ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΣΤΟ AutoCAD

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ[1]

Τα **συστήματα συντεταγμένων** είναι θεμελιώδη εργαλεία όχι μόνο της Γεωμετρίας αλλά και κάθε επιστημονικού κλάδου, θεωρητικού ή εφαρμοσμένου, του οποίου το αντικείμενο της ερεύνης τοποθετείται στο χώρο (Φυσική, Μηχανική κ.τ.λ.).

Με τη χρήση συστημάτων συντεταγμένων επιδιώκεται η μετατροπή σημείων και λοιπών γεωμετρικών σχημάτων σε αριθμητικά αντικείμενα και η «μετάφραση» γεωμετρικών σχέσεων σε αναλυτικές σχέσεις. Μ' αυτό τον τρόπο, όχι μόνο διευκολύνεται η μελέτη των δύσχρηστων από τη φύση τους γεωμετρικών αντικειμένων, αλλά ανακαλύπτονται και νέες γεωμετρικές σχέσεις μεταξύ τους, οι οποίες «αναδύονται» από τη δομή των αναλυτικών σχέσεων που τα συνδέουν.

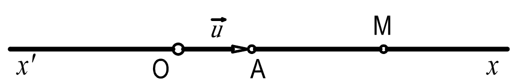
Η ιστορία των συστημάτων συντεταγμένων μας πηγαίνει πίσω στην ελληνική αρχαιότητα. Ο Απολλώνιος, από την Πέργη της Παμφυλίας (περίπου 260-200 π.Χ.), στο περίφημο έργο του «Κωνικά», χρησιμοποιεί σιωπηρά στο επίπεδο αυτό που είναι γνωστό σήμερα ως «ορθοκανονικό» σύστημα συντεταγμένων, μάλιστα σε ειδική θέση ως προς την καμπύλη που μελετά κάθε φορά, τεχνική που χρησιμοποιείται και σήμερα. Ο Απολλώνιος μάλιστα είναι και ο πρώτος που χρησιμοποιεί τον όρο «τεταγμένη», με έννοια αντίστοιχη της σημερινής.

Στη νεότερη εποχή, ο Γάλλος διανοητής René Descartes ή Cartesius (1596-1650), σε Παράρτημα με τίτλο «La Géométrie» της μνημειώδους Πραγματείας του «Λόγος περί της Μεθόδου» («Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences», 1637), εισάγει τις συντεταγμένες και τις χρησιμοποιεί συστηματικά για τη μελέτη γεωμετρικών σχημάτων. Με αντίστοιχο τρόπο και την ίδια περίπου εποχή, χρησιμοποίησε συστήματα συντεταγμένων και ο Pierre de Fermat (1601-1665), ενώ διανοητές όπως ο Isaac Newton (1642-1727) στην Αγγλία και ο Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) στη Γερμανία προήγαγαν και γενίκευσαν τη χρήση τους. Θεμελιώθηκε έτσι ένας νέος κλάδος των μαθηματικών, σήμερα γνωστός ως Αναλυτική Γεωμετρία, που ενοποίησε τη Γεωμετρία και την Άλγεβρα. Προς τιμήν του Descartes, τα συνήθη σύγχρονα συστήματα συντεταγμένων αναφέρονται ως «καρτεσιανά».

2. «ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΑ» ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Ο απλούστερος γεωμετρικός χώρος είναι ο μονοδιάστατος χώρος της ευθείας γραμμής. Σ' αυτό το χώρο, είναι δυνατόν να ορίσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων, «εξοπλίζοντας» την ευθεία (έστω $x'x$) ως εξής (Σχήμα 1): **α.** Με ένα σημείο, το O, το οποίο εκλέγεται αυθαιρέτως και θεωρείται **αρχή** του συστήματος, και **β.** με το **μοναδιαίο διάνυσμα** $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$.

Αν δοθεί τυχόν σημείο M επί της $x'x$, είναι δυνατόν να αντιστοιχίσουμε **μονοσήμαντα** σ' αυτό το σημείο έναν πραγματικό αριθμό k: το αποτέλεσμα της μέτρησης του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ με το μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{u}$, έτσι ώστε $k.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$. Ο αριθμός αυτός αναφέρεται ως η **τετμημένη** του σημείου M.



Σχήμα 1

Αντιστρόφως, αν δοθεί τυχών πραγματικός αριθμός k, θεωρούμενος τετμημένη σημείου, είναι δυνατόν το σημείο αυτό να οριστεί επίσης **μονοσήμαντα**, ως εξής: Το γινόμενο $k.\overrightarrow{u}$ υπάρχει πάντα, είναι διάνυσμα **συγγραμμικό** του $\overrightarrow{u}$, και είναι μοναδικό[2]. Αν εφαρμοστεί στο σημείο O, από τη σχέση $\overrightarrow{OM} = k.\overrightarrow{u}$ ορίζεται το σημείο M.

Στο χώρο της ευθείας γραμμής, το ζητούμενο έχει επιτευχθεί: Έχει οριστεί μια **αμφιμονοσήμαντη** αντιστοιχία ανάμεσα στο σύνολο των σημείων του χώρου και στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Μια ευθεία γραμμή, εφοδιασμένη με τον εξοπλισμό που συζητήσαμε ήδη, παύει να είναι μια απλή ευθεία, γίνεται **άξονας** – είναι επίσης γνωστή, για προφανείς λόγους, ως **ευθεία των πραγματικών αριθμών**.

Παρατηρήσεις: α. Το πρόσημο της τετμημένης του τυχόντος σημείου Μ εξαρτάται προφανώς από τη φορά των διανυσμάτων $\overrightarrow{OM}$ και $\overrightarrow{u}$. Όλα τα σημεία του **ημιάξονα**, στον οποίο ανήκει το σημείο Α έχουν θετική τετμημένη, ενώ του αντίθετου ημιάξονα αρνητική. **β.** Ποια είναι η τετμημένη του σημείου Ο;

Το AutoCAD δίνει τη δυνατότητα εισαγωγής σημείων, τα οποία θεωρείται ότι ανήκουν σε μονοδιάστατο χώρο, με χρήση της τετμημένης τους, αρκεί να υπάρχουν επαρκή δεδομένα για τον ορισμό του άξονα. Όταν π.χ., στα πλαίσια μιας εντολής που ζητάει σημεία, έστω της **LINE**, έχει οριστεί ήδη τουλάχιστον ένα σημείο, είναι δυνατόν να εισαχθεί το επόμενο σημείο με χρήση της τετμημένης του και μόνο – ως άξονας θεωρείται η ευθεία από το τελευταίο σημείο στην τρέχουσα θέση του σταυρονήματος, ως αρχή το τελευταίο σημείο, ενώ θετική είναι η φορά από το τελευταίο σημείο προς το σταυρόνημα. Το μέτρο του μοναδιαίου διανύσματος ταυτίζεται με αυτό που είναι γνωστό στο AutoCAD ως «σχεδιαστική μονάδα» (drawing unit). Παρατηρείστε ότι η τετμημένη μπορεί να εισαχθεί και αρνητική.

Αν η σχεδίαση πραγματοποιείται στον 3D χώρο, δεν είναι αυτονόητη η σημασία της έκφρασης «τρέχουσα θέση του σταυρονήματος». Κατ' αρχήν το σταυρόνημα θεωρείται ότι κινείται στο επίπεδο XY (βλέπε και την έννοια του «επιπέδου εργασίας» παρακάτω, §5.1). Όμως αυτό δεν ισχύει, αν κάποια ενεργός επιλογή «Object Snap» συσχετίζει το σταυρόνημα με κάποιο χαρακτηριστικό σημείο οπουδήποτε στο χώρο.

Ασκήσεις: 1. Αν Μ και Ν είναι σημεία ενός άξονα, με τετμημένες x_m και x_n αντιστοίχως, να υπολογίσετε: **α.** Το μήκος του τμήματος ΜΝ, **β.** Την τετμημένη του μέσου του τμήματος ΜΝ και **γ.** Την τετμημένη σημείου Ρ, το οποίο διαιρεί εσωτερικά το τμήμα ΜΝ σε δοθέντα λόγο ρ (ΜΡ:ΡΝ=ρ).

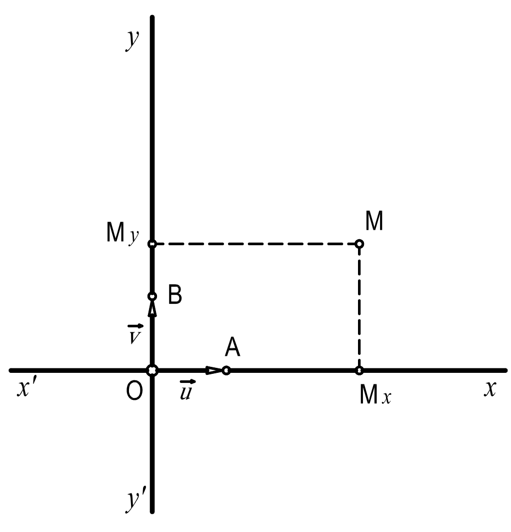
3. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Στον «δισδιάστατο» χώρο του επιπέδου, ο ορισμός συστημάτων συντεταγμένων πραγματοποιείται συνήθως με τη χρήση δύο τεχνικών: η πρώτη οδηγεί στα **καρτεσιανά**, η άλλη στα λεγόμενα **πολικά** συστήματα συντεταγμένων.

3.1 2D Καρτεσιανά Συστήματα Συντεταγμένων

Χρησιμοποιούνται δύο άξονες, οι $x'x$ και $y'y$, με κοινή αρχή και με μοναδιαία διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ και $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ αντιστοίχως. Στη γενική περίπτωση, τα διανύσματα $\overrightarrow{u}$ και $\overrightarrow{v}$ είναι τυχόντα και οι άξονες σχηματίζουν τυχούσα γωνία. Συνήθως όμως χρησιμοποιούνται άξονες κάθετοι μεταξύ τους και μοναδιαία διανύσματα «ισομήκη»: τα συστήματα συντεταγμένων που προκύπτουν έτσι αναφέρονται ως «ορθοκανονικά» και σ' αυτά η περιγραφή των γεωμετρικών αντικειμένων είναι απλούστερη.

Σε τυχόν σημείο Μ του επιπέδου, αντιστοιχεί ένα ζεύγος πραγματικών αριθμών με την εξής τεχνική: **Προβάλλεται** το σημείο Μ στους άξονες $x'x$ και $y'y$ (ή απλώς X και Y) και έστω M_x και M_y οι αντίστοιχες (και μοναδικές) προβολές του (Σχήμα 2). Ο πραγματικός αριθμός k, τετμημένη του σημείου M_x, θεωρουμένου ως σημείου του άξονα X, αποτελεί την πρώτη συντεταγμένη ή **τετμημένη** ή και συντεταγμένη x του Μ, ενώ ο l, τετμημένη του M_y, θεωρουμένου ως σημείου του άξονα Y, αποτελεί τη δεύτερη συντεταγμένη ή **τεταγμένη** ή και συντεταγμένη y του Μ. Η «σειρά» των αριθμών είναι σημαντική.



Σχήμα 2

Επομένως, με τη μεσολάβηση των προβολών στους άξονες (σε πλαγιογώνια συστήματα, η προβολή γίνεται παράλληλα στη διεύθυνση του άλλου άξονα), αντιστοιχίσαμε μονοσήμαντα, σε τυχόν σημείο του επιπέδου, ένα **διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών**.

Αντιστρόφως, αν δοθεί το (διατεταγμένο) ζεύγος των αριθμών k και l, μέσω των διανυσμάτων $k.\vec{u}$ και $l.\vec{v}$, εντοπίζονται τα σημεία Mx και My στους άξονες X και Y και στη συνέχεια το σημείο M, μοναδικό σημείο τομής των ευθειών των καθέτων στους άξονες (σε πλαγιογώνια συστήματα, των παραλλήλων στη διεύθυνση του άλλου άξονα) στα σημεία Mx και My. Ή διαφορετικά, με όρους Γραμμικής Άλγεβρας, το διάνυσμα $\overrightarrow{OM} = k.\vec{u} + l.\vec{v}$, γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$, είναι μοναδικό[3] και ορίζει μονοσήμαντα το σημείο M.

Τελικά, και στο χώρο του επιπέδου, το ζητούμενο έχει επιτευχθεί: Έχει οριστεί μια **αμφιμονοσήμαντη** αντιστοιχία ανάμεσα στο σύνολο των σημείων του χώρου και στο σύνολο των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών. Ένα επίπεδο εφοδιασμένο με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων αναφέρεται και με τον όρο **καρτεσιανό επίπεδο**.

Παρατηρήσεις: α. Ας προσέξουμε ότι στο επίπεδο δεν αρκεί μία πληροφορία για τον ορισμό ενός σημείου, όπως συνέβαινε στο χώρο της ευθείας γραμμής: απαιτούνται δύο πληροφορίες (συντεταγμένες). Αυτό δεν οφείλεται στη φύση του καρτεσιανού συστήματος: το ίδιο θα συμβεί και αν χρησιμοποιήσουμε πολικό σύστημα. Στο επίπεδο, το σημείο έχει (όπως λέμε) δύο *βαθμούς ελευθερίας*, για τη «δέσμευση» των οποίων απαιτούνται δύο «περιορισμοί». Και γενικά, σε χώρο n διαστάσεων, το σημείο έχει n βαθμούς ελευθερίας και απαιτείται διατεταγμένη n-άδα πραγματικών αριθμών για τον «εντοπισμό» του. Αυτό είναι ανεξάρτητο από το είδος των συστημάτων συντεταγμένων που θα χρησιμοποιηθούν – σχετίζεται ευθέως με τη **διάσταση** του χώρου[4]. **β.** Στα καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων, και οι δύο συντεταγμένες έχουν έννοια (προσημασμένου) μήκους. **γ.** Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου O; Των σημείων του άξονα X; Των σημείων του άξονα Y; **δ.** Στη συνέχεια, θα αναφερόμαστε πάντα σε ορθοκανονικά καρτεσιανά συστήματα. Εξάλλου αυτά τα συστήματα είναι τα μόνα που χρησιμοποιούνται στο AutoCAD και σε όλα τα CAD Προγράμματα.

Στο AutoCAD, σε οποιαδήποτε προτροπή για εισαγωγή σημείου, μπορεί κανείς να απαντήσει με ζεύγος συντεταγμένων. Το Πρόγραμμα τις αναγνωρίζει ως καρτεσιανές συντεταγμένες, από το σύμβολο που χρησιμοποιείται ως «διαχωριστικό»: τα μέλη του ζεύγους πρέπει να διαχωρίζονται με το σύμβολο «**,**» (κόμμα – comma). Υπενθυμίζεται ότι ο χαρακτήρας «**.**» (στιγμή – period) αποτελεί το σύμβολο της υποδιαστολής στο AutoCAD.

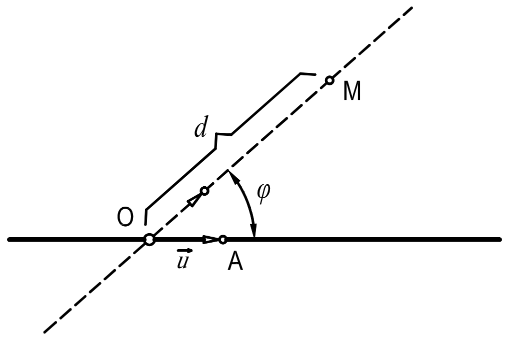
Ασκήσεις: 2. Αν M (x_m, y_m) και N (x_n, y_n) είναι σημεία του επιπέδου, να υπολογίσετε: **α.** Το μήκος του τμήματος MN, **β.** Τις συντεταγμένες του μέσου του τμήματος MN και **γ.** Τη γωνία κλίσης της ευθείας MN ως προς τον άξονα X. **3.** Σχεδιάστε στο AutoCAD (εντολή **LINE**) ένα τετράγωνο, πλευράς 3.5 μονάδων, με πλευρές παράλληλες στους άξονες X και Y και με την κάτω αριστερά κορυφή στο σημείο με συντεταγμένες (4.15, -1.37). **4.** Σχεδιάστε (εντολή **LINE**) ισόπλευρο τρίγωνο, πλευράς 4 μονάδων, με βάση παράλληλη στον άξονα X και με την κάτω αριστερά κορυφή στο σημείο με συντεταγμένες (0, 0). **5.** Βρείτε την αναγκαία σχέση μεταξύ των συντεταγμένων x και y σημείου M, ώστε το σημείο να ανήκει σε ευθεία, με γωνία κλίσης a ως προς τον άξονα X, η οποία επιπλέον **α.** Διέρχεται από την αρχή O του συστήματος ή **β.** Διέρχεται από το σημείο με συντεταγμένες (b, c). Η σχέση αποτελεί την εξίσωση της εν λόγω ευθείας σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

3.2 Πολικά Συστήματα Συντεταγμένων

Χρησιμοποιούμε έναν μόνο άξονα, τον οποίο ονομάζουμε **πολικό άξονα**, και επί του οποίου έχει οριστεί το μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$. Η αρχή O του πολικού άξονα είναι και αρχή του συστήματος συντεταγμένων και ονομάζεται **πόλος** (Σχήμα 3). Επί πλέον, το επίπεδο θεωρείται **προσανατολισμένο**, έχει οριστεί δηλαδή η θετική φορά διαγραφής των γωνιών, συνήθως αντίστροφη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Ο μηχανισμός, μέσω του οποίου στα σημεία του επιπέδου αντιστοιχούν ζεύγη πραγματικών αριθμών, είναι ο εξής: Έστω τυχόν σημείο M του επιπέδου. **Στρέφω** τον πολικό άξονα περί τον πόλο, μέχρις ότου περάσει από το σημείο Μ. Στην κίνησή του αυτή, ο άξονας έχει διαγράψει μια γωνία, έστω φ, θετική ή αρνητική. Έστω d η τετμημένη του σημείου Μ (θετικός ή αρνητικός πραγματικός αριθμός), όταν το Μ αποτελεί σημείο του εστραμμένου άξονα. Το διατεταγμένο ζεύγος των αριθμών d και φ, με αυτή τη σειρά, αποτελεί τις **πολικές συντεταγμένες** του σημείου Μ, εκ των οποίων η πρώτη ονομάζεται **διανυσματική** ή **πολική ακτίνα** και η δεύτερη **πολική γωνία** ή **όρισμα** (argument) του σημείου.

Αντιστρόφως, αν δοθεί το διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών d και φ, τότε η θέση του άξονα ΟΜ ορίζεται μονοσήμαντα, μέσω στροφής περί το Ο του πολικού άξονα κατά γωνία φ, και επ' αυτού, μέσω του διανύσματος $d.\vec{u}$, ορίζεται το σημείο Μ, του οποίου οι αριθμοί d και φ αποτελούν τις πολικές συντεταγμένες.



Σχήμα 3

Ας προσέξουμε, ότι η χρήση πολικού συστήματος συντεταγμένων δεν εξασφαλίζει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών και του συνόλου των σημείων του επιπέδου. Πράγματι, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών αντιστοιχεί ένα και μόνο σημείο του επιπέδου, αλλά αν οι αριθμοί d και φ είναι πολικές συντεταγμένες ενός σημείου του επιπέδου, τότε και οι αριθμοί της οικογενείας d, $\varphi+2\kappa\pi$ (κ= 0, ±1, ±2, ...) αλλά και οι αριθμοί της οικογενείας $-d$, $\varphi+(2\kappa+1)\pi$ (κ= 0, ±1, ±2, ...) αποτελούν συντεταγμένες του ίδιου σημείου[5] (έχει υποτεθεί ως μονάδα μέτρησης γωνιών το «ακτίνιο»).

<u>Παρατηρήσεις:</u> α. Ορίζονται και παραλλαγές του πολικού συστήματος συντεταγμένων, κατά τις οποίες δεν χρησιμοποιείται άξονας αλλά πολικός ημιάξονας. Στις περιπτώσεις αυτές, η τιμή της πρώτης συντεταγμένης περιορίζεται λογικά στο σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. **β.** Το καρτεσιανό και το πολικό σύστημα συντεταγμένων του επιπέδου είναι δυνατόν να θεωρηθούν και τα δύο επεκτάσεις του συστήματος συντεταγμένων στο χώρο της ευθείας γραμμής, που περιγράψαμε (§2): στην πρώτη περίπτωση με την προσθήκη και δεύτερου άξονα, στη δεύτερη με την προσθήκη της δυνατότητας στροφής του άξονα, ώστε να «σαρώνει» ολόκληρο το επίπεδο. **γ.** Ποιες είναι οι πολικές συντεταγμένες του πολικού άξονα; Του πόλου; **δ.** Στα πολικά συστήματα συντεταγμένων, η πρώτη συντεταγμένη έχει έννοια (προσημασμένου) μήκους, ενώ η δεύτερη έχει έννοια (προσανατολισμένης) γωνίας. **ε.** Υπάρχουν γεωμετρικά αντικείμενα που περιγράφονται απλούστερα σε σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων, ενώ η περιγραφή άλλων απλουστεύεται σε σύστημα πολικών συντεταγμένων. Η εξίσωση π.χ. ενός κύκλου ακτίνας r, με κέντρο στο σημείο Ο, σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι $x^2 + y^2 = r^2$, ενώ σε πολικό $d = r$.

Πλην του καρτεσιανού, το AutoCAD διαθέτει στο επίπεδο και πολικό σύστημα συντεταγμένων και μάλιστα βασισμένο στη χρήση πλήρους άξονα (και οι δύο συντεταγμένες μπορεί να είναι τυχόντες πραγματικοί αριθμοί, θετικοί ή αρνητικοί). Τα δύο εν χρήσει συστήματα έχουν μια πολύ χαρακτηριστική σχετική θέση: **α.** Η αρχή του καρτεσιανού και ο πόλος του πολικού συστήματος ταυτίζονται και **β.** Ο άξονας του πολικού ταυτίζεται με τον άξονα Χ του καρτεσιανού συστήματος. Και τα δύο συστήματα είναι ταυτόχρονα σε ισχύ και σε κάθε προτροπή για σημείο είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί το ένα είτε το άλλο. Το Πρόγραμμα αντιλαμβάνεται τη διαφορά από το διαφορετικό χαρακτήρα που χρησιμοποιείται ως «διαχωριστικό»: το «**,**» στην περίπτωση του καρτεσιανού, το «**<**» στην περίπτωση του πολικού συστήματος (συμβολίζει γωνία). Αυτό το συμβολισμό θα χρησιμοποιούμε και εμείς στη συνέχεια.

Ας σημειωθεί, ότι στο AutoCAD το επίπεδο XY είναι αρχικά προσανατολισμένο, έτσι ώστε θετικές να είναι οι γωνίες που διαγράφονται με κίνηση αντίστροφη εκείνης των δεικτών του ρολογιού (counterclockwise ή ccw). Όμως ο «χρήστης» έχει τη δυνατότητα να αλλάξει αυτό τον προσανατολισμό, μέσω της εντολής **UNITS**, ή απ' ευθείας, ορίζοντας σε 1 την τιμή της μεταβλητής συστήματος *ANGDIR*.

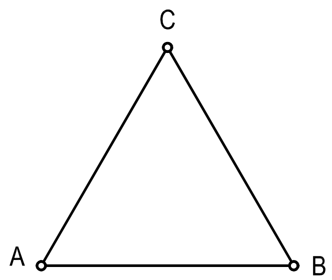
__Ασκήσεις:__ **6.** Αν M ($d_m < \varphi_m$) και N ($d_n < \varphi_n$) είναι σημεία του επιπέδου, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος MN. **7.** Αν (x, y) οι καρτεσιανές και ($d < \varphi$) οι πολικές συντεταγμένες ενός σημείου, εφ' όσον τα δύο συστήματα συντεταγμένων έχουν την ίδια αρχή και ο πολικός άξονας συμπίπτει με τον άξονα X, να υπολογίσετε: **α.** Τις καρτεσιανές συντεταγμένες συναρτήσει των πολικών. **β.** Τις πολικές συντεταγμένες συναρτήσει των καρτεσιανών. **8.** Χρησιμοποιείστε πολικό σύστημα συντεταγμένων και σχεδιάστε το ισόπλευρο τρίγωνο της Άσκησης 4. **9.** Αν ($d < \varphi$) είναι πολικές συντεταγμένες σημείου, καταγράψτε όλες τις οικογένειες πραγματικών αριθμών που επίσης αποτελούν πολικές συντεταγμένες του ίδιου σημείου. **10.** Με τις προϋποθέσεις της Άσκησης 7, βρείτε την αναγκαία σχέση μεταξύ των πολικών συντεταγμένων d και φ σημείου M, ώστε το σημείο να ανήκει σε ευθεία, με γωνία κλίσης a ως προς τον άξονα X, η οποία επιπλέον **α.** Διέρχεται από την αρχή O του συστήματος ή **β.** Διέρχεται από το σημείο με συντεταγμένες ($b < c$). Η σχέση αποτελεί την εξίσωση της εν λόγω ευθείας σε πολικές συντεταγμένες.

3.3 Σχετικά Συστήματα Συντεταγμένων

Είναι δύσκολο στις εφαρμογές να χρησιμοποιηθούν αποδοτικά τα συστήματα συντεταγμένων, όπως τα έχουμε εισαγάγει μέχρι στιγμής. Είναι δύσκολο π.χ. να χρησιμοποιηθεί πολικό σύστημα συντεταγμένων, για να σχεδιαστεί το τρίγωνο της Άσκησης 4, αν η κάτω αριστερά κορυφή του δεν είναι στο σημείο (0, 0) αλλά έστω στο (3.5, 1). Είναι πολύ ευκολότερη η εισαγωγή της κορυφής C του τριγώνου, αν ο πόλος συμπίπτει με μια από τις άλλες κορυφές (Σχήμα 4). Η χρήση συστήματος συντεταγμένων «καταλλήλως» τοποθετημένου, ως προς το περιγραφόμενο αντικείμενο, απλουστεύει την περιγραφή, είναι δε τέχνασμα που χρησιμοποίησε ο Απολλώνιος αλλά και εμείς στην περιγραφή του κύκλου της Παρατήρησης **ε.** της §3.2.

Το AutoCAD βέβαια δίνει τη δυνατότητα ορισμού (εντολή **UCS**) και χρήσης νέων συστημάτων συντεταγμένων, πέραν αυτού (WCS) που ορίζει αυτομάτως το Πρόγραμμα. Για σχεδίαση στο χώρο των τριών διαστάσεων, η δημιουργία νέων συστημάτων συντεταγμένων είναι συχνά αναγκαία. Πέραν αυτού όμως, το Πρόγραμμα παρέχει τη δυνατότητα χρήσης **σχετικών** συστημάτων συντεταγμένων. Τα **απόλυτα** συστήματα, που περιγράψαμε έως τώρα, παραμένουν σταθερά και ανεπηρέαστα από τα σχεδιαζόμενα αντικείμενα. Αντίθετα, τα σχετικά συστήματα συντεταγμένων «παρακολουθούν» τη σχεδίαση. Ένα σχετικό σύστημα συντεταγμένων, καρτεσιανό ή πολικό, είναι «παράλληλο» στο αντίστοιχό του απόλυτο σύστημα αλλά έχει την αρχή του στο τελευταίο σημείο που έχει εισαχθεί.

Έστω προς σχεδίαση (εντολή **LINE**) το ισόπλευρο τρίγωνο ABC του Σχήματος 4, πλευράς 4 μονάδων, με βάση παράλληλη στον άξονα X και με την κορυφή A στο σημείο με συντεταγμένες (3.5, 1). Αν δεν διέθετα σχετικό πολικό σύστημα συντεταγμένων, θα έπρεπε να υπολογίσω την πολική ακτίνα και το όρισμα του σημείου C και να χρησιμοποιήσω απόλυτο πολικό σύστημα ή να εισαγάγω την κορυφή C με τις απόλυτες καρτεσιανές της συντεταγμένες: (5.5, $1+2\sqrt{3}$). Δεν είναι αδύνατον να εισαγάγω στο AutoCAD αριθμητική πληροφορία αυτής της μορφής – θα χρησιμοποιήσω κατάλληλες εκφράσεις AutoLISP στην προτροπή **Command:**, τεχνική που θα συζητηθεί παρακάτω (βλ. §4.1). Είναι όμως πολύ ευκολότερο να εισαγάγω στην πρώτη προτροπή της **LINE** την κορυφή A και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσω σχετικό πολικό σύστημα συντεταγμένων για να εισαγάγω την κορυφή C, πληκτρολογώντας @4<60.



Σχήμα 4

Το 4<60 είναι οι συντεταγμένες της κορυφής C, σε ένα σχετικό πολικό σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή παράλληλο στο απόλυτο και με αρχή στο σημείο A, στο τελευταίο σημείο που έχει εισαχθεί. Το σύμβολο «**@**» προηγείται των συντεταγμένων και δηλώνει συνθηματικά στο AutoCAD, ότι το σύστημα που χρησιμοποιείται είναι σχετικό.

Για κάθε σύστημα συντεταγμένων που διαθέτει το AutoCAD, στον 2D ή στον 3D χώρο, διαθέτει και το αντίστοιχό του σχετικό σύστημα. Είναι όλα ταυτόχρονα σε ισχύ και μπορώ να χρησιμοποιώ οποιοδήποτε κατά βούληση. Αν πρόκειται να χρησιμοποιήσω σχετικό σύστημα συντεταγμένων είναι λογικό να έχω ήδη εισαγάγει ένα σημείο. Στην πραγματικότητα βέβαια το AutoCAD χρησιμοποιεί ως αρχή ενός σχετικού συστήματος συντεταγμένων το σημείο που έχει αποθηκευτεί στη μεταβλητή συστήματος *LASTPOINT* (στην οποία μπορώ να αναφερθώ και με το σύμβολο «@»). Η *LASTPOINT* έχει προκαθορισμένη τιμή (0, 0, 0) αλλά η τιμή της ενημερώνεται με κάθε εισαγόμενο σημείο, ενώ προσαρμόζεται και στο σημείο που εισάγεται με την εντολή **ID**.

Παρατηρήσεις: **α.** Αν η αρχή του σχετικού συστήματος συντεταγμένων και η τρέχουσα θέση του σταυρονήματος ανήκουν στο επίπεδο XY ή σε επίπεδο παράλληλο στο XY, η τεχνική εισαγωγής σημείου ανήκοντος σε μονοδιάστατο χώρο, που περιγράψαμε στην § 2, είναι δυνατόν να θεωρηθεί «περιληπτική» εισαγωγή σημείου σε σχετικό πολικό σύστημα: Πόλος θεωρείται το προηγούμενο σημείο, πολική ακτίνα η εισαγόμενη απόσταση και πολική γωνία η γωνία στην οποία «δείχνει» το σταυρόνημα. Η τεχνική είναι βολική, αλλά στην πράξη καθίσταται αξιοποιήσιμη μόνο χάρη στις λειτουργίες **Ortho** και **Polar Tracking** του AutoCAD, που εξασφαλίζουν τη δυνατότητα ακριβούς «επίδειξης» γωνιών με το σταυρόνημα. Αν επιπλέον χρησιμοποιηθεί καταλλήλως η λειτουργία **Snap**, με κάποια σχετική βοήθεια και του Αναγνώστη Συντεταγμένων, είναι δυνατή η εισαγωγή γωνιών και αποστάσεων με χρήση μόνο της συσκευής «κατάδειξης» (mouse).

Ασκήσεις: **11.** Σχεδιάστε (εντολή **LINE**) κανονικό πεντάγωνο ABCDE, πλευράς 3.5 μονάδων, με την κορυφή Α στο σημείο με συντεταγμένες (2.15, 1.7) και με γωνία κλίσης 15° της AB, ως προς τον άξονα X. **12.** Με την εντολή **RECTANGLE** σχεδιάστε ορθογώνιο, με βάση 3.5, ύψος 1.75 μονάδες και με την κάτω αριστερά κορυφή στο σημείο με συντεταγμένες (2.85, 3.05). **13.** Χρησιμοποιείστε την εντολή **ID**, για να ορίσετε την τιμή της μεταβλητής συστήματος *LASTPOINT* και επομένως την αρχή του σχετικού συστήματος συντεταγμένων που θα χρησιμοποιήσετε αμέσως μετά. Έλεγχος.

4. ΕΙΔΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΣΤΟ AutoCAD

Πριν περιγράψουμε τα συνήθη συστήματα συντεταγμένων στον 3D χώρο, θα αναφερθούμε σε κάποιες επί μέρους τεχνικές και στα αντίστοιχά τους στοιχεία του περιβάλλοντος του Προγράμματος, που χρησιμοποιούνται συχνά στο AutoCAD.

4.1 «Αναλυτικός» και «Γραφικός» Ορισμός Μηκών και Γωνιών

Όταν μια εντολή του AutoCAD ζητάει την εισαγωγή απόστασης (μήκους), διατίθενται δύο τύποι απάντησης από το «χρήστη»: **α.** «Αναλυτικός» και **β.** «Γραφικός».

α. Αναλυτικός τρόπος: Ο «χρήστης» μπορεί να εισαγάγει από το πληκτρολόγιο (ή κατ’ άλλον τρόπο) έναν αριθμό, ακέραιο ή πραγματικό. Είναι επίσης επιτρεπτό να εισαγάγει οποιαδήποτε έκφραση AutoLISP, απλή ή σύνθετη, η οποία «αποτιμάται» σε αριθμό. Ακόμα, αν έχει αποθηκεύσει μια αριθμητική τιμή σε «καθολική» (global) μεταβλητή AutoLISP, είναι δυνατόν να ζητήσει την «αποτίμησή» της (evaluation), εισάγοντας απευθείας στην προτροπή για μήκος το όνομά της, του οποίου όμως πρέπει να προηγείται το σύμβολο «**!**» [6]. Το AutoCAD θα εκλάβει τον εισαγόμενο αριθμό ως το ζητούμενο μήκος.

β. Γραφικός τρόπος: Ο «χρήστης» μπορεί να εισαγάγει δύο σημεία, δείχνοντας στην οθόνη ή χρησιμοποιώντας συντεταγμένες ή με οποιονδήποτε «νόμιμο» τρόπο. Το AutoCAD θα υπολογίσει την απόσταση μεταξύ των σημείων και θα τη χρησιμοποιήσει. Γραφικά π.χ. μπορεί κανείς να εισαγάγει την απόσταση που ζητάει η **OFFSET** στην πρώτη προτροπή της. Σε πολλές όμως περιπτώσεις, έχει προηγηθεί η εισαγωγή ενός σημείου, σημαντικού για τη σχεδίαση του αντικειμένου – όταν π.χ. με την εντολή **CIRCLE** έχει ήδη οριστεί το κέντρο του κύκλου και το Πρόγραμμα ζητά την ακτίνα. Αρκεί τότε να ορίσω ένα ακόμα και όχι δύο διαφορετικά σημεία. Κατά κανόνα, στις περιπτώσεις αυτές, το Πρόγραμμα συνδέει το ήδη ορισμένο σημείο με την τρέχουσα θέση του σταυρονήματος, με τη γνωστή «γραμμή-λάστιχο» (rubber-band line).

Δύο τεχνικές επίσης παρέχονται για τον ορισμό γωνίας, όταν το AutoCAD ζητάει δεδομένο αυτού του είδους: **α.** «Αναλυτικός» και **β.** «Γραφικός».

α. Αναλυτικός τρόπος: Ο «χρήστης» μπορεί να εισαγάγει έναν αριθμό, ακέραιο ή πραγματικό, ή μια έκφραση AutoLISP, η οποία «αποτιμάται» σε αριθμό, ή να ζητήσει «αποτίμηση» μεταβλητής, στην οποία έχει αποθηκευτεί αριθμητική τιμή. Το AutoCAD θα θεωρήσει τον αριθμό αυτό ως το μέτρο της ζητουμένης γωνίας, στο τρέχον σύστημα μονάδων μέτρησης γωνιών.

β. Γραφικός τρόπος: Μέσω της εισαγωγής δύο σημείων, απευθείας στην οθόνη ή με χρήση συντεταγμένων ή με οποιονδήποτε «νόμιμο» τρόπο. Το Πρόγραμμα θα εκλάβει ως τη ζητουμένη γωνία την πολική γωνία του δευτέρου σημείου, σε ένα σχετικό πολικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή στο πρώτο σημείο.

Ασκήσεις: **14.** Χρησιμοποιείστε την εντολή **RECTANGLE** και σχεδιάστε τετράγωνο πλευράς $\sqrt{3}$ μονάδων, με τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια που επιτρέπει το AutoCAD. **15.** Σχεδιάστε το τετράγωνο της προηγούμενης Άσκησης, χρησιμοποιώντας την εντολή **LINE**. **16.** Σχεδιάστε κύκλο ακτίνας $\sqrt{2}$. **17.** Πραγματοποιείστε *στροφή* (εντολή **ROTATE**) κατά γωνία **α.** κλίσης 30%, ως προς τον άξονα X, **β.** ημιτόνου 0.185 και **γ.** συνημιτόνου 0.372.

4.2 Μονάδες Μήκους και Γωνιών ή Τόξων

Το AutoCAD, ένα πρόγραμμα με παγκόσμια διάδοση, παρέχει μεγάλη γκάμα επιλογών μονάδων μήκους και γωνιών (εντολή **UNITS**).

Ως προς τις μονάδες μήκους, οι επιλογές είναι μεταξύ διαφόρων παραλλαγών του αγγλοσαξονικού συστήματος μονάδων [yard, γιάρδα (= 3 πόδια = 0.9144 m) – foot, πόδι (= 12 ίντσες = 0.3048 m) – inch, ίντσα (= 2.54 cm)], μονάδας στο δεκαδικό σύστημα (decimal) και μονάδας «επιστημονικού» (scientific) τύπου. Ο τελευταίος τύπος αποτελεί παραλλαγή δεκαδικού τύπου μονάδας, αλλά κάθε μέτρηση εμφανίζεται ως γινόμενο μιας δύναμης του 10, θετικής ή αρνητικής, και ενός πραγματικού αριθμού με μονοψήφιο ακέραιο μέρος. Είναι π.χ. συνηθισμένη η εξής «επιστημονική» γραφή, για το μέτρο του φορτίου του ηλεκτρονίου: $e \approx 1.602 \times 10^{-19}$ coulomb ή 1.602E-19 coulomb.

Ας σημειώσουμε, ότι μονάδα στο δεκαδικό σύστημα δεν σημαίνει κατ' ανάγκην «μέτρο». Σε ποια από τις γνωστές μονάδες (μέτρα, χιλιοστά, Ångströms, έτη φωτός κ.τ.λ.) θα αντιστοιχεί η «σχεδιαστική μονάδα» του AutoCAD είναι θέμα απόφασης του «χρήστη».

Στις μονάδες γωνιών (και τόξων) περιλαμβάνονται οι γνωστές μας **μοίρες** (degrees, σ' αυτό το σύστημα η ορθή γωνία μετράται σε 90 μονάδες), σε δεκαδική ή εξηκονταδική μορφή – μοίρες, λεπτά και δευτερόλεπτα – οι **βαθμοί** (grads, σ' αυτό το σύστημα η ορθή γωνία μετράται σε 100 μονάδες) και τα **ακτίνια** (radians). Υπενθυμίζουμε ότι τόξο ενός ακτινίου είναι τόξο αναπτύγματος ίσου με την ακτίνα του κύκλου στον οποίο ανήκει, άρα ο κύκλος μετράται σε 2π ακτίνια – εξ ορισμού, ο αριθμός π δίνει το λόγο της περιφέρειας προς τη διάμετρό της.

Το AutoCAD παρέχει επίσης και μια αγγλοσαξονική παραλλαγή του συστήματος μονάδων, του βασισμένου στις μοίρες: αναφέρονται ως «γεωγραφικές» (surveyor's) μονάδες.

Ο «χρήστης» είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσει την εντολή **UNITS** για τον έλεγχο των μονάδων μήκους και γωνιών ή να επέμβει απευθείας στις μεταβλητές συστήματος *LUNITS*, για τον τύπο των μονάδων μήκους, *AUNITS*, για τον τύπο των μονάδων γωνιών, *ANGBASE* και *ANGDIR*, για τη διεύθυνση της γωνίας μέτρου 0 και για τη θετική φορά διαγραφής των γωνιών στο επίπεδο αντίστοιχα. Μπορεί ακόμα να επέμβει στις τιμές των μεταβλητών συστήματος *LUPREC* και *AUPREC*, ώστε να ορίσει την ακρίβεια (πλήθος δεκαδικών ψηφίων), υπό την οποία το AutoCAD εμφανίζει πληροφορίες για μήκη και γωνίες αντίστοιχα, ή χρησιμοποιεί ο Αναγνώστης Συντεταγμένων. Πρέπει να επισημάνουμε ότι η τιμή αυτών των μεταβλητών δεν αφορά καθόλου την ακρίβεια με την οποία το Πρόγραμμα χειρίζεται και αποθηκεύει αριθμητικά δεδομένα – ακρίβεια της τάξης των 16 σημαντικών ψηφίων.

Ασκήσεις: **18.** Βρείτε τους συντελεστές μετατροπής μηκών από γιάρδες σε μέτρα και αντιστρόφως. **19.** Βρείτε συντελεστές για οποιαδήποτε μετατροπή γωνιών μεταξύ των συστημάτων των βασισμένων σε μοίρες (δεκαδική μορφή), βαθμούς και ακτίνια. **20.** Επινοείστε τεχνική μετατροπής γωνιών από δεκαδικές μοίρες σε εξηκονταδικές μοίρες και αντιστρόφως.

4.3 Ο Αναγνώστης Συντεταγμένων

Το πολύ σημαντικό αυτό χαρακτηριστικό του περιβάλλοντος σχεδίασης του AutoCAD δε χρησιμοποιείται μόνο για άντληση πληροφοριών αλλά και ως εργαλείο σχεδίασης, σε συνδυασμό με λειτουργίες του Προγράμματος όπως η **Snap**, η **Ortho** και η **Polar Tracking**.

Κατ' αρχήν, ο Αναγνώστης Συντεταγμένων εμφανίζει «δυναμικά» τις συντεταγμένες της τρέχουσας θέσης του σταυρονήματος, σε απόλυτο καρτεσιανό σύστημα. Αλλά με τη χρήση του πλήκτρου **F6** ή με επέμβαση στην τιμή της μεταβλητής συστήματος *COORDS*, ενεργοποιούνται και άλλοι τύποι λειτουργίας του Αναγνώστη: **α.** «Στατική» εμφάνιση – η εν λόγω περιοχή της status bar εμφανίζεται ανενεργός, οι συντεταγμένες όμως «ανανεώνονται», όταν οριστεί σημείο με χρήση του σταυρονήματος. **β.** «Δυναμική» εμφάνιση των συντεταγμένων, σε σχετικό πολικό σύστημα. Ο τελευταίος τύπος είναι δυνατός μόνο όταν το Πρόγραμμα ζητά σημείο, άμεσα ή έμμεσα, και η γνωστή γραμμή-λάστιχο συνδέει ένα ήδη ορισμένο σημείο με την τρέχουσα θέση του σταυρονήματος. Πρόκειται ακριβέστερα για συντεταγμένες σε σχετικό κυλινδρικό σύστημα (βλ. § 5.2).

4.4 Εισαγωγή Σημείων μέσω της Λειτουργίας Object Snap Tracking

Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο, τα οποία, ως χαρακτηριστικά σημεία ήδη σχεδιασμένων αντικειμένων, εντοπίζονται μέσω κάποιας μονίμως ενεργοποιημένης επιλογής Object Snap. Αν η λειτουργία Object Snap Tracking είναι ενεργός, κάθε ένα από τα σημεία θεωρείται κέντρο μιας δυνητικής δέσμης ημιευθειών, κατά τις διευθύνσεις 0°, 90°, 180° και 270°, πιθανόν δε και κατά τις διευθύνσεις που έχουν οριστεί για τη λειτουργία Polar Tracking. Τα σημεία τομής των ημιευθειών μιας δέσμης με κάθε μια από τις ημιευθείες άλλης δέσμης, είναι δυνατόν να εντοπιστούν, στα πλαίσια κάθε εντολής που αναμένει σημείο.

Τα κέντρα των δεσμών μπορεί να είναι μέχρι 7 σημεία, όχι κατ' ανάγκην συνεπίπεδα. Πάντως κάθε δέσμη ημιευθειών ανήκει σε επίπεδο παράλληλο στο επίπεδο XY και διερχόμενο από το κέντρο της, τέμνει δε μόνο τις συνεπίπεδές της ημιευθείες των άλλων δεσμών.

Η ενεργοποίηση της λειτουργίας (όπως και της Polar Tracking), οι διευθύνσεις που λαμβάνονται υπόψην και ο τρόπος που το AutoCAD επιλέγει τα κέντρα των δεσμών (αυτομάτως ή με χρήση του πλήκτρου Shift) ρυθμίζονται μέσω των εντολών **DSETTINGS** και **OPTIONS** (καρτέλα Drafting) ή με απευθείας επέμβαση στις τιμές των μεταβλητών συστήματος *AUTOSNAP* και *POLARMODE*.

5. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΣΤΟΝ 3D ΧΩΡΟ

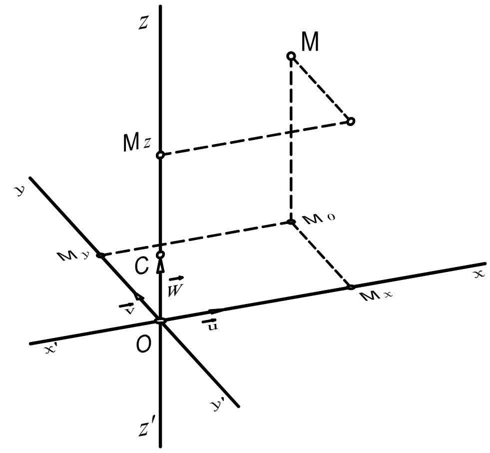
Στον τρισδιάστατο χώρο, ο ορισμός συστημάτων συντεταγμένων πραγματοποιείται με κατάλληλη επέκταση των γνωστών μας από το επίπεδο συστημάτων. Προκύπτουν τρεις τύποι 3D συστημάτων συντεταγμένων: τα **καρτεσιανά**, τα **κυλινδρικά** και τα **σφαιρικά**. Τα δύο τελευταία θεωρούνται επεκτάσεις του πολικού συστήματος. Θα εξετάσουμε και τα τρία στη συνέχεια με λεπτομέρειες.

5.1 3D Καρτεσιανά Συστήματα Συντεταγμένων

Στον 3D χώρο, προστίθεται ένας επιπλέον άξονας, με την ίδια αρχή. Στα ορθοκανονικά συστήματα (που χρησιμοποιεί και το AutoCAD), ο τρίτος άξονας είναι κάθετος στο επίπεδο των δύο άλλων και διαθέτει το μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$, «ισόμηκες» με τα μοναδιαία διανύσματα των δύο άλλων αξόνων.

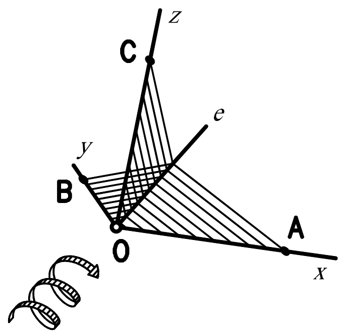
Ο μηχανισμός αντιστοίχισης σημείων του 3D χώρου και διατεταγμένων τριάδων πραγματικών αριθμών έχει ως εξής: Το τυχόν σημείο Μ του χώρου προβάλλεται στους άξονες X, Y και Z, μέσω επιπέδων παραλλήλων στα επίπεδα YZ, ZX και XY αντίστοιχα (Σχήμα 5). Έστω M_x, M_y και M_z οι προβολές στους σχετικούς άξονες. Η διατεταγμένη τριάδα των αριθμών k, l και m, τετμημένων αυτών των σημείων στους αντίστοιχους άξονες, αποτελεί τις συντεταγμένες του σημείου Μ οι οποίες αναφέρονται ως **τετμημένη**, **τεταγμένη** και **κατηγμένη** του σημείου. Αναφέρονται επίσης και ως πρώτη, δεύτερη και τρίτη συντεταγμένη ή ως συντεταγμένες x, y και z αντίστοιχα.

Αντιστρόφως, αν δοθεί η διατεταγμένη τριάδα των αριθμών k, l και m, μέσω των διανυσμάτων $k.\vec{u}$, $l.\vec{v}$ και $m.\vec{w}$, εντοπίζονται τα σημεία Mx, My και Mz στους άξονες X, Y και Z και στη συνέχεια το σημείο M, μοναδικό κοινό σημείο των επιπέδων των καθέτων στους άξονες (σε πλαγιογώνια συστήματα, των παραλλήλων στη διεύθυνση των επιπέδων των δύο άλλων αξόνων) στα σημεία Mx, My και Mz. Ή διαφορετικά, για να χρησιμοποιήσουμε έννοιες Γραμμικής Άλγεβρας, το διάνυσμα $\overrightarrow{OM} = k.\vec{u} + l.\vec{v} + m\,\vec{w}$, γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{u}$, $\vec{v}$ και $\vec{w}$, είναι μοναδικό και ορίζει μονοσήμαντα το σημείο M.



Σχήμα 5

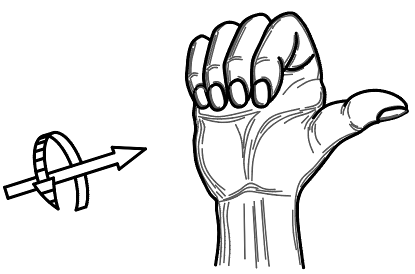
Ένα 3D καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων δυνατόν να υπάρξει σε δύο καταστάσεις, ανάλογα με τον προσανατολισμό του άξονα Z, ως προς το επίπεδο XY. Κατά σύμβαση, από τους δύο δυνατούς προσανατολισμούς, επιλέγουμε τον «δεξιόστροφο». Αυτός αναγνωρίζεται ως εξής: Ας θεωρήσουμε την τρίεδρο που ορίζουν οι θετικοί ημιάξονες του συστήματος συντεταγμένων μας και τα ημιεπίπεδα που διχοτομούν τις διέδρους αυτής της τριέδρου. Τα τελευταία τέμνονται ως γνωστόν κατά μία ημιευθεία, έστω την Oe (Σχήμα 6). Ας θεωρήσουμε και τα σημεία A, B και C, επί των ημιαξόνων Ox, Oy και Oz αντίστοιχα. Αν τώρα ένας «δεξιόστροφος κοχλίας», παράλληλος στην Oe, στρέφεται κατά τη φορά που ορίζουν επί του επιπέδου τους τα σημεία A, B και C, προχωρεί κατά την Oe στα «δεξιόστροφα» συστήματα συντεταγμένων και αντιθέτως στα «αριστερόστροφα».



Σχήμα 6

Αυτός είναι ο πασίγνωστος **κανόνας του «δεξιόστροφου κοχλία»**. Είναι όμως γνωστοί και άλλοι ισοδύναμοι κανόνες. Κατά τον **κανόνα του δεξιού χεριού**, αν τοποθετήσω καταλλήλως το δεξί χέρι, έτσι ώστε ο δείκτης να δείχνει τα θετικά x και ο μέσος τα θετικά y, τότε, στα δεξιόστροφα συστήματα συντεταγμένων, ο αντίχειρας δείχνει τα θετικά z και αντιθέτως στα αριστερόστροφα. Κατά τον **κανόνα του όρθιου ανθρώπου**, αν σταθώ όρθιος (δηλαδή με την κεφαλή κατά τα θετικά z) στο επίπεδο XY, και μάλιστα στην αρχή των αξόνων, έτσι ώστε να βλέπω κατά τα θετικά x, τότε έχω προς το αριστερό μου χέρι τα θετικά y στα δεξιόστροφα συστήματα συντεταγμένων και αντιθέτως στα αριστερόστροφα (βλέπε και Ανδρεαδάκη, σελ. 8).

<u>Παρατηρήσεις:</u> α. Ας προσέξουμε ότι και οι τρεις καρτεσιανές συντεταγμένες έχουν έννοια (προσημασμένου) μήκους, κατά σύμβαση δε διαχωρίζονται ανά δύο με το σύμβολο «**,**». Ο ίδιος κανόνας ισχύει και στο AutoCAD. **β.** Το AutoCAD είναι ένα πλήρως τρισδιάστατο CAD πρόγραμμα. Παρ' όλα αυτά επιτρέπει την εισαγωγή 1D (βλ. §2) και 2D σημείων. Αν εισαχθεί 2D σημείο ή αν σημείο εισαχθεί απευθείας με το mouse, το AutoCAD σχεδιάζει αυτό το σημείο στο «επίπεδο εργασίας» (construction plane), επομένως του αποδίδει ως τρίτη συντεταγμένη το «υψόμετρο» αυτού του επιπέδου. Το «επίπεδο εργασίας» είναι κατ' αρχήν το επίπεδο XY, αλλά μπορεί να μετατοπιστεί παραλλήλως στο επίπεδο XY κατά μία απόσταση (θετική ή αρνητική) καθοριζόμενη από την τρέχουσα **Elevation** – εντολή **ELEV** και μεταβλητή συστήματος *<u>ELEVATION</u>*. **γ.** Ο κανόνας του «δεξιόστροφου κοχλία», εκτός από τον προσανατολισμό των 3D καρτεσιανών συστημάτων συντεταγμένων, ορίζει και τη θετική φορά διαγραφής των γωνιών στον 3D χώρο. Εδώ οι *<u>στροφές</u>* πραγματοποιούνται περί άξονα, ο οποίος έχει «προσανατολιστεί» με τον ορισμό μοναδιαίου διανύσματος. Θετική (κατά σύμβαση) φορά διαγραφής των γωνιών είναι εκείνη κατά την οποία πρέπει να στραφεί «δεξιόστροφος κοχλίας», ώστε να προχωρήσει κατά τη θετική φορά του άξονα. Ας παρατηρήσουμε, ότι ο ίδιος κανόνας ορίζει και την κατά σύμβαση θετική φορά διαγραφής των γωνιών στο επίπεδο, όπου ως άξονας περιστροφής λαμβάνεται ο άξονας Z – ο **κανόνας των δεικτών του ρολογιού** είναι παραλλαγή του κανόνα του «δεξιόστροφου κοχλία». Εδώ χρησιμοποιείται συχνά και μια παραλλαγή του **κανόνα του δεξιού χεριού**: όταν το δεξί χέρι τοποθετείται καταλλήλως, ώστε ο αντίχειρας να δείχνει κατά τη θετική φορά του άξονα περιστροφής, η φορά των λοιπών δακτύλων ορίζει τη θετική φορά διαγραφής των γωνιών (Σχήμα 7). **δ.** Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου O; Των σημείων του άξονα X; Των σημείων του άξονα Y; Των σημείων του άξονα Z;



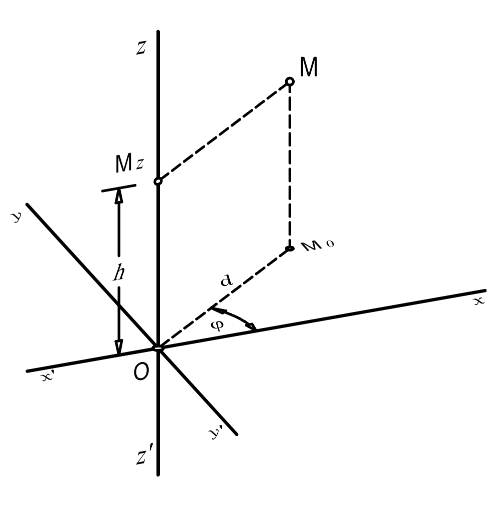
Σχήμα 7

__**Ασκήσεις:**__ **21.** Αν M (x_m, y_m, z_m) και N (x_n, y_n, z_n) είναι σημεία του 3D χώρου, να υπολογίσετε όλες τις πληροφορίες που επιστρέφει η εντολή **DIST**, δηλαδή: **α.** Το μήκος του τμήματος MN. **β.** Τα (προσημασμένα) μήκη των προβολών του διανύσματος $\overrightarrow{MN}$ στους άξονες X, Y και Z (Delta X, Delta Y, Delta Z). **γ.** Τη γωνία κλίσης της προβολής της ευθείας MN στο επίπεδο XY, ως προς τον άξονα των X (*Angle in XY Plane* - γωνία στο επίπεδο XY). **δ.** Τη γωνία κλίσης της ευθείας MN ως προς το επίπεδο XY (*Angle from XY Plane* - γωνία από το επίπεδο XY). **22.** Για τα ίδια σημεία M και N, να ευρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου του τμήματος MN. **23.** Βρείτε την αναγκαία σχέση μεταξύ των συντεταγμένων x, y και z σημείου M, ώστε το σημείο να ανήκει σε ευθεία, με γωνία κλίσης a στο επίπεδο XY και b από το επίπεδο XY, η οποία επιπλέον **α.** Διέρχεται από την αρχή O του συστήματος ή **β.** Διέρχεται από το σημείο με συντεταγμένες (c, d, e). Η σχέση αποτελεί την εξίσωση της εν λόγω ευθείας σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

5.2 Κυλινδρικά Συστήματα Συντεταγμένων

Η επέκταση του πολικού συστήματος, ώστε να παραχθεί το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων, πραγματοποιείται με την προσθήκη ενός νέου άξονα, κάθετου στο επίπεδο του 2D συστήματος και με την ίδια αρχή. Το μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$ λαμβάνεται «ισόμηκες» του μοναδιαίου διανύσματος επί του πολικού άξονα. Η φορά του μοναδιαίου διανύσματος ορίζεται με τον κανόνα του «δεξιόστροφου κοχλία», αφού ληφθεί υπόψην ο προσανατολισμός του επιπέδου, με τον ορισμό της θετικής φοράς διαγραφής των γωνιών. Αν, όπως συμβαίνει στο AutoCAD και θα υποθέτουμε στο εξής, θεωρήσουμε την ύπαρξη και ενός ορθοκανονικού συστήματος, με την ίδια αρχή και με άξονα X ταυτιζόμενο με τον πολικό άξονα, ο νέος άξονας ταυτίζεται με τον άξονα Z (Σχήμα 8).

Έστω τυχόν σημείο M του 3D χώρου. Προβάλλω το M στο επίπεδο XY και έστω M_0 η προβολή του. Οι πολικές συντεταγμένες του σημείου M_0 είναι οι d και φ, ενώ το «υψόμετρο» του M (η τρίτη συντεταγμένη του στο καρτεσιανό σύστημα) είναι έστω h. Η διατεταγμένη τριάδα των αριθμών d, φ και h αποτελούν τις **κυλινδρικές συντεταγμένες** του σημείου M.

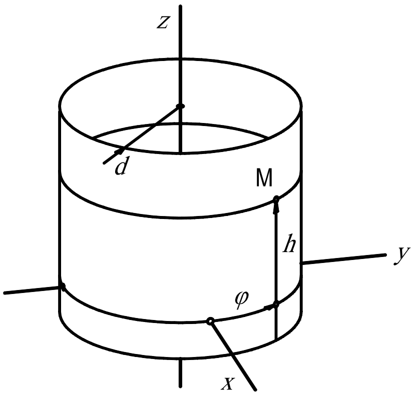


Σχήμα 8

Αντιστρόφως, αν δοθεί η διατεταγμένη τριάδα των πραγματικών αριθμών d, φ και h, θεωρουμένων κυλινδρικών συντεταγμένων σημείου M, από τους d και φ ορίζεται μονοσήμαντα το σημείο M_0, ενώ το M εντοπίζεται, μέσω του h, επί της καθέτου στο επίπεδο XY, στο σημείο M_0.

Παρατηρούμε, ότι η απώλεια του αμφιμονοσήμαντου της σχέσης διατεταγμένων συνόλων πραγματικών αριθμών και σημείων του χώρου, που διαπιστώσαμε κατά τον ορισμό του πολικού συστήματος συντεταγμένων (βλ. §3.2), κληρονομείται και στο κυλινδρικό σύστημα.

Ας επιχειρήσουμε να εντοπίσουμε το σημείο Μ, με κυλινδρικές συντεταγμένες a, b και c, ως κοινό σημείο επιφανειών οι οποίες ορίζονται αναλυτικά. Η σχέση $d=|a|$ παριστά στον 3D χώρο μια ορθή κυλινδρική επιφάνεια, με άξονα τον Ζ, προβαλλόμενη στο επίπεδο ΧΥ σε κύκλο ακτίνας a. Η σχέση $\varphi=b$, λαμβανομένου υπόψη και του προσήμου του αριθμού a, παριστά ένα κατακόρυφο ημιεπίπεδο, με όριο τον άξονα Ζ. Η σχέση $h=c$ παριστά ένα οριζόντιο επίπεδο, σε απόσταση c (θετική ή αρνητική) από το επίπεδο ΧΥ. Οι δύο πρώτες επιφάνειες τέμνονται κατά μία **γενέτειρα** της κυλινδρικής επιφανείας, επί της οποίας, ως τομή με την τρίτη επιφάνεια, ορίζεται το σημείο Μ.



Σχήμα 9

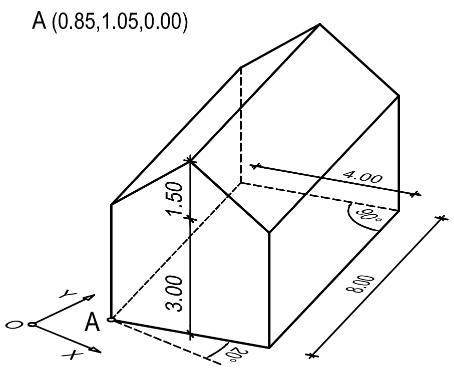
Το γεγονός αυτό δικαιολογεί τον όρο «κυλινδρικό» σύστημα συντεταγμένων. Πρόκειται για εντοπισμό σημείου δεδομένου υψομέτρου, επί ορισμένης γενετείρας ορθής κυκλικής κυλινδρικής επιφανείας (Σχήμα 9).

Στο AutoCAD, οι δύο πρώτες κυλινδρικές συντεταγμένες σημείου διαχωρίζονται κατά σύμβαση με το σύμβολο «**<**» (συμβολίζει γωνία), ενώ οι δύο τελευταίες διαχωρίζονται με το σύμβολο «**,**».

Και τα τρία (συμπεριλαμβανομένου και του σφαιρικού) εν χρήσει 3D συστήματα συντεταγμένων, που παρέχει το AutoCAD, είναι μονίμως ενεργά και μπορώ να χρησιμοποιώ το ένα είτε το άλλο, σύμφωνα με τις ανάγκες. Μπορώ ακόμα να χρησιμοποιώ απόλυτα ή σχετικά συστήματα οποιουδήποτε είδους. Στα σχετικά συστήματα, της τριάδας των συντεταγμένων πρέπει πάλι να προηγείται το σύμβολο «**@**».

<u>Παρατηρήσεις:</u> α. Ας προσέξουμε ότι η πρώτη και η τρίτη συντεταγμένη σημείου, σε κυλινδρικό σύστημα, έχουν έννοια (προσημασμένου) μήκους, ενώ η δεύτερη έχει έννοια (προσανατολισμένης) γωνίας. **β.** Ποιες είναι οι κυλινδρικές συντεταγμένες της αρχής του συστήματος; Ενός σημείου του κατακόρυφου άξονα με υψόμετρο h;

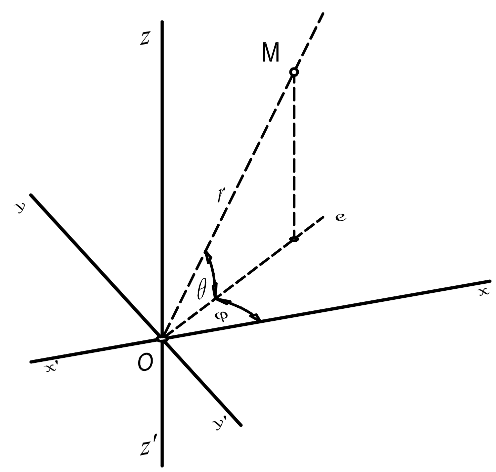
<u>Ασκήσεις:</u> 24. Αν (x, y, z) οι καρτεσιανές συντεταγμένες σημείου και $(d < \varphi, h)$ οι κυλινδρικές συντεταγμένες του ίδιου σημείου, να υπολογίσετε: **α.** Τις καρτεσιανές συντεταγμένες συναρτήσει των κυλινδρικών. **β.** Τις κυλινδρικές συντεταγμένες συναρτήσει των καρτεσιανών. **25.** Σχεδιάστε, με χρήση της εντολής **LINE**, τις ακμές της πολυεδρικής επιφανείας του Σχήματος 10. **26.** Βρείτε τις αναγκαίες σχέσεις μεταξύ των κυλινδρικών συντεταγμένων $(d < \varphi, h)$ σημείου, ώστε το σημείο να ανήκει σε ευθεία, διερχόμενη από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων, με γωνία κλίσης a ως προς το επίπεδο XY (γωνία από το επίπεδο XY) και με την προβολή της στο επίπεδο XY να εμφανίζει γωνία κλίσης b ως προς τον άξονα X (γωνία στο επίπεδο XY). Οι σχέσεις αυτές αποτελούν στην πραγματικότητα την εξίσωση της εν λόγω ευθείας σε κυλινδρικές συντεταγμένες.



Σχήμα 10

5.3 Σφαιρικά Συστήματα Συντεταγμένων

Η επέκταση του πολικού συστήματος συντεταγμένων, ώστε να παραχθεί το σφαιρικό σύστημα, πραγματοποιείται χωρίς την προσθήκη νέου άξονα. Δίνεται απλά στον πολικό άξονα η δυνατότητα να στρέφεται περί τυχόντα άξονα, διερχόμενο από την αρχή του συστήματος, και επομένως να «σαρώνει» τα σημεία του 3D χώρου. Η οποιαδήποτε στροφή του πολικού άξονα αναλύεται σε δύο συνιστώσες: **α.** Στροφή (περί το Ο) στο επίπεδο XY, αν, όπως συμβαίνει στο AutoCAD και θα υποθέτουμε στο εξής, θεωρήσουμε την ύπαρξη και ενός ορθοκανονικού συστήματος, με την ίδια αρχή και με άξονα X ταυτιζόμενο με τον πολικό άξονα, και **β.** Στροφή (περί το Ο) σε κατακόρυφο επίπεδο διερχόμενο από τον άξονα Ζ.



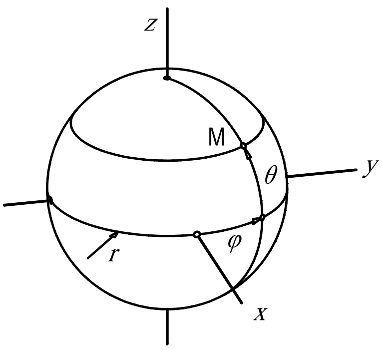
Σχήμα 11

Έστω τυχόν σημείο Μ του 3D χώρου (Σχήμα 11). Προβάλλω την ΟΜ στο επίπεδο XY και έστω Οe η προβολή της. Τα σημεία της Οe ορίζουν μια πολική γωνία φ, ενώ η γωνία κλίσης της ΟΜ, ως προς το επίπεδο XY, είναι έστω θ. Η γωνία θ θεωρείται θετική, αν το σημείο Μ έχει θετικό υψόμετρο, άλλως αρνητική. Αν ο πολικός άξονας στραφεί καταλλήλως, ώστε να συμπέσει με την ευθεία ΟΜ, τότε το Μ, σημείο του εστραμμένου άξονα, έχει τετμημένη έστω r. Η διατεταγμένη τριάδα των αριθμών r, φ και θ αποτελούν τις **σφαιρικές συντεταγμένες** του σημείου Μ. Η πρώτη λέγεται **πολική απόσταση**, η δεύτερη **πολικό μήκος** (γωνία στο επίπεδο XY) και η τρίτη **πολικό πλάτος** (γωνία από το επίπεδο XY) του σημείου Μ.

Αντιστρόφως, αν δοθεί η τριάδα των αριθμών r, φ και θ, θεωρουμένων σφαιρικών συντεταγμένων σημείου Μ του χώρου, και πραγματοποιηθούν διαδοχικά οι κατάλληλες στροφές του πολικού άξονα κατά γωνίες φ και θ, ορίζεται μονοσήμαντα το σημείο Μ επί του άξονα στη νέα του θέση, με δεδομένη την τετμημένη του r. Διαπιστώνουμε και πάλι την απουσία του αμφιμονοσήμαντου της σχέσης διατεταγμένων συνόλων πραγματικών αριθμών και σημείων του χώρου.

Για να εντοπίσουμε το σημείο Μ, με σφαιρικές συντεταγμένες a, b και c, ως το κοινό σημείο επιφανειών οι οποίες ορίζονται αναλυτικά, παρατηρούμε τα εξής: Η σχέση $r=|a|$ παριστά στον 3D χώρο μια σφαίρα ακτίνας a, με κέντρο στην αρχή των αξόνων. Η σχέση $\varphi=b$, λαμβανομένου υπόψην και του προσήμου του αριθμού a, παριστά ένα κατακόρυφο ημιεπίπεδο, με όριο τον άξονα Ζ. Η σχέση $\theta=c$ παριστά (την άνω ή κάτω του επιπέδου XY) χοάνη ορθής κυκλικής κωνικής επιφανείας, με κορυφή στην αρχή των αξόνων και με τη γενέτειρά της να κλίνει, ως προς το επίπεδο XY, κατά γωνία c (θετική ή αρνητική). Οι δύο πρώτες επιφάνειες τέμνονται κατά ημικύκλιο, «ημιμεσημβρινό» της σφαίρας, επί του οποίου, ως τομή με την τρίτη επιφάνεια, ορίζεται το σημείο Μ.

Το γεγονός αυτό δικαιολογεί τον όρο «σφαιρικό» σύστημα συντεταγμένων. Πρόκειται για εντοπισμό σημείου δεδομένου «πολικού πλάτους», επί ορισμένου μεσημβρινού σφαίρας (Σχήμα 12).



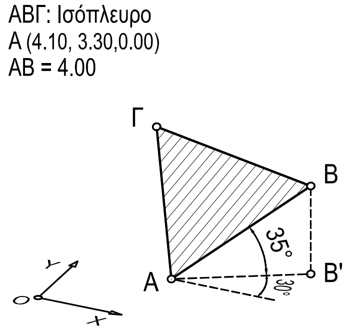
Σχήμα 12

Το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων δεν είναι άγνωστο στο ευρύ κοινό, επειδή είναι το σύστημα που χρησιμοποιείται για τον εντοπισμό σημείων στη γήινη σφαίρα. Η θέση («στίγμα» στη ναυτική ορολογία) ενός γήινου τόπου ορίζεται από τις γεωγραφικές του συντεταγμένες , δηλαδή από το **γεωγραφικό** του **μήκος** (longitude) και το **γεωγραφικό** του **πλάτος** (latitude). Το σύστημα συντεταγμένων ορίζεται ως εξής: Η αρχή του συστήματος ορίζεται στο κέντρο της γης. Επίπεδο XY είναι το επίπεδο του ισημερινού. Η διεύθυνση του πολικού άξονα ορίζεται από την τομή του μεσημβρινού του Greenwich με τον ισημερινό (στον κόλπο της Γουϊνέας). Τα αρνητικά γεωγραφικά μήκη και πλάτη δίνονται συνήθως με την απόλυτη τιμή τους και χαρακτηρίζονται ως «δυτικό» και «νότιο» αντίστοιχα. Η πρώτη σφαιρική συντεταγμένη (η ακτίνα της γης) συνήθως παραλείπεται, εκτός αν πρόκειται για σημείο πάνω (π.χ. αεροπλάνο) ή κάτω (π.χ. υποβρύχιο) από την επιφάνεια της γης, αλλά και τότε αντικαθίσταται από το ύψος (απόσταση από την επιφάνεια, θετική ή αρνητική).

Στο AutoCAD, οι σφαιρικές συντεταγμένες σημείου διαχωρίζονται κατά σύμβαση με το σύμβολο «**<**» (συμβολίζει γωνία). Υπενθυμίζουμε ότι διατίθεται και σχετικό σφαιρικό σύστημα, για την πρόσβαση στο οποίο χρησιμοποιείται (ως συνήθως) ο χαρακτήρας «**@**».

Παρατηρήσεις: α. Ας προσέξουμε ότι η πρώτη συντεταγμένη σημείου, σε σφαιρικό σύστημα, έχει έννοια (προσημασμένου) μήκους, ενώ η δεύτερη και η τρίτη έχουν έννοια (προσανατολισμένης) γωνίας. **β.** Ποιες είναι οι σφαιρικές συντεταγμένες της αρχής του συστήματος; Ποιες είναι οι σφαιρικές συντεταγμένες ενός σημείου του άξονα Ζ με υψόμετρο h;

Ασκήσεις: 27. Αν (x, y, z) οι καρτεσιανές συντεταγμένες σημείου και $(r < \varphi < \theta)$ οι σφαιρικές συντεταγμένες του ίδιου σημείου, να υπολογίσετε: **α.** Τις καρτεσιανές συντεταγμένες συναρτήσει των σφαιρικών. **β.** Τις σφαιρικές συντεταγμένες συναρτήσει των καρτεσιανών. **28.** Σχεδιάστε, με χρήση της εντολής **LINE**, το τρίγωνο του Σχήματος 13. Σημειώνεται ότι το επίπεδο του τριγώνου είναι κατακόρυφο. **29.** Βρείτε τις αναγκαίες σχέσεις μεταξύ των σφαιρικών συντεταγμένων $(r < \varphi < \theta)$ ενός σημείου, ώστε το σημείο να ανήκει σε ευθεία, διερχόμενη από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων, με γωνία κλίσης a ως προς το επίπεδο XY και με την προβολή της στο επίπεδο XY να εμφανίζει γωνία κλίσης b ως προς τον άξονα X. Οι σχέσεις αυτές αποτελούν την εξίσωση της εν λόγω ευθείας σε σφαιρικές συντεταγμένες.



Σχήμα 13

6. ΕΙΔΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΤΟΥ AutoCAD ΣΤΟΝ 3D ΧΩΡΟ

6.1 Συστήματα Συντεταγμένων «του Χρήστη»

Το AutoCAD, ενώ διαθέτει ένα προκαθορισμένο 3D σύστημα συντεταγμένων, το «καθολικό» (WCS, World Coordinate System), παρέχει και τη δυνατότητα δημιουργίας συστημάτων συντεταγμένων «του χρήστη» (UCS, User's Coordinate System). Μέσω της εντολής **UCS**, διατίθενται αρκετές τεχνικές δημιουργίας νέου συστήματος – όλες δημιουργούν ένα 3D καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, ενώ τα λοιπά συσχετισμένα συστήματα, 2D και 3D (πολικό, κυλινδρικό, σφαιρικό) δημιουργούνται αυτομάτως.

Η ισχυρότερη τεχνική είναι αυτή που σχετίζεται με την επιλογή *3point.* Το νέο σύστημα συντεταγμένων ορίζεται μέσω τριών σημείων. Τα τρία σημεία ορίζουν το επίπεδο XY. Το πρώτο σημείο ορίζει επίσης την αρχή του συστήματος. Τα δύο πρώτα ορίζουν επίσης τον άξονα X, αλλά και τη φορά του μοναδιαίου διανύσματος στον άξονα X (από το πρώτο προς το δεύτερο). Το τρίτο σημείο ορίζει επίσης και την περιοχή του επιπέδου XY (ημιεπίπεδο), που τα σημεία της προβάλλονται στον θετικό ημιάξονα Y, άρα, έμμεσα, και τη φορά του μοναδιαίου διανύσματος στον άξονα Y. Η φορά του μοναδιαίου διανύσματος στον άξονα Z ορίζεται αυτομάτως, με τον κανόνα του «δεξιόστροφου κοχλία».

Μέσω της εντολής **UCS** (επιλογές *Save* και *Restore*), διατίθεται και μηχανισμός «αποθήκευσης» συστήματος συντεταγμένων «του χρήστη», με ένα όνομα, ώστε σε κατοπινές φάσεις σχεδίασης να καθίσταται και πάλι τρέχον.

Το AutoCAD διαθέτει επίσης μια τεχνική, μέσω της οποίας είναι δυνατόν να εισάγονται σημεία στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων, ακόμα και στην περίπτωση που δεν είναι τρέχον: αρκεί των συντεταγμένων, απολύτων ή σχετικών, να προηγείται ο χαρακτήρας «*****» (π.χ. *2,3.7,0.5 ή @*1.25,7,-0.75). Η τεχνική δυνατόν να χρησιμοποιηθεί και με 2D καρτεσιανό, πολικό, κυλινδρικό ή σφαιρικό σύστημα.

Ασκήσεις: 30. Σχεδιάστε με την εντολή **LINE** τις ακμές ενός Κανονικού Τετραέδρου (τετράεδρο με όλες τις έδρες του ισόπλευρα τρίγωνα), του ABCD, με τα εξής χαρακτηριστικά: Η έδρα ABC είναι τρίγωνο του επιπέδου XY, η κορυφή A έχει συντεταγμένες (3.80,2.50), η κορυφή B έχει συντεταγμένες (5.70,7.60), ενώ η κορυφή D έχει θετικό υψόμετρο. **31.** Επιχειρείστε να σχεδιάσετε και τα υπόλοιπα τέσσερα κανονικά πολύεδρα του ευκλειδείου χώρου (Κανονικό Εξάεδρο ή Κύβος, Κανονικό Οκτάεδρο, Κανονικό Δωδεκάεδρο και Κανονικό Εικοσάεδρο), με μήκος ακμής μία μονάδα.

6.2 «Φίλτρα» Συντεταγμένων

Το AutoCAD επιτρέπει τη σύνθεση σημείου από τις καρτεσιανές συντεταγμένες του, με χρήση «φίλτρων» συντεταγμένων. Τα διαθέσιμα φίλτρα είναι 6 και συμβολίζονται **.x**, **.y**, **.z**, **.xy**, **.yz** και **.zx**. Τα φίλτρα συντεταγμένων εισάγονται στην προτροπή για σημείο και λειτουργούν ως εξής: Αν, με χρήση κάποιου φίλτρου, εισαχθεί ένα σημείο (με οποιονδήποτε «νόμιμο» τρόπο), τότε μόνο η συντεταγμένη (ή συντεταγμένες) που ορίζει το φίλτρο λαμβάνονται υπόψην από το Πρόγραμμα και ζητούνται οι υπόλοιπες. Μια συνήθης χρήση αυτής της τεχνικής είναι για τον ορισμό σημείου, με δεδομένη την προβολή του στο επίπεδο XY του τρέχοντος συστήματος συντεταγμένων και το υψόμετρό του.

Η τεχνική της χρήσης φίλτρων χρησιμοποιείται και στο επίπεδο, αλλά εδώ εύκολα υποκαθίσταται από τη λειτουργία Object Snap Tracking ή με χρήση βοηθητικών γραμμών.

<u>Ασκήσεις:</u> 32. Έστω τυχόν ευθύγραμμο τμήμα Α'Β' του επιπέδου XY. Αν αυτό το τμήμα θεωρηθεί προβολή άλλου τμήματος, του ΑΒ, με υψόμετρα άκρων z_a=5.5 και z_b=3.25 μονάδες, να σχεδιάσετε το τμήμα ΑΒ.

7. ΛΟΙΠΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Τα συστήματα συντεταγμένων που μελετήσαμε, δηλαδή το στοιχειώδες μονοδιάστατο σύστημα, τα καρτεσιανό και πολικό στον 2D χώρο και τα καρτεσιανό, κυλινδρικό και σφαιρικό στον 3D χώρο, μαζί με τα αντίστοιχά τους σχετικά συστήματα συντεταγμένων, είναι τα μόνα που διαθέτει (προς το παρόν) το AutoCAD.

Παρ' όλα αυτά, στη Γεωμετρία χρησιμοποιούνται πλήθος ακόμα συστημάτων συντεταγμένων, ανάλογα με τη φύση του προς μελέτη χώρου. Έγινε ήδη νύξη για συστήματα «ομογενών» συντεταγμένων, καρτεσιανών ή προβολικών (βλ. Σημείωση 4), καταλλήλων για τη μελέτη του «επεκτεταμένου» ευκλειδείου ή του «προβολικού» χώρου.

Για μια γενικότερη προσέγγιση στο θέμα και για παραδείγματα συστημάτων «καμπυλογράμμων συντεταγμένων» στον 2D και 3D χώρο, βλέπε Ανδρεαδάκη, σελ. 205-207.

Στα πλαίσια άλλων θεωρήσεων (π.χ. Διαφορική Γεωμετρία), επιφάνειες του (ευκλειδείου ή μη) 3D χώρου είναι δυνατόν να μελετώνται ως 2D οντότητες, με τη βοήθεια συστημάτων συντεταγμένων προσαρμοσμένων στην «εσωτερική» τους γεωμετρία (βλ. O' Neil, σελ. 332-368). Στοιχειώδες παράδειγμα αποτελεί η μελέτη της επιφανείας της σφαίρας, με χρήση συστήματος «γεωγραφικών» συντεταγμένων. Αυτές οι θεωρήσεις επεκτείνονται και στη μελέτη χώρων n διαστάσεων, με n>3.

Τελικά, η μελέτη του χώρου στις σύγχρονες αναλυτικές προσεγγίσεις βασίζεται στην αντιστοίχιση, αμφιμονοσήμαντη ή μη, διατεταγμένων n-άδων αριθμών (πραγματικών ή και μιγαδικών) στα γεωμετρικά αντικείμενα. Τα τελευταία δυνατόν να είναι σημεία («σημειακές» συντεταγμένες) αλλά και οντότητες διαφορετικής υπόστασης (π.χ. ευθείες ή επίπεδα – «ευθειακές» ή «επιπεδικές» συντεταγμένες), οι οποίες θεωρούνται στοιχεία γενεσιουργά άλλων, περισσότερο περίπλοκων σχημάτων, π.χ. καμπυλών ή επιφανειών (βλ. Λαδόπουλου, σελ. 17-30).

8. ΠΕΡΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Ένα από τα σημαντικά και ιδιαίτερα ενδιαφέροντα θέματα στη Γεωμετρία είναι και αυτό του **προσανατολισμού**. Ρητή αναφορά στο θέμα αυτό κάναμε για πρώτη φορά κατά τον ορισμό των πολικών συστημάτων συντεταγμένων στο επίπεδο. Παρ' όλα αυτά, το θέμα υφίσταται ήδη από το χώρο της ευθείας γραμμής. Ο ορισμός του μοναδιαίου διανύσματος προσανατολίζει την ευθεία, έτσι ώστε από τις δύο διαθέσιμες «φορές διαγραφής» να ορίζεται η θετική. Ο προσανατολισμός λοιπόν της ευθείας ορίζει τις θετικές και αρνητικές *μετατοπίσεις* (ή *μεταφορές*) κατά μήκος της.

Πώς έχουν τα πράγματα στο επίπεδο; Παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο τρόποι προσθήκης του δεύτερου άξονα, ας πούμε του άξονα Y: έτσι ώστε η *κυρτή* (μικρότερη των δύο ορθών) γωνία από το θετικό ημιάξονα X στο θετικό ημιάξονα Y να διαγράφεται κατά την κίνηση των δεικτών του ρολογιού (αριστερόστροφο σύστημα) ή αντίστροφα (δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων) – ο τρόπος που θα επιλεγεί ορίζει έμμεσα και τη θετική φορά διαγραφής των γωνιών στο επίπεδο. Από τους δύο δυνατούς τύπους συστημάτων συντεταγμένων χρησιμοποιούμε κατά σύμβαση το δεύτερο, στα πλαίσια του οποίου θετικές είναι οι γωνίες που διαγράφονται αντίθετα στην κίνηση των δεικτών του ρολογιού. Ο προσανατολισμός επομένως του επιπέδου ορίζει τις θετικές και αρνητικές *στροφές* πάνω σ' αυτό.

Στον 3D χώρο, όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει, η επιλογή του ενός από τα δύο δυνατά συστήματα συντεταγμένων προσανατολίζει τις τρίεδρες στερεές γωνίες. Ή διαφορετικά, ορίζει το θετικό ή αρνητικό πρόσημο των 3D ισομετρικών μετασχηματισμών (κινήσεων) που είναι γνωστοί ως *ελικοειδείς μετατοπίσεις* ή *ολισθαίνουσες στροφές* (glide rotations – βλ. Σ.Α. Ανδρεαδάκη, σελ. 329-331, και G.E. Martin, p. 183). Εποπτική υλοποίηση μιας ελικοειδούς μετατόπισης παρέχει η κίνηση ενός κοχλία, δεξιόστροφου είτε αριστερόστροφου.

Ας αναρωτηθούμε για τις συνέπειες στην περιγραφή των γεωμετρικών αντικειμένων από την επιλογή ενός από τα δύο δυνατά καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων του επιπέδου. Έστω ένα στοιχειώδες πολύγωνο, το τρίγωνο ABC στο επίπεδο XY, με συντεταγμένες κορυφών (x_a, y_a), (x_b, y_b), (x_c, y_c). Το τρίγωνο A'B'C', με συντεταγμένες κορυφών επίσης (x_a, y_a), (x_b, y_b), (x_c, y_c), αλλά στο αντιθέτου προσανατολισμού και με τον ίδιο άξονα X σύστημα συντεταγμένων, είναι *κατοπτρικό* του ABC ως προς τον άξονα X και επομένως *ίσο* με το ABC. Υπενθυμίζουμε, ότι η έννοια της ισότητας σχετίζεται με τη δυνατότητα «ταύτισης» δύο σχημάτων, μέσω καταλλήλων *κινήσεων* (*μετατοπίσεων* και *στροφών*).

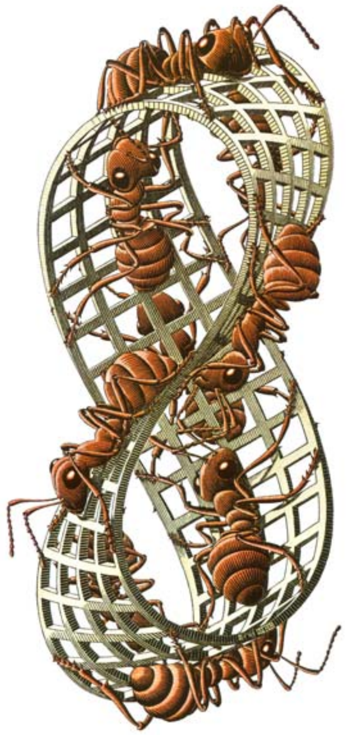
Ο επίπεδος κατοπτρισμός είναι ένας μετασχηματισμός ο οποίος διατηρεί τα μήκη (*ισομετρικός*) αλλά **αντιστρέφει** τη φορά διαγραφής των γωνιών, οδηγεί δηλαδή σε *αντιρρόπως ίσα* επίπεδα σχήματα. Η «ταύτιση» δύο *αντιρρόπως ίσων* σχημάτων και επομένως η κατάδειξη της ισότητάς τους, ακριβώς λόγω του αντιθέτου προσανατολισμού τους, είναι αδύνατη μέσω κινήσεων στο επίπεδο, εκτός αν καθένα από τα σχήματα διαθέτει άξονα συμμετρίας. Απαιτείται κίνηση στον 3D χώρο και συγκεκριμένα στροφή 180° του ενός, περί άξονα του επιπέδου τους. Μιλώντας αυστηρά, από την άποψη της Γεωμετρίας του επιπέδου, δύο «αντιρρόπως ίσα» επίπεδα σχήματα δεν είναι ίσα.

Ας δούμε τι συμβαίνει στον 3D χώρο. Έστω ένα στοιχειώδες πολύεδρο, το τετράεδρο ABCD, με συντεταγμένες κορυφών (x_a, y_a, z_a), (x_b, y_b, z_b), (x_c, y_c, z_c) και (x_d, y_d, z_d). Το τετράεδρο A'B'C'D', με συντεταγμένες αντιστοίχων κορυφών τις ίδιες, αλλά στο αντιθέτου προσανατολισμού και με το ίδιο επίπεδο XY σύστημα συντεταγμένων, είναι *κατοπτρικό* του ABCD ως προς το επίπεδο XY. Τα δύο τετράεδρα έχουν τις ακμές τους, τις έδρες τους και τις αντίστοιχες δίεδρες γωνίες τους ίσες μία προς μία, αλλά, με εξαίρεση την περίπτωση που το καθένα διαθέτει επίπεδο συμμετρίας, δεν έχουν τις τρίεδρες στερεές γωνίες τους ίσες, επομένως, από την άποψη της Γεωμετρίας του 3D χώρου, **δεν είναι ίσα** (βλ. μεταξύ άλλων Κανέλλου, σελ. 305-306). Ο κατοπτρισμός ως προς επίπεδο διατηρεί τα μήκη (είναι δηλαδή ισομετρικός μετασχηματισμός) αλλά **αντιστρέφει** τον προσανατολισμό των τριέδρων στερεών γωνιών ή μετατρέπει τους δεξιόστροφους κοχλίες σε αριστερόστροφους. Δεν υπάρχει κίνηση στον 3D χώρο που να φέρει δύο συμμετρικά ως προς επίπεδο τετράεδρα σε «σύμπτωση», αν το καθένα δεν διαθέτει επίπεδο συμμετρίας[7].

Δύο πασίγνωστα, κατοπτρικά ως προς επίπεδο και μη ίσα, αντικείμενα είναι το δεξί και το αριστερό χέρι. Το γεγονός αυτό ώθησε το Λόρδο Kelvin (1824-1907) να ονομάσει τα αντικείμενα χωρίς άξονα ή επίπεδο συμμετρίας «χειριακά» (chiral), από την ελληνική λέξη «χειρ» (βλ. Martin, p. 191-192). Αντικείμενα αυτού του είδους είναι δυνατόν να εμφανίζονται σε δύο *«εναντιόμορφες»* εκδοχές.

Ας επισημάνουμε και μια ακόμα σημαντική πλευρά του θέματος που μας απασχολεί: Το 1858, ο εξέχων Γερμανός μαθηματικός August Ferdinand Möbius (1790-1868), στα πλαίσια των μελετών του για τις ιδιότητες των πολυεδρικών επιφανειών, διαπίστωσε ότι δεν είναι δυνατόν να προσανατολιστούν όλες οι επιφάνειες. Το «προσανατολίσιμο» ή μη των επιφανειών αποτελεί σημαντικό, τοπολογικής φύσης, χαρακτηριστικό τους και σχετίζεται άμεσα με τον «μονόπλευρο» ή μη χαρακτήρα τους. Ο

Möbius παρατήρησε ότι οι «μη προσανατολίσιμες» επιφάνειες είναι *μονόπλευρες*, ενώ οι «προσανατολίσιμες» είναι *δίπλευρες*.



Σχήμα 14

Το ευκλείδειο επίπεδο είναι *δίπλευρος* χώρος. Τυχούσα γωνία, θετική για όντα της μιας πλευράς του, είναι αρνητική για όντα της άλλης πλευράς και αντιστρόφως. Δεν υπάρχει 2D κίνηση ικανή να φέρει ένα επίπεδο σχήμα σε «σύμπτωση» με το εναντιόμορφό του, ικανή δηλαδή να το καταστήσει σχήμα «της άλλης πλευράς». Αντίστοιχα συμπεράσματα προκύπτουν για την ευκλείδεια ευθεία, για τον ευκλείδειο 3D χώρο και για κάθε ευκλείδειο χώρο, ανεξαρτήτως διάστασης. Όλοι οι ευκλείδειοι χώροι είναι *δίπλευροι* (ή *προσανατολίσιμοι*).

Αλλά η *υφή* του «προβολικού» επιπέδου είναι διαφορετική. Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι πρόκειται για *μονόπλευρο* χώρο. Υπάρχει κίνηση (*μετατόπιση*), η οποία φέρει ένα σχήμα του «προβολικού» επιπέδου σε «σύμπτωση» με το εναντιόμορφό του ή που αντιστρέφει τη φορά διαγραφής των γωνιών. Γενικά, στην Προβολική Γεωμετρία, οι χώροι άρτιας διάστασης είναι *μονόπλευροι* (μη *προσανατολίσιμοι*), ενώ οι χώροι περιττής διάστασης *δίπλευροι* (*προσανατολίσιμοι*, βλ. Λαδόπουλου, σελ. 15γ' και 118-124).

Η απλούστερη μη *προσανατολίσιμη* επιφάνεια είναι η λεγόμενη «ταινία του Möbius». Η επιφάνεια αυτή είναι πράγματι *μονόπλευρη*[8]. Στο εσωτερικό της υπάρχουν κινήσεις οι οποίες αντιστρέφουν τη φορά διαγραφής των γωνιών και φέρουν σχήματα σε ταύτιση με τα εναντιόμορφά τους. Ίσως η καλύτερη απεικόνιση της ταινίας του Möbius είναι η ξυλογραφία του πασίγνωστου Ολλανδού χαράκτη M.C. Escher (Maurits Cornelis Escher, 1898-1972), με τίτλο «Ταινία του Möbius II» (Band van Möbius II, 1963), η οποία εμφανίζεται στο Σχήμα 14.

<u>**Ασκήσεις:**</u> **33.** Χρησιμοποιείστε κατάλληλη τεχνική δημιουργίας 3D επιφανείας, από τις τέσσερις που παρέχει το AutoCAD, και κατασκευάστε μια ταινία του Möbius.

<u>ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

5. Απάντηση: **α.** $y - kx = 0$ και **β.** $y - kx + kb - c = 0$, όπου $k = \tan a$.

10. Απάντηση: **α.** $\varphi = a$ (εννοείται $d \in \mathbb{R}$) και **β.** $d = \dfrac{\sin(a-c)}{\sin(a-\varphi)} b$.

14. Στην προτροπή *Specify other corner point or [Dimensions]:* της **RECTANGLE** απαντήστε με την έκφραση: **`(strcat "@" (rtos (sqrt 6) 2 15) "<45")`**. Αυτό θα εισαγάγει ένα σημείο, σχετικής πολικής γωνίας 45° και σχετικής πολικής ακτίνας $\sqrt{6}$. Ο τελευταίος αριθμός θα εισαχθεί ως πραγματικός, με πλήθος 16 σημαντικών ψηφίων, το μέγιστο που παρέχει το AutoCAD.

15. Προτείνεται η απόδοση σε μια καθολική μεταβλητή, έστω στην **`side`**, της τιμής $\sqrt{3}$, μέσω της έκφρασης **`(setq side (sqrt 3))`**. Στη συνέχεια, ενεργοποιώντας την **Ortho** λειτουργία και δείχνοντας την κατάλληλη κάθε φορά γωνία, μπορούμε να απαντάμε στην προτροπή *Specify next point:* της **LINE** με την έκφραση **`!side`**.

16. Στην προτροπή *Specify radius of circle or [Diameter]:* της **CIRCLE** απαντήστε **`(sqrt 2)`** (αναλυτική εισαγωγή) ή @1,1 (γραφική εισαγωγή).

17. Στην προτροπή *Specify rotation angle or [Reference]:* της **ROTATE** απαντήστε:

α. **`(atan 0.3)`** (αναλυτική εισαγωγή) ή @1,0.3 (γραφική εισαγωγή),

β. `(atan 0.185 (sqrt 0.965775))`,

γ. `(atan (sqrt 0.861616) 0.372)`. Η συνάρτηση **atan** (για Arctangent) επιστρέφει το μέτρο της γωνίας σε ακτίνια (radians). Οι σχετικές τεχνικές επομένως θα λειτουργήσουν σωστά, αν η τρέχουσα μονάδα μέτρησης γωνιών είναι το ακτίνιο. Διαφορετικά, πρέπει να χρησιμοποιηθεί συνθετότερη έκφραση, στα πλαίσια της οποίας η τιμή που θα επιστρέφει η **atan** θα μετατρέπεται σε τρέχουσες μονάδες. Και στις τρεις περιπτώσεις, αναρωτηθείτε για το πιθανό πλήθος των λύσεων.

23. Απάντηση: **α.** $y = x\tan a$ και $x = z\dfrac{\cos a}{\tan b}$. Πρόκειται για δύο σχέσεις, οι οποίες πρέπει να επαληθεύονται ταυτόχρονα. Η πρώτη παριστά επίπεδο δια του άξονα Z (κατακόρυφο) και η δεύτερη επίπεδο δια του άξονα Y. Τομή των δύο επιπέδων είναι η εν λόγω ευθεία. **β.** $y = (x - c)\tan a + d$ και $x = (z - e)\dfrac{\cos a}{\tan b} + c$.

26. Απάντηση: $h = d\tan a$ και $\varphi=b$. Εννοείται ότι η μεταβλητή d (ή h, όποια από τις δύο θεωρηθεί ανεξάρτητη) παίρνει κάθε πραγματική τιμή, θετική, αρνητική ή μηδέν. Η πρώτη σχέση παριστά γενικά ορθή κυκλική κωνική επιφάνεια, με κορυφή στην αρχή των αξόνων και με γωνία κλίσης a της γενετείρας της ως προς το επίπεδο XY. Η δεύτερη σχέση παριστά κατακόρυφο επίπεδο διά του άξονα Z. Η τομή των δύο επιφανειών είναι δύο τεμνόμενες στην αρχή του συστήματος ευθείες (γενέτειρες της κωνικής επιφανείας, εκφυλισμένη υπερβολή). Αλλά όταν το d αλλάζει πρόσημο αλλάζει και το h. Επομένως, όταν το d αναφέρεται σε διαφορετικό ημιεπίπεδο, από τα δύο στα οποία ο άξονας Z διαιρεί τη δεύτερη επιφάνεια, το h αναφέρεται σε διαφορετική χοάνη της κωνικής επιφανείας. Και τελικά, από τις δύο ευθείες τομής, μόνο τα σημεία της μιας ικανοποιούν τις αρχικές σχέσεις.

29. Απάντηση: $\theta=a$ και $\varphi=b$ (εννοείται $r\in\mathbb{R}$).

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ</u>

[1] Το κείμενο αυτό έχει λάβει υπόψη και την Έκδοση 2004 του AutoCAD. Φιλοδοξεί δε στο μέλλον να αποτελέσει μέρος ενός ευρύτερου πονήματος, με στόχο να φέρει τη σύγχρονη Γεωμετρία πιο κοντά στο πολυπληθές αλλά ανομοιογενές κοινό, που χρησιμοποιεί το AutoCAD. Αν και είναι προσανατολισμένο στις εφαρμογές, το κείμενο συχνά επιχειρεί να αντιμετωπίσει το θέμα από γενικότερη σκοπιά και δεν αποφεύγει να κάνει αναφορές σε μη στοιχειώδεις προσεγγίσεις. Εξ άλλου δεν απευθύνεται μόνο στους «χρήστες» των τεχνικών που παρέχει το Πρόγραμμα αλλά και σε όσους θα επιχειρούσαν να αναπτύξουν τις δικές τους τεχνικές στο περιβάλλον του.

[2] Για την έννοια του *γινομένου* αριθμού επί διάνυσμα και γενικότερα για την *αξιωματική* των διανυσματικών χώρων, βλ. Δασκαλόπουλου, σελ. 1-3 και Ανδρεαδάκη, σελ. 334-335.

[3] Για την έννοια του *γραμμικού συνδυασμού*, βλ. Δασκαλόπουλου, σελ. 3-6.

[4] Για την έννοια της *διάστασης* διανυσματικού χώρου, βλ. Δασκαλόπουλου, σελ. 8-13 και Ανδρεαδάκη, σελ. 336-338. Στην περίπτωση των συστημάτων «ομογενών» συντεταγμένων (καρτεσιανών ή *προβολικών*), η παρατηρηθείσα σχέση της διάστασης του χώρου με το πλήθος των συντεταγμένων σημείου φαίνεται να μην ισχύει (βλέπε π.χ. Λαδόπουλου, σελ. 17-48). Παρ΄ όλα αυτά, αν και σε τυχόν σημείο (έστω) του επιπέδου αντιστοιχεί η διατεταγμένη τριάδα ομογενών συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3), η θέση του σημείου στο επίπεδο ορίζεται από το διατεταγμένο ζεύγος αριθμών ($\dfrac{x_1}{x_3}, \dfrac{x_2}{x_3}$). Το αμφιμονοσήμαντο της αντιστοιχίας ανάμεσα στα σημεία του χώρου και στις διατεταγμένες n-άδες πραγματικών αριθμών έχει χαθεί (γιατί;), όμως η επινόηση των συστημάτων ομογενών συντεταγμένων κάνει δυνατή την εισαγωγή των *κατ΄ εκδοχήν* ή *επ΄ άπειρον* στοιχείων του χώρου.

[5] Το «πρόβλημα» αυτό αντιμετωπίζεται, αν περιοριστεί η περιοχή τιμών της δεύτερης συντεταγμένης, αν έστω συμφωνηθεί $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Όμως η δυνατότητα της γωνίας φ να παίρνει κάθε πραγματική τιμή είναι επιθυμητή, κατά τη μελέτη ορισμένων γεωμετρικών αντικειμένων, όπως π.χ. των *ελίκων*.

[6] Η γλώσσα προγραμματισμού AutoLISP (που επεκτάθηκε στις τελευταίες Εκδόσεις, μέσω της Visual LISP) είναι άμεσα διαθέσιμη στο AutoCAD. Μπορώ να εισαγάγω οποιαδήποτε έκφραση AutoLISP είτε στην προτροπή **Command:** είτε και σε οποιαδήποτε άλλη προτροπή, αρκεί η έκφραση να «επιστρέφει» δεδομένο του τύπου που αναμένει το Πρόγραμμα (αν π.χ. εισαγάγω έκφραση που επιστρέφει σημείο, σε μια προτροπή για αριθμό, θα πάρω ένα μήνυμα λάθους). Στις Ασκήσεις υπάρχουν ορισμένα στοιχειώδη παραδείγματα χρήσης σχετικών τεχνικών.

[7] Υπάρχει όμως κίνηση (*στροφή*) στον 4D χώρο, που φέρει σε σύμπτωση τα δύο τετράεδρα και εν γένει 3D σχήματα κατοπτρικά ως προς επίπεδο. Αν η κίνηση αυτή θεωρηθεί «νόμιμη», τα τετράεδρα είναι ίσα. Όμως ζούμε σε έναν 3D κόσμο, στα πλαίσια του οποίου οι 4D κινήσεις είναι αδύνατες, παρά το γεγονός ότι η Γεωμετρία μελετά n-διάστατους χώρους από τη δεκαετία του 1840, ενώ οι σύγχρονες φυσικές θεωρίες εργάζονται πάνω σε πολυδιάστατα μοντέλα του φυσικού χώρου. Επιπλέον, το AutoCAD (και τα λοιπά CAD προγράμματα) δεν υποστηρίζει προς το παρόν 4D σχεδίαση, αν και με τη χρήση των προγραμματιστικών μέσων που παρέχει κάνει δυνατή την υλοποίηση προβολών ή τομών 4D αντικειμένων σε (ή από) χώρους διάστασης μικρότερης του 4.

[8] Επειδή όμως η ταινία του Möbius έχει όρια (ή μάλλον όριο – διαπιστώστε ότι πρόκειται για μία μόνο κλειστή γραμμή) δεν είναι δυνατόν να θεωρηθεί «μοντέλο» του προβολικού επιπέδου. Είναι τοπολογικά ισοδύναμη με προβολικό επίπεδο, στο οποίο υπάρχει «τρύπα». Βλέπε Coxeter, p. 382-385. Για πειραματισμό με την εκπλήσσουσα συμπεριφορά αυτού του φαινομενικά απλού γεωμετρικού αντικειμένου, παραπέμπω ενδεικτικά στο B. Kordemsky, σελ. 79-80.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ανδρεαδάκης Σ.Α.: *Αναλυτική Γεωμετρία*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1999.

Coxeter H.S.M.: *Introduction to Geometry*, Second Edition, Wiley, New York 1989.

Δασκαλόπουλος Δ.Γ.: *Εφηρμοσμένη Γραμμική Άλγεβρα*, Τεύχος Πρώτον, Αθήναι (χωρίς άλλα στοιχεία).

Escher M.C.: *The Graphic Work*, Taschen, 2000.

Κανέλλος Σ.Γ.: *Ευκλείδειος Γεωμετρία*, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήναι 1975.

Kordemsky B.: *Πρακτική Τοπολογία – Η Ταινία του Möbius και Συνδεδεμένοι Δακτύλιοι*, Περιοδικό QUANTUM (Εκδόσεις Κάτοπτρο), Ιανουάριος / Φεβρουάριος 1996, σελ. 79.

Λαδόπουλος Π.Δ.: *Στοιχεία Προβολικής Γεωμετρίας*, Τόμος 1ος , Εκδόσεις Α. Καραβία, Αθήναι 1966.

Marsden J.E. Tromba A.J.: *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2η Έκδοση, Ηράκλειο 1995.

Marsh D.: *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*, Springer-Verlag, London 1999.

Martin G.E.: *Transformation Geometry, an Introduction to Symmetry*, Springer-Verlag, New York 1982.

O' Neil B.: *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2002.

Strang G.: *Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 1995.

Απρίλιος 2004

Παναγιώτης Νικολαΐδης