θέσεις των όρων της Λ.Σ D που είναι αδιάφοροι.

Σχηματίζουμε τώρα τις ομάδες με γειτονικά τετράγωνα τα οποία περιέχουν '**1**' και αδιάφορους όρους, τους οποίους εδώ θεωρούμε σαν '**1**', έτσι ώστε να σχηματίσουμε υπο-ομάδες με **όσο το δυνατό μεγαλύτερο πλήθος** διαδοχικών τετραγώνων σύμφωνα με τον κανόνα. Κατά τον σχηματισμό των υποομάδων χρησιμοποιούμε **μόνο** όσους αδιάφορους όρους **χρειαζόμαστε** θεωρώντας τους σαν '1' εφόσον η ζητούμενη Α.Λ.Σ εκφράζεται σαν ΑΓ (όπως εδώ) ή σαν μηδενικά αν η ζητούμενη Λ.Σ εκφράζεται σαν ΓΑ.

α)

CD \ AB	00	01	11	10
00	0: 0	4: d	12: d	8: 1
01	1: 1	5: d	13: d	9: 1
11	3: 1	7: 0	15: d	11: d
10	2: 0	6: 0	14: d	10: d

β)

CD \ AB	00	01	11	10
00	0: 0	4: d	12: d	8: 1
01	1: 1	5: d	13: d	9: 1
11	3: 1	7: 0	15: d	11: d
10	2: 0	6: 0	14: d	10: d

α) **Στη μορφή ΑΓ**. Έχουμε δυο ομάδες με άσσους, την **α**η με οκτώ τετράγωνα (απαλοίφονται 3 μεταβλητές οι B,C,D που αλλάζουν τιμή σε διαδοχικά τετράγωνα) και την **β**η με τέσσερα τετράγωνα (απαλοίφονται 2 μεταβλητές οι A,C). Η τελική Λ.Σ είναι $Z=A+\overline{B}D$.

β) **Στη μορφή Γ.Α**. Έχουμε δυο ομάδες με μηδενικά, την **α** με 8 τετράγωνα (απαλοίφονται 3 μεταβλητές οι A,C,D που αλλάζουν τιμή σε διαδοχικά τετράγωνα) και την **β** με 4 τετράγωνα (απαλοίφονται 2 μεταβλητές οι B,C). Η τελική Λ.Σ είναι $Z=(\overline{B})(A+D)$.

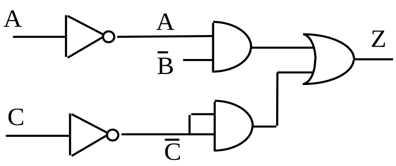
γ) **Στη μορφή συμπληρώματος**. Εκφράζουμε την Α.Λ.Σ με το συμπλήρωμά της αν χρησιμοποιήσουμε τα μηδενικά του πίνακα, οπότε έχουμε την συμπληρωματική της ζητούμενης συνάρτησης $\overline{Z}=B+\overline{A}.\overline{D}$, από την οποία με νέο συμπλήρωμα (και στα δυο μέλη) έχουμε την τελική έκφραση : $\overline{\overline{Z}}=Z=\overline{(B+\overline{A}.\overline{D})}=\overline{(B)}(\overline{\overline{A}}.\overline{\overline{D}})=(\overline{B})(A+D)$

2η-Εφαρμογή. Από τον πίνακα αλήθειας της συνάρτησης των 3 μεταβλητών A,B,C, να βρεθεί η απλοποιημένη έκφραση και σχεδιαστεί το λογικό κύκλωμα που την πραγματοποιεί.

Η λογική συνάρτηση είναι $Z=\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}.\overline{C}$ και οι αδιάφοροι όροι που σε αυτήν είναι $D=\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}+AB\overline{C}$.

	A B C	Z
0	0 0 0	d
1	0 0 1	0
2	0 1 0	1
3	0 1 1	1
4	1 0 0	1
5	1 0 1	0
6	1 1 0	d
7	1 1 1	0

C \ AB	00	01	11	10
0	0: d	2: 1	6: d	4: 1
1	1:	3: 1	7:	5:



Από τον Π.Κ έχουμε $Z = \overline{C} + \overline{A}B$ και το κύκλωμα σχεδιασμένο με λογική AND-OR φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

3η-Εφαρμογή. Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση που δίδεται στην μορφή αθροίσματος των βαρών της Ζ=Σ(1,3,5,7,17,18,21,23,29,33,35,36,37,38,45,47,49,50,51,55,61,63) με αδιάφορους όρους τους 13,19,39,53

1ο. ΚΜ-ΛΣ. Η Λ.Σ είναι έξι μεταβλητών (η=6), είναι στην Κ.Μ αφού δίδεται με τα βάρη της επομένως τοποθετείται αμέσως στον Καρνώ όπως και οι αδιάφοροι όροι.

2ο. Π.Τ-ΧΚ. Το πλήθος των τετραγώνων είναι $Π.Τ=2^η=2^6=64$ τετράγωνα ή 2 πίνακες των 32 τετραγώνων ή 4 πίνακες των 16 τετραγώνων.

3ο. Σ.Τ-Χ.Κ. Σχεδιάζουμε τον Καρνώ με 64 τετράγωνα και τοποθετούμε μονάδες στα τετράγωνα των οποίων οι αριθμοί ταυτίζονται με τα αντίστοιχα βάρη της συνάρτησης.

4ο. ΣΧ-ΟΜ. Σχηματίζουμε τις ομάδες **α,β,γ,δ,ε** όπου η **α** είναι μια 16άδα (4 4άδες μία σε κάθε ένα από τους 4 πίνακες), η **β** είναι μια 8άδα (4 2άδες μία σε κάθε ένα από τους 4 πίνακες), η **γ** είναι μια 8άδα (2 4άδες μία στον κάτω δεξιό πίνακα και μία στον κάτω αριστερό πίνακα), η **δ** είναι μια 4άδα στον κάτω αριστερό πίνακα και η **ε** μία 4άδα (2 2άδες μια στον πάνω δεξιό πίνακα και μία στον κάτω δεξιό πίνακα).

Και εδώ χρησιμοποιούμε πολλές φορές μερικούς όρους ώστε να πετύχουμε την καλύτερη δυνατή απλοποίηση, όπως π.χ. τους όρους στο 45ο & 63ο, τετράγωνο που χρησιμοποιούνται 3 φορές, τους όρους στο 47ο &. 51ο τετράγωνο που χρησιμοποιούνται 2 φορές κ.λ.π.

5ο. Α.Λ.Σ. Η Α.Λ.Σ εκφράζεται στην μορφή Α.Γ (αθροίσματα γινομένων) από την λογική συνάρτηση $Z=\overline{C}D+D\overline{E}F+ADF+A\overline{B}.\overline{C}D+B\overline{C}.\overline{D}E$, για σχεδίαση με λογική AND-OR ή NAND, όπου παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές A & B, δεν υπάρχουν στις ομάδες **α, β** που έχουν όρους και στους τέσσερις πίνακες, παρόμοια η μεταβλητή B δεν υπάρχει στην **γ** ομάδα που έχει όρους σε δυο πίνακες κ.λ.π

6ο. ΣΧ-Λ.Κ. Το Λ.Κ σχεδιάζεται με πύλες AND-OR και πύλες NAND από τη σχέση

$$Z=\overline{C}D+D\overline{E}F+ADF+A\overline{B}.\overline{C}D+B\overline{C}.\overline{D}E$$

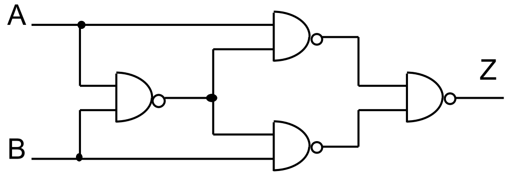
4η-Εφαρμογή. Να σχεδιαστεί κύκλωμα ισοδύναμο της XOR με χρήση μόνο πυλών NAND.

Έστω Α,Β οι είσοδοι της XOR οπότε η έξοδός της θα είναι $Z=A\oplus B$ ή $Z=\overline{A}B+A\overline{B}$.

Αν βάλουμε και τους όρους $\overline{A}A,\ B\overline{B}$ που είναι μηδενικοί τότε έχουμε την Λ.Σ

$$Z=\overline{A}B+A\overline{B}+A\overline{A}+B\overline{B}=A(\overline{A}+\overline{B})+B(\overline{A}+\overline{B})=A.\overline{AB}+B.\overline{AB}$$

η τελική μορφή της οποίας είναι άθροισμα γινομένων, επομένως σχεδιάζεται με πύλες NAND.



5.1.6. Ασκήσεις

1. Να απλοποιηθούν με Καρνώ οι παρακάτω λογικές συναρτήσεις και να σχεδιαστούν τα λογικά κυκλώματα των Α.Λ.Σ με πύλες NAND. α) $Z=AB+ABC+\overline{A}B+\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$

β) $Z=ABC+\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$ γ) $Z=ABCD+\overline{A}BCD+A\overline{B}CD+ABC\overline{D}$

2. Να απλοποιηθούν με Καρνώ οι παρακάτω λογικές συναρτήσεις και να σχεδιαστούν τα λογικά κυκλώματα των Α.Λ.Σ με πύλες NOR.

α) $Z=(A+B)(A+B+C)(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$ β) $Z=(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+C)$

γ) $Z=B(A+C)(\overline{A}+\overline{C})$ δ) $Z=(A+B+C+D)(\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D})(A+B+\overline{D})(B+C)$

3. Να απλοποιηθούν με Καρνώ οι παρακάτω λογικές συναρτήσεις και να σχεδιαστούν τα λογικά κυκλώματα των Α.Λ.Σ με πύλες NAND.

α) $Z=(A+B)(A+C)(A+\overline{B}+\overline{C})$ β) $Z=(A+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)$

4. Να απλοποιηθούν με Καρνώ οι παρακάτω λογικές συναρτήσεις και να σχεδιαστούν τα λογικά κυκλώματα των Α.Λ.Σ με πύλες NOR.

α) $Z=ABCD+\overline{A}.\overline{B}C\overline{D}+AB\overline{D}+BC$ β) $Z=A+CD+A\overline{C}D+\overline{A}.\overline{B}.\overline{D}$

5. Να απλοποιηθεί η συνάρτηση Ζ=Σ(0,1,2,4,5,8,9,10) με Καρνώ, και η Α.Λ.Σ να εκφραστεί στην μορφή Α.Γ. Να σχεδιαστεί το κυκλώμά της με τεχνική NAND.

6. Να απλοποιηθεί η συνάρτηση Ζ=Π(0,1,3,4,5,6,9,11,12) με Καρνώ, και η Α.Λ.Σ να εκφραστεί στην μορφή Γ.Α. Να σχεδιαστεί το κύκλωμά της με τεχνική NOR

7. Δίδονται οι παρακάτω πίνακες Καρνώ και ζητείται να βρεθούν οι Α.Λ.Σ που προκύπτουν στην μορφή α) αθροίσματος ελάχιστων όρων και β) γινομένου μεγίστων όρων.

α)

CD \ AB	00	01	11	10
00	(0) 1	(4)	(12) 1	(8)
01	(1)	(5) 1	(13)	(9)
11	(3)	(7)	(15)	(11) 1
10	(2)	(6) 1	(14)	(10)

β)

CD \ AB	00	01	11	10
00	(0)	(4) 0	(12)	(8) 0
01	(1) 0	(5)	(13) 0	(9) 0
11	(3) 0	(7) 0	(15) 0	(11)
10	(2) 0	(6)	(14) 0	(10) 0

γ)

CD \ AB	00	01	11	10
00	(0) 1	(4) 1	(12)	(8)
01	(1) 1	(5)	(13) X	(9) 1
11	(3) X	(7)	(15) 1	(11)
10	(2)	(6) 1	(14) X	(10)

δ)

CD \ AB	00	01	11	10
00	(0)	(4)	(12) 0	(8) 0
01	(1)	(5) 0	(13) X	(9)
11	(3) X	(7) 0	(15) 0	(11) 0
10	(2) 0	(6)	(14) X	(10) 0

8. Να απλοποιηθεί με Καρνώ η συνάρτηση Z=Σ(6,7,10,11,22,23,27,26) με αδιάφορους όρους τους D=(0,3,8,9,12,13,14,15,18,21,24,25,28,29,30,31). Η Α.Λ.Σ να εκφραστεί σαν Α.Γ.

9. Να απλοποιηθεί με Καρνώ η συνάρτηση Z=Σ(0,1,5,7,12,15,18,23,25,29) με αδιάφορους όρους τους D=(3,6,14,21,27,30). Η Α.Λ.Σ να εκφραστεί σαν Α.Γ.

10. Να απλοποιηθεί με Καρνώ η ΛΣ Z=Σ(2,3,9,13,16,20,23,26, 30,33,39,42,49,54,62) με αδιάφορους όρους τους D=(0,4,7,15,27,32,43,61). Η Α.Λ.Σ να εκφραστεί σαν Α.Γ η Z1 και σαν Γ.Α η Z2