5.2 ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΚΑΤΑΤΑΞΗΣ ΣΕ ΠΙΝΑΚΑ

5.2.1 Εισαγωγή

Αν η λογική συνάρτηση που πρόκειται να απλοποιήσουμε έχει περισσότερες από έξι μεταβλητές τότε η μέθοδος απλοποίησης με Χάρτη Καρνώ χρειάζεται μια Τεχνική ομαδοποίησης. Δηλαδή αν έχουμε επτά μεταβλητές θεωρούμε την έβδομη μια φορά μηδέν και μια φορά ένα οπότε οι υπόλοιπες έξι απλοποιούνται με την γνωστή διαδικασία αλλά δυο φορές. Στο τέλος ελέγχουμε αν απλοποιείται και άλλο η τελική μορφή που προκύπτει από την επαλληλία των επιμέρους εκφράσεων.

5.2.2 Ανάλυση της μεθόδου

Αντί της παραπάνω διαδικασίας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο κατάταξης σε πίνακα ή μέθοδο των Quine -McCluskey. Η μέθοδος αυτή είναι στην ουσία ένας αλγόριθμος απλοποίησης μιας λογικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών με μια λογική διαδικασία η οποία μπορεί να εκτελεστεί και μέσω υπολογιστή. Και εδώ η διαδικασία της απλοποίησης στηρίζεται στην γνωστή σχέση $XA+X\overline{A}=X$ της άλγεβρας Boole, όπου Χ οποιαδήποτε μεταβλητή ή συνδυασμός μεταβλητών.

Ας δούμε αναλυτικά τα βήματα της μεθόδου.

1^{o} Βήμα. Κανονική μορφή λογικής συνάρτησης (Κ.Μ-Λ.Σ)

Η λογική συνάρτηση πρέπει να είναι σε κανονική μορφή σαν άθροισμα ελάχιστων όρων ΑΕΟ (όπου όλοι οι όροι περιέχουν όλες τις μεταβλητές στην κανονική ή στην συμπληρωματική μορφή τους). Αν δεν είναι στην μορφή αυτή τότε την μετατρέπουμε πολλαπλασιάζοντας κάθε όρο με την μεταβλητή που λείπει στη μορφή $(X+\overline{X})$. Με την βοήθεια των βαρών διατάσουμε τους όρους της Λ.Σ σε αύξουσα σειρά και τους γράφουμε στην **2η** στήλη ενός πίνακα.

2^{o} Βήμα. Σύγκριση όρων (ΣΟ-ΛΣ)

Σημειώνουμε με √ τον 1^{o} όρο (στην **1η** στήλη) και τον συγκρίνουμε διαδοχικά με όλους τους υπόλοιπους όρους (2^{o},3^{o}, κ.λ.π.) εφαρμόζοντας την ιδιότητα Boole $XA+X\overline{A}=X$. Όταν συναντήσουμε όρο στον οποίο μια μεταβλητή βρίσκεται στη μορφή $A+\overline{A}$, τότε σημειώνουμε τους όρους με ένα **+** (στα αριστερά τους) και μεταφέρουμε τον παράγοντα Χ (**χωρίς** την μεταβλητή Α ή B,C,D,E κ.λ.π) στην **4η** στήλη του πίνακα, ενώ στην **3^{η}** στήλη σημειώνουμε τους αύξοντες αριθμούς των όρων που ισχύει η ιδιότητα π.χ. (1,3).

Σημειώνουμε τώρα με √ τον 2ο όρο (στην **1η** στήλη) και τον συγκρίνουμε διαδοχικά με όλους τους υπόλοιπους όρους (3ο,4ο, κ.λ.π) εφαρμόζοντας την ιδιότητα Boole, επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία και σημειώνουμε με **+** κάθε όρο που εφαρμόζεται η ιδιότητα (αν δεν είναι ήδη σημειωμένος από προηγούμενη σύγκριση).

Συνεχίζουμε την σύγκριση με τον ίδιο τρόπο μέχρι να εξαντληθούν οι όροι της 2**ης** στήλης.

Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία σύγκρισης αλλά τώρα χρησιμοποιούμε τους όρους (που βρέθηκαν από την 1η σύγκριση) της **4ης** στήλης σημειώνοντας √ στη **3η** στήλη και **+** στα αριστερά). Τους νέους όρους που προκύπτουν από την 2η σύγκριση τους σημειώνουμε στην **6η** στήλη ενώ στην **5η** στήλη σημειώνουμε από ποιους όρους προήλθαν π.χ (1,2)-(3,4).

Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να ισχύει η ιδιότητα. Όταν πάψει να ισχύει σταματά.

Οι όροι της τελευταίας στήλης που προκύπτει από τις συγκρίσεις και οι όροι που δεν έχουν σημειωθεί με **+** στις προηγούμενες στήλες λέγονται **πρώτοι συνεπάγοντες** όροι (Prime Implicantes)

3Ο Βήμα. Σύγκριση και έκφραση Ουσιωδών όρων (ΣΥ-ΟΟ)

Σχηματίζουμε τώρα ένα πίνακα που έχει τόσες γραμμές όσοι οι πρώτοι συνεπάγοντες όροι και τόσες στήλες όσοι οι αρχικοί όροι της Λ.Σ.

Τοποθετούμε τους πρώτους συνεπάγοντες στις γραμμές και τους ελάχιστους όρους της Λ.Σ στις στήλες

Σημειώνουμε στον πίνακα ένα **+** σε όλα τα τετράγωνα στα οποία κάθε πρώτος συνεπάγων **περιέχεται** στους αντίστοιχους ελάχιστους όρους.

Στο τέλος σημειώνουμε, στην τελευταία γραμμή του πίνακα, όλους τους όρους που έχουν **ένα** μόνο **+** στις στήλες. Αυτοί οι όροι λέγονται **ουσιώδεις όροι** (essential section) και αποτελούν **μέρος** της Α.Λ.Σ

4Ο Βήμα. Σχηματισμός της Απλοποιημένης Λογικής Συνάρτησης (Α.Λ.Σ)

Στο τελευταίο βήμα ελέγχουμε αν οι **ουσιώδεις όροι** περιέχονται σε όλους τους ελάχιστους όρους της αρχικής συνάρτησης και,

α) Αν ναι τότε οι ουσιώδεις όροι αποτελούν και την Α.Λ.Σ στη μορφή Α.Ε.Ο β) Αν όχι τότε οι ουσιώδεις όροι και οι εναπομείναντες πρώτοι συνεπάγοντες αποτελούν την Α.Λ.Σ.

5^{O} Βήμα. Σχεδίαση του Λογικού Κυκλώματος (ΣΧ-ΛΚ)

Κατά τα γνωστά σχεδιάζεται το λογικό κύκλωμα. Επειδή εδώ η τελική έκφραση είναι στην μορφή Α.Ε.Ο σχεδιάζεται, κατά κανόνα, με λογική σχεδίασης AND-OR ή λογική σχεδίασης NAND. Αν όμως απαιτείται να σχεδιαστεί διαφορετικά τότε μετατρέπουμε την Α.Λ.Σ στην μορφή Γ.Μ.Ο.

5.2.3. Εφαρμογές απλοποίησης με την μέθοδο QUINE Mc CLUSKEY.

Θα δούμε τώρα μερικές εφαρμογές απλοποίησης με την μέθοδο που αρχικά του έφτιαξε ο QUINE και στη συνέχεια βελτιώθηκε από τον Mc Cluskey, σε επιλεγμένες λογικές συναρτήσεις και θα κάνουμε μια σύγκριση με την αντίστοιχη μέθοδο Καρνώ.

1η Εφαρμογή: Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση

$$Z=\overline{A}B\overline{C}+B\overline{C}D+ABC+A\overline{B}D+AB\overline{C}D+\overline{A}BC+A\overline{B}C\overline{D}$$

1^{O}: ΚΜ-ΛΣ Επειδή η συνάρτηση δεν είναι στην κανονική μορφή Α.Ε.Ο, λείπουν δηλαδή κάποιες μεταβλητές από μερικούς όρους, πρέπει να μετατρέψουμε πολλαπλασιάζοντας, κάθε ένα από αυτούς τους όρους με την μεταβλητή που του λείπει στην μορφή $(X+\overline{X})$ οπότε έχουμε :

$$Z=\overline{A}.B.\overline{C}(D+\overline{D})+(A+\overline{A})B\overline{C}D+ABC(D+\overline{D})+A\overline{B}(C+\overline{C})D+AB\overline{C}D+\overline{A}BC(D+\overline{D})+A\overline{B}C\overline{D}$$

και $Z=\overline{A}B\overline{C}D+\overline{A}B\overline{C}.\overline{D}+AB\overline{C}D+\overline{A}B\overline{C}D+ABCD+ABC\overline{D}+A\overline{B}CD+A\overline{B}.\overline{C}D+AB\overline{C}D+$

$+\overline{A}.BCD+\overline{A}.BC\overline{D}+A\overline{B}C\overline{D}$ Μετά την αναγωγή των ομοίων όρων έχουμε

$$Z=\overline{A}B\overline{C}D+\overline{A}B\overline{C}.\overline{D}+AB\overline{C}D+ABCD+ABC\overline{D}+A\overline{B}CD+A\overline{B}.\overline{C}D+\overline{A}BCD+\overline{A}BC\overline{D}+A\overline{B}C\overline{D}$$

= 01 0 1+ 0 1 0 0 +1 1 01+1 1 1 1+11 10+1 0 1 1+1 0 0 1+ 0 111+ 0 11 0+1 0 1 0

= 5 + 4 + 13 + 15 + 14 + 11 + 9 + 7 + 6 + 10

ή Z=Σ(4,5,6,7,9,10,11,13,14,15) οπότε έχουμε τελικά την

$$Z=\overline{A}B\overline{C}.\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}.D+\overline{A}BC\overline{D}+\overline{A}BCD+A\overline{B}\overline{C}D+A\overline{B}C\overline{D}+A\overline{B}CD+AB\overline{C}D+ABC\overline{D}+ABCD$$

Συμπληρώνουμε την 2^{η} στήλη του πίνακα με όλους τους όρους της τελικής συνάρτησης με την αύξουσα σειρά του αριθμού που εκφράζει το βάρος του όρου.

2^{O}. Σύγκριση όρων (ΣΟ-ΛΣ)

Σημειώνουμε με √ τον 1^{o} όρο (στην **1η** στήλη) και τον συγκρίνουμε διαδοχικά με όλους τους υπόλοιπους όρους (2^{o},3^{o},κ.λ.π) εφαρμόζοντας την ιδιότητα Boole

$XA+X\overline{A}=X$. Όταν συναντήσουμε όρο στον οποίο μια μεταβλητή βρίσκεται στη μορφή $A+\overline{A}$, τότε σημειώνουμε τους όρους με ένα **+** (στα αριστερά τους) και μεταφέρουμε τον παράγοντα X (**χωρίς** την μεταβλητή A ή B,C,D,E κ.λ.π) στην **4η** στήλη

του πίνακα, ενώ στην **3**^{η} στήλη σημειώνουμε τους αύξοντες αριθμούς των όρων που ισχύει η ιδιότητα (1,2) και επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία, σημειώνοντας με **+** κάθε όρο που εφαρμόζεται η ιδιότητα (αν δεν είναι ήδη σημειωμένος από προηγούμενη σύγκριση), μέχρι να εξαντληθούν οι όροι της 2**ης** στήλης.

1η	**2η**		**3η**	**4η**		**5η**	**6η**
√ 1.	$\overline{A}B\overline{C}.\overline{D}$	**+**	√ (1,2)	$(\overline{A}B\overline{C})$	**+**	(1,2)-(3,4)	$\overline{A}B$
√ 2.	$\overline{A}.B.\overline{C}.D$	**+**	√ (1,3)	$(\overline{A}B\overline{D})$	**+**	(1,3)-(2,4)	$\overline{A}B$
√ 3.	$\overline{A}BC\overline{D}$	**+**	√ (2,4)	$(\overline{A}BD)$	**+**	(2,4)-(8,10)	BD
√ 4.	$\overline{A}BCD$	**+**	√ (2,8)	$(B\overline{C}D)$	**+**	(2,8)-(4,10)	BD
√ 5.	$A\overline{B}.\overline{C}D$	**+**	√ (3,4)	$(\overline{A}BC)$	**+**	(3,4)-(9,10)	BC
√ 6.	$A\overline{B}C\overline{D}$	**+**	√ (3,9)	$(BC.\overline{D})$	**+**	(3,9)-(4,10)	BC
√ 7.	$A\overline{B}CD$	**+**	√ (4,10)	(BCD)	**+**	(5,7)-(8,10)	AD
√ 8.	$AB\overline{C}D$	**+**	√ (5,7)	$(A\overline{B}D)$	**+**	(5,8)-(7,10)	AD
√ 9.	$ABC\overline{D}$	**+**	√ (5,8)	$(A\overline{C}D)$	**+**	(6,7)-(9,10)	AC
√ 10.	$ABCD$	**+**	√ (6,7)	$(A\overline{B}C)$	**+**	(6,9)-(7,10)	AC
			√ (6,9)	$(AC\overline{D})$	**+**		
			√ (7,10)	(ACD)	**+**		
			√ (8,10)	(ABD)	**+**		
			√ (9,10)	(ABC)	**+**		

Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία σύγκρισης αλλά τώρα χρησιμοποιούμε τους όρους (που βρέθηκαν από την 1^{η} σύγκριση) της **4ης** στήλης σημειώνοντας √ στη **3η** στήλη και **+** στα αριστερά).

Τους νέους όρους που προκύπτουν από την 2^{η} σύγκριση τους σημειώνουμε στην **6η** στήλη ενώ στην **5η** στήλη σημειώνουμε από ποιους όρους προήλθαν (1,2)-(3,4).

Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να ισχύει η ιδιότητα. Όταν πάψει να ισχύει σταματά. Οι όροι της τελευταίας στήλης που προκύπτει από τις συγκρίσεις και οι όροι που δεν έχουν σημειωθεί με **+** στις προηγούμενες στήλες (εδώ κανένας) λέγονται **πρώτοι συνεπάγοντες** όροι (Prime Implicantes)

3ο. Σύγκριση και έκφραση Ουσιωδών όρων (ΣΥ-ΟΟ)

Σχηματίζουμε τώρα ένα πίνακα που έχει 5 γραμμές, όσοι οι πρώτοι συνεπάγοντες όροι και 10 στήλες όσοι οι αρχικοί όροι της Λ.Σ.

Τοποθετούμε τους πρώτους συνεπάγοντες στις γραμμές και τους ελάχιστους όρους της Λ.Σ στις στήλες

	1η	**2η**	**3η**	**4η**	**5η**	**6η**	**7η**	**8η**	**9η**	**10η**
	$\overline{A}B\overline{C}.\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\overline{A}BC\overline{D}$	$\overline{A}BCD$	$A\overline{B}.\overline{C}D$	$A\overline{B}C\overline{D}$	$A\overline{B}.CD$	$AB.\overline{C}D$	$ABC\overline{D}$	$ABCD$
$\overline{A}B$	**+**	**+**	**+**	**+**						
BC			**+**	**+**					**+**	**+**
BD				**+**				**+**		**+**
AD					**+**		**+**	**+**		**+**
AC						**+**	**+**		**+**	**+**
	$\overline{A}B$	$\overline{A}B$			AD	AC				

Σημειώνουμε στον πίνακα ένα **+** σε όλα τα τετράγωνα στα οποία κάθε πρώτος συνεπάγων **περιέχεται** στους αντίστοιχους ελάχιστους όρους.

Στο τέλος σημειώνουμε, στην τελευταία γραμμή του πίνακα, όλους τους όρους που έχουν **ένα** μόνο **+** στις στήλες. Αυτοί οι όροι λέγονται **ουσιώδεις όροι** (essentials) και αποτελούν, στην περίπτωσή μας και την τελική Α.Λ., γιατί:

α) ο ουσιώδης όρος $\overline{A}B$ καλύπτει τους ελάχιστους όρους (1,2,3,4)

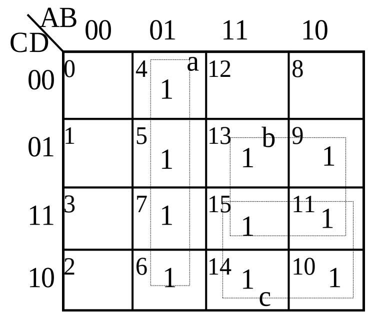
β) ο ουσιώδης όρος AD καλύπτει τους ελάχιστους όρους (5,7,8,10)

γ) ο ουσιώδης όρος AC καλύπτει τους ελάχιστους όρους (6,7,9,10),

και αθροιστικά, οι 3 ουσιώδεις όροι καλύπτουν όλους τους ελάχιστους όρους (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10), άρα αποτελούν την τελική Α.Λ.Σ $Z=\overline{A}B+AD+AC$

Με την μέθοδο Καρνώ

Συμπληρώνοντας τον χάρτη, κατά τα γνωστά με άσσο στις θέσεις των βαρών της Λ.Σ εφόσον είναι στη μορφή Α.Ε.Ο Σχηματίζουμε τρεις υπο-ομάδες a,b,c και η τελική Α.Λ.Σ θα είναι: $Z=\overline{A}B+AD+AC$ έκφραση που βρήκαμε και με την μέθοδο Quine Mc Cluskey



2η Εφαρμογή: Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση Z=(3,4,5,7,9,11,13,14,15)

1ο: ΚΜ-ΛΣ Η συνάρτηση είναι στην κανονική μορφή σαν Α.Ε.Ο δηλαδή γράφεται

$$Z=\overline{A}\overline{B}CD+\overline{A}B\overline{C}.\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}D+\overline{A}BCD+A\overline{B}\overline{C}D+A\overline{B}CD+AB\overline{C}D+ABC\overline{D}+ABCD$$

Συμπληρώνουμε την 2η στήλη του πίνακα με όλους τους όρους της τελικής συνάρτησης με την αύξουσα σειρά του αριθμού που εκφράζει το βάρος του όρου.

2ο: Σύγκριση όρων (ΣΟ-ΛΣ)

Σημειώνουμε με √ τον 1ο όρο (στην **1η** στήλη) και τον συγκρίνουμε διαδοχικά με όλους τους υπόλοιπους όρους (2ο,3ο,….κ.λ) εφαρμόζοντας την ιδιότητα Boole $XA+X\bar{A}=X$

Όταν συναντήσουμε όρο στον οποίο μια μεταβλητή βρίσκεται στη μορφή $A+\bar{A}$, τότε σημειώνουμε τους όρους με ένα **+** (στα αριστερά τους) και μεταφέρουμε τον παράγοντα Χ (**χωρίς** την μεταβλητή Α ή B,C,D,E κ.λ.π) στην **4η** στήλη του πίνακα, ενώ στην **3η** στήλη σημειώνουμε τους αύξοντες αριθμούς των όρων που ισχύει η ιδιότητα (1,4) και επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία και σημειώνουμε με **+** κάθε όρο που εφαρμόζεται η ιδιότητα (αν δεν είναι ήδη σημειωμένος από προηγούμενη σύγκριση) μέχρι να εξαντληθούν οι όροι της 2**ης** στήλης.

1η	**2η**		**3η**	**4η**		**5η**	**6η**
√ 1.	$\bar{A}.\bar{B}CD$	+	√ (1,4)	$\bar{A}CD$	+	(1,4)-(6,9)	CD
√ 2.	$\bar{A}B\bar{C}.\bar{D}$	+	√ (1,6)	$\bar{B}C\bar{D}$	+	(1,6)-(4,9)	CD
√ 3.	$\bar{A}B\bar{C}D$	+	√ (2,3)	$\bar{A}B\bar{C}$		(3,4)-(7,9)	BD
√ 4.	$\bar{A}BCD$	+	√ (3,4)	$\bar{A}BD$	+	(3,7)-(4,9)	BD
√ 5.	$A\bar{B}.\bar{C}D$	+	√ (3,7)	$B\bar{C}D$	+	(5,6)-(7,9)	AD
√ 6.	$A\bar{B}CD$	+	√ (4,9)	BCD	+	(5,7)-(6,9)	AD
√ 7.	$AB\bar{C}D$	+	√ (5,6)	$A\bar{B}D$	+		
√ 8.	$ABC\bar{D}$	+	√ (5,7)	$A\bar{C}D$	+		
√ 9.	ABCD	+	√ (6,9)	ACD	+		
			√ (7,9)	ABD	+		
			√ (8,9)	ABC			

Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία σύγκρισης αλλά τώρα χρησιμοποιούμε τους όρους (που βρέθηκαν από την 1η σύγκριση) της **4ης** στήλης σημειώνοντας √ στη **3η** στήλη και **+** στα αριστερά). Τους νέους όρους που προκύπτουν από την 2η σύγκριση τους σημειώνουμε στην **6η** στήλη ενώ στην **5η** στήλη σημειώνουμε από ποιους όρους προήλθαν (1,4)-(6,9).

Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να ισχύει η ιδιότητα. Όταν αυτή πάψει να ισχύει τότε σταματά.

Οι όροι της τελευταίας στήλης που προκύπτει από τις συγκρίσεις **και** οι όροι που **δεν έχουν σημειωθεί** με **+** στις προηγούμενες στήλες (εδώ οι όροι $\overline{A}B\overline{C}, ABC$) λέγονται **πρώτοι συνεπάγοντες** όροι (Prime Implicantes)

3ο: Σύγκριση και έκφραση Ουσιωδών όρων (ΣΥ-ΟΟ)

Σχηματίζουμε τώρα ένα πίνακα που έχει 5 γραμμές, όσοι οι πρώτοι συνεπάγοντες όροι και 9 στήλες όσοι οι αρχικοί όροι της Λ.Σ.

Τοποθετούμε τους πρώτους συνεπάγοντες στις γραμμές και τους ελάχιστους όρους της Λ.Σ στις στήλες

Σημειώνουμε στον πίνακα ένα **+** σε όλα τα τετράγωνα στα οποία κάθε πρώτος συνεπάγων **περιέχεται** στους αντίστοιχους ελάχιστους όρους.

Στο τέλος σημειώνουμε, στην τελευταία γραμμή του πίνακα, όλους τους όρους που έχουν **ένα** μόνο **+** στις στήλες.

	1η	**2η**	**3η**	**4η**	**5η**	**6η**	**7η**	**8η**	**9η**
	$\overline{A}B\overline{C}.\overline{D}$	$AB\overline{C}.\overline{D}$	$\overline{A}BC\overline{D}$	$\overline{A}BCD$	$A\overline{B}.\overline{C}D$	$A\overline{B}C\overline{D}$	$A\overline{B}.CD$	$AB.\overline{C}D$	$ABC\overline{D}$
CD	+			+		+			+
BD			+	+			+		+
AD					+	+	+		+
$\overline{A}B\overline{C}$		+	+						
ABC								+	+
	CD	$\overline{A}B\overline{C}$			AD			ABC	

Αυτοί οι όροι λέγονται **ουσιώδεις όροι** (essentials) και αποτελούν την τελική Α.Λ.Σ, γιατί: α) ο ουσιώδης όρος CD καλύπτει τους ελάχιστους όρους (1,4,6,9)

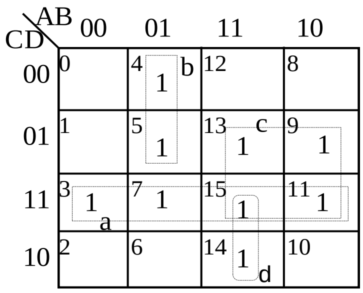
β) ο ουσιώδης όρος $\overline{A}B\overline{C}$ καλύπτει τους ελάχιστους όρους (2,3)

γ) ο ουσιώδης όρος AD καλύπτει τους ελάχιστους όρους (5,6,7,9)

δ) ο ουσιώδης όρος ABC καλύπτει τους ελάχιστους όρους (8)

και αθροιστικά, οι 3 ουσιώδεις όροι, καλύπτουν όλους τους ελάχιστους όρους (1,2,3,4,5,6,7,8,9), άρα αποτελούν την τελική Α.Λ.Σ $Z=CD+\overline{A}B\overline{C}+AD+ABC$

Με την μέθοδο Καρνώ



Συμπληρώνοντας τον χάρτη, κατά τα γνωστά με άσσο στις θέσεις των βαρών της Λ.Σ εφόσον είναι στη μορφή Α.Ε.Ο.

Σχηματίζουμε τις ομάδες a,b,c,d και η τελική Α.Λ.Σ θα είναι: $Z=CD+\overline{A}B\overline{C}+AD+ABC$ έκφραση που βρήκαμε και με την μέθοδο κατάταξης σε πίνακα (μέθοδο Quine - McCluskey (Κουιν - Μακ Κλάσκι)

3η Εφαρμογή: Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση Z=(3,5,7,13,15,19,21,23,29,31)

1^{o}: ΚΜ-ΛΣ Η λογική συνάρτηση των 5 μεταβλητών είναι στην κανονική μορφή σαν Α.Γ. Συμπληρώνουμε την $2^{η}$ στήλη του πίνακα με όλους τους όρους της τελικής συνάρτησης με την αύξουσα σειρά του αριθμού που εκφράζει το βάρος του όρου.

2^{o}: Σύγκριση όρων (ΣΟ-ΛΣ) **Σημειώνουμε** με √ τον 1^{o} όρο (στην **1η** στήλη) και τον συγκρίνουμε διαδοχικά με όλους τους υπόλοιπους όρους (2^{o},3^{o}, κ.λ.π) εφαρμόζοντας την ιδιότητα $X.\overline{Y} + X.Y = X$.

Όταν συναντήσουμε όρο στον οποίο μια μεταβλητή βρίσκεται στη μορφή $A + \overline{A}$, τότε σημειώνουμε τους όρους με ένα **+** (στα αριστερά τους) και μεταφέρουμε τον παράγοντα X (**χωρίς** την μεταβλητή A ή B,C,D,E κ.λ.π)

στην **4η** στήλη του πίνακα, ενώ στην **$3^{η}$** στήλη σημειώνουμε τους αύξοντες αριθμούς των όρων που ισχύει η ιδιότητα (1,3) και επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία και σημειώνουμε με **+** κάθε όρο που εφαρμόζεται η ιδιότητα (αν δεν είναι ήδη σημειωμένος από προηγούμενη σύγκριση) μέχρι να εξαντληθούν οι όροι της 2**ης** στήλης.

1η	2η		3η	4η		5η	6η		7η	8η
√ 1	$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}DE$	+	√1,3	$\overline{A}.\overline{B}DE$	+	√1,3-6,8	$\overline{B}DE$		2,3-4,5 / 7,8-9,10	CE
√ 2.	$\overline{A}.\overline{B}.C\overline{D}E$	+	√1,6	$\overline{B}.\overline{C}DE$	+	√1,6-3,8	$\overline{B}.DE$		2,3-7,8 / 7,8-9,10	CE
√ 3.	$\overline{A}.\overline{B}.CDE$	+	√2,3	$\overline{A}.\overline{B}CE$	+	√2,3-4,5	$\overline{A}.CE$	+	2,3-7,8 / 7,9-8,10	CE
√ 4	$\overline{A}.BC.\overline{D}.E$	+	√2,4	$\overline{A}.C\overline{D}E$	+	√2,3-7,8	$\overline{B}.CE$	+	2,3-7,8 / 4,5-9,10	CE
√ 5.	$\overline{A}.B.C.DE$	+	√2,7	$\overline{B}.C\overline{D}E$	+	√2,4-7,9	$C\overline{D}E$	+	2,3-7,8 / 4,9-5,10	CE
√ 6.	$A.\overline{B}.\overline{C}.D.E$	+	√3,5	$\overline{A}CDE$	+	√**2**,7-3,8	$\overline{B}CE$	+	**2**,4-7,9 / 3,5-8,10	CE
√ 7.	$A.\overline{B}.C.\overline{D}.E$	+	√3,8	$\overline{B}CDE$	+	√**2**,7-4,9	$C\overline{D}E$	+	**2**,4-7,9 / 3,8-5,10	CE
√ 8.	$A.\overline{B}.C.D.E$	+	√4,5	$\overline{A}BCE$	+	√3,5-8,10	CDE	+	2,7-3,8 / 4,5-9,10	CE
√ 9.	$ABC.\overline{D}.E$	+	√4,9	$BC\overline{D}E$	+	√3,8-5,10-	CDE	+	2,7-3,8 / 4,9-5,10	CE
√10	$A.BC.D.E$	+	√5,10	BCDE	+	√4,5-9,10	BCE	+	2,7-4,9 / 3,5-8,10	CE
			√6,8	$A\overline{B}DE$	+	√4,9-5,10	BCE	+	2,7-4,9 / 3,8-5,10	CE
			√7,8	$A\overline{B}CE$	+	√7,8-9,10	ACE	+		
			√7,9	$AC\overline{D}E$	+	√7,9-8,10	ACE	+		
			√8,10	ACDE	+					
			√9,10	ABCE	+					

Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία σύγκρισης αλλά τώρα χρησιμοποιούμε τους όρους (που βρέθηκαν από την $1^{η}$ σύγκριση) της **4ης** στήλης σημειώνοντας √ στη **3η** στήλη και **+** στα αριστερά). Τους νέους όρους που προκύπτουν από την $2^{η}$ σύγκριση τους σημειώνουμε στην **6η** στήλη ενώ στην **5η** στήλη σημειώνουμε από ποιους όρους προήλθαν (1,3)-(6,8).

Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία σύγκρισης αλλά τώρα χρησιμοποιούμε τους όρους (που βρέθηκαν από την 2^η σύγκριση) της **6ης** στήλης σημειώνοντας √ στη **5η** στήλη και **+** στα αριστερά). Τους νέους όρους που προκύπτουν από την 3^η σύγκριση τους σημειώνουμε στην **8η** στήλη ενώ στην **7η** στήλη σημειώνουμε από ποιους όρους προήλθαν (2,3-4,5) / (7,8-9,10).

Η παραπάνω διαδικασία σταματά εδώ. Οι όροι της τελευταίας στήλης που προκύπτει από τις συγκρίσεις **και** οι όροι που **δεν έχουν σημειωθεί** με **+** στις προηγούμενες στήλες (εδώ ο όρος $\overline{B}DE$) λέγονται **πρώτοι συνεπάγοντες** όροι (Prime Implicantes)

3^{O}: Σύγκριση και έκφραση Ουσιωδών όρων (ΣΥ-ΟΟ)

Σχηματίζουμε τώρα ένα πίνακα που έχει 2 γραμμές, όσοι οι πρώτοι συνεπάγοντες όροι και 10 στήλες όσοι οι αρχικοί όροι της Λ.Σ. Τοποθετούμε τους πρώτους συνεπάγοντες στις γραμμές και τους ελάχιστους όρους της Λ.Σ στις στήλες

Σημειώνουμε στον πίνακα ένα **+** σε όλα τα τετράγωνα στα οποία κάθε πρώτος συνεπάγων **περιέχεται** στους αντίστοιχους ελάχιστους όρους.

Στο τέλος σημειώνουμε, στην τελευταία γραμμή του πίνακα, όλους τους όρους που έχουν **ένα** μόνο **+** στις στήλες.

	1η	**2η**	**3η**	**4η**	**5η**	**6η**	**7η**	**8η**	**9η**	**10η**
	$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}DE$	$\overline{A}.\overline{B}.C\overline{D}E$	$\overline{A}.\overline{B}.CDE$	$\overline{A}BC\overline{D}E$	$\overline{A}.BCDE$	$A.\overline{B}.\overline{C}DE$	$A\overline{B}C\overline{D}E$	$A\overline{B}CDE$	$ABC\overline{D}E$	$ABC.D.E$
$\overline{B}DE$	+		+			+		+		
CE		+	+	+	+		+	+	+	+
	$\overline{B}DE$	CE		CE	CE	$\overline{B}DE$	CE		CE	CE

Αυτοί οι όροι λέγονται **ουσιώδεις όροι** (essentials) και αποτελούν την τελική Α.Λ.Σ, γιατί: α) ο ουσιώδης όρος CE καλύπτει τους ελάχιστους όρους (2,3,4,5,7,8,9,10)

β) ο ουσιώδης όρος $\overline{B}DE$ καλύπτει τους ελάχιστους όρους (1,3,6,8)

και αθροιστικά, οι 2 ουσιώδεις όροι καλύπτουν όλους τους ελάχιστους όρους (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10), άρα αποτελούν την τελική Α.Λ.Σ $Z = \overline{B}DE + CE$

Με την μέθοδο Καρνώ

DE \ BC	$\overline{A}$ 00	01	11	10	A 10	11	01	00
00	0	4	12	8	24	28	20	16
01	1	5 1	13 a 1	9	25	29 1	21 a 1	17
11	3 b 1	7 1	15 1	11	27	31 1	23 1	19 b 1
10	2	6	14	10	26	30	22	18

Συμπληρώνοντας τον χάρτη, κατά τα γνωστά με άσσο στις θέσεις των βαρών της Λ.Σ εφόσον είναι στη μορφή Α.Ε.Ο.

Σχηματίζουμε τις υπο-ομάδες a,b και η τελική Α.Λ.Σ θα είναι: $Z = \overline{B}DE + CE$ έκφραση που βρήκαμε και με την μέθοδο κατάταξης σε πίνακα ή μέθοδο Quine - Mc Cluskey (Κουιν -Μακ Κλάσκι).

5.2.4 Απλοποίηση Λ.Σ με παρατήρηση

Μια παραλλαγή της μεθόδου απλοποίησης μιας λογικής συνάρτησης που είναι εκφρασμένη σε κανονική μορφή και Α.Γ είναι η μέθοδος της παρατήρησης.

Σημειώνουμε τους όρους της Λ.Σ στην $1^{η}$ στήλη σε ένα πίνακα καταστάσεων.

Στη συνέχεια συγκρίνουμε ανά δύο τους όρους της $1^{ης}$ στήλης διαδοχικά ξεκινώντας από την $1^{η}$ γραμμή με την $2^{η}$, την $3^{η}$ κ.ο.κ. μέχρι να εξαντλήσουμε όλους τους όρους, σημειώνοντας στη διπλανή στήλη τον **α/α** (ή το βάρος) των γραμμών σύγκρισης και στην στήλη (β) τα κοινά **0** ή **1** και παύλα (**-**) στις θέσεις που αλλάζει ένα μόνο ψηφίο στις αντίστοιχες γραμμές από **0** $\rightarrow$ **1** ή από **1**$\rightarrow$ **0** .

Με το τέλος της $1^{ης}$ σύγκρισης επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία αλλά στην $2^{η}$ στήλη, σημειώνουμε δίπλα τους αντίστοιχους διπλούς αριθμούς και στην $3^{η}$ στήλη το αποτέλεσμα της σύγκρισης.

Στην $4^{η}$ στήλη σημειώνουμε τους κοινούς και μη κοινούς συνδυασμούς από τους οποίους προκύπτει και η τελική έκφραση της Α.Λ.Σ.

Ας δούμε την διαδικασία με ένα παράδειγμα.

Να βρεθεί η Α.Λ.Σ της Z=Σ(0,1,2,8,10,11,14,15).

$\rightarrow$ Σημειώνουμε στον πίνακα τον α/α κάθε όρου της δοθείσης και τον αντίστοιχο όρο που προκύπτει από το βάρος του.

	$1^{η}$		**$2^{η}$**		**$3^{η}$**		**$4^{η}$**
α/α	AB CD		AB CD		AB CD		AB CD
0	0 0 0 0	(0,1)	0 0 0 -		0 0 0 -		**0 0 0 -**
1	0 0 0 1	(0,2)	0 0 - 0	(0,2)-(8,10)	- 0 - 0		**- 0 - 0**
2	0 0 1 0	(0,8)	- 0 0 0	(0,8)-(2,10)	- 0 - 0		**1 - 1 -**
8	1 0 0 0	(2,10)	- 0 1 0				
10	1 0 1 0	(8,10)	1 0 - 0				

11	1 0 1 1	(10,11)	1 0 1 -	(10,11)-(14,15)	1 - 1 -		
14	1 1 1 0	(10,14)	1 - 1 0	(10,14)-(11,15)	1 - 1 -		
15	1 1 1 1	(11,15)	1 - 1 1				
		(14,15)	1 1 1 -				

→ Συγκρίνουμε τον 1° όρο διαδοχικά με το 2° , 3° κ.ο.κ. και σημειώνουμε στην 2η στήλη τα κοινά στοιχεία 0,1 βάζοντας (-) στη θέση που δυο στοιχεία αλλάζουν τιμή στις δυο θέσεις.

→ Επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία για την 2η στήλη και σημειώνουμε στην 3η στήλη

→ Από την 3η στήλη σημειώνουμε στην 4η τους κοινούς και μη κοινούς όρους οπότε προκύπτει η τελική έκφραση της Α.Λ.Σ $Z = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{B}.\overline{D} + A.C$