Οι 17 Επίπεδες Κρυσταλλογραφικές Ομάδες

Παρουσίαση της εφαρμογής λογισμικού SYMMETRY

Παναγιώτης Νικολαΐδης
Αρχιτέκτων Μηχανικός ΕΜΠ, Υ.Δ. Σχολής Αρχιτεκτόνων Μηχανικών ΕΜΠ
Γαλερίου 38, 13121, Ίλιον Αττικής, pannick@central.ntua.gr

Ευαγγελία Πέππα
Δρ. Αρχιτέκτων Μηχανικός ΕΜΠ, Εργαστηριακός Συνεργάτης ΣΤΕΦ ΤΕΙ Αθήνας
Χάνσεν 41, 11144, Αθήνα, vag@central.ntua.gr

Κατερίνα Παπαδοπούλου
Φοιτήτρια Σχολής Αρχιτεκτόνων Μηχανικών ΕΜΠ
Φιλικής Εταιρείας 20, 15126, Μαρούσι Αττικής , ar14006@central.ntua.gr

Περίληψη

Η εφαρμογή SYMMETRY χειρίζεται επίπεδους συμμετρικούς σχηματισμούς, των οποίων η ομάδα συμμετρίας ανήκει στην κλάση των «επίπεδων κρυσταλλογραφικών ομάδων», γνωστών και ως «ομάδων ταπετσαρίας». Η παρούσα ανακοίνωση εκκινεί από μια στοιχειώδη εισαγωγή στη μαθηματική θεωρία της συμμετρίας, εστιάζοντας, κατά κύριο λόγο, στην περιγραφή των 17 ομάδων ταπετσαρίας. Στη συνέχεια, η ανακοίνωση σκιαγραφεί τα κύρια χαρακτηριστικά της εφαρμογής SYMMETRY, δίνει σημαντικά παραδείγματα εφαρμογής της και καταλήγει με τις προθέσεις της ερευνητικής ομάδας για την περαιτέρω ανάπτυξή της. Από την πλούσια διαθέσιμη βιβλιογραφία, σχεδόν αποκλειστικά ξενόγλωσση, παρατίθενται σχετικά λίγοι επιλεγμένοι τίτλοι.

Λέξεις κλειδιά

Συμμετρία, ισομετρία, μεταφορά, στροφή, κατοπτρισμός, ολισθαίνων κατοπτρισμός, ομάδα ταπετσαρίας, κρυσταλλογραφική ομάδα, μοναδιαίο κύτταρο, ασύμμετρη μονάδα, μοτίβο, symmetry, isometry, translation, rotation, reflection, glide reflection, wallpaper group, crystallographic group, unit cell, asymmetric unit, motif.

1. Εισαγωγή

Η έννοια της συμμετρίας είναι παρούσα, αμέσως ή εμμέσως, και κατά τη δημιουργία και κατά την πρόσληψη του έργου τέχνης. Αν και, μετά την Αναγέννηση, η έννοια αυτή συρρικνώθηκε και κατέληξε συνώνυμη της γνωστής από το σχολείο «συμμετρίας ως προς άξονα», κατά την αρχαιότητα ήταν πολύ ευρύτερη και σχετιζόταν με περίτεχνα συστήματα αναλογιών, που χρησιμοποιήθηκαν και στην αρχιτεκτονική και στις λοιπές τέχνες.

Στην αρχιτεκτονική του 20ού αιώνα, στην «ηρωική εποχή» του μοντέρνου κινήματος, το αίτημα για την εφαρμογή ενός συστήματος αναλογιών, βασισμένου στη «χρυσή τομή» και σχετισμένου με εργονομικές θεωρήσεις, επιστρέφει προς στιγμήν, με το έργο και τις θεωρητικές αναζητήσεις του Le Corbusier (modulor). Ήδη όμως, από το τέλος του 19ου αιώνα, η έννοια της συμμετρίας έχει αποκτήσει μαθηματική θεμελίωση και έχει περιέλθει, τουλάχιστον εν μέρει, στην αρμοδιότητα των γεωμετρών και των κρυσταλλογράφων.

Η ερευνητική μας ομάδα έχει αναπτύξει την εφαρμογή λογισμικού SYMMETRY, η οποία βασίζεται στη μαθηματική θεωρία τις συμμετρίας και χειρίζεται μια σημαντική κλάση επιπέδων συμμετρικών σχηματισμών. Είναι διαδραστική και δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να πειραματιστεί και να δημιουργήσει δικούς του συμμετρικούς σχηματισμούς, εκκινώντας από ένα ή ελάχιστα στοιχειώδη σχήματα.

2. Οι Ομάδες Ισομετρικών Μετασχηματισμών του Επιπέδου

Η μαθηματική θεωρία της συμμετρίας σχετίζεται άμεσα με τη *θεωρία ομάδων* (group theory). Ένα γεωμετρικό σχήμα, πεπερασμένο ή άπειρο, είναι συμμετρικό, αν υπάρχουν *μη ταυτοτικοί μετασχηματισμοί*, οι οποίοι απεικονίζουν αυτό το σχήμα στον εαυτό του, ή, όπως λέγεται συνήθως, αφήνουν το σχήμα *αναλλοίωτο*. Το σύνολο των μετασχηματισμών, οι οποίοι αφήνουν ένα γεωμετρικό σχήμα αναλλοίωτο και για τους οποίους ορίζεται η πράξη της *σύνθεσης*, αποδεικνύεται ότι αποτελεί ομάδα και συγκροτεί την *ομάδα συμμετρίας* του σχήματος.

Έστω ότι ένα επίπεδο σχήμα παραμένει αναλλοίωτο, αν υποβληθεί στη δράση ενός συνόλου *ισομετρικών μετασχηματισμών* (isometries – μετασχηματισμοί, οι οποίοι διατηρούν το μήκος). Η ομάδα συμμετρίας του θα ανήκει κατ' ανάγκην σε μία από τις εξής τρεις κλάσεις:

α. *Ομάδες ρόδακα* (rosette groups). Χαρακτηρίζουν περίκεντρους σχηματισμούς. Δεν περιλαμβάνουν *μεταφορές* (translations), είναι άπειρες ως προς το πλήθος και ταξινομούνται σε *κυκλικές* (cyclic) και *δίεδρες* (dihedral). Και τα δύο είδη περιλαμβάνουν μη ταυτοτικές *στροφές* (rotations), αλλά μόνον το δεύτερο περιλαμβάνει και *κατοπτρισμούς* (reflections).

β. *Ομάδες διακοσμητικής ταινίας* (frieze groups). Χαρακτηρίζουν επιμήκεις, δυνητικά απείρου μήκους σχηματισμούς. Περιλαμβάνουν μη ταυτοτικές αλλά *γραμμικά εξαρτημένες μεταφορές*, πιθανόν δε να περιλαμβάνουν στροφές, κατά ακέραια πολλαπλάσια των 180° (ημι-στροφές – halfturns), κατοπτρισμούς και *ολισθαίνοντες κατοπτρισμούς* (glide reflections) – ένας ολισθαίνων κατοπτρισμός αποτελεί σύνθεση κατοπτρισμού και μεταφοράς. Ανάλογα με τους μετασχηματισμούς που περιλαμβάνουν, ταξινομούνται σε 7 διακεκριμένα είδη.

γ. *Ομάδες ταπετσαρίας* (wallpaper groups). Είναι γνωστές και υπό το επισημότερο όνομα *επίπεδες κρυσταλλογραφικές ομάδες* (plane crystallographic groups), επειδή αποτελούν τα δισδιάστατα ανάλογα των ομάδων μετασχηματισμών οι οποίες χαρακτηρίζουν τις δομές των κρυστάλλων. Περιλαμβάνουν δύο *γραμμικά ανεξάρτητες* μεταφορές, πιθανόν να περιλαμβάνουν στροφές, κατοπτρισμούς και ολισθαίνοντες κατοπτρισμούς και χαρακτηρίζουν σχηματισμούς, οι οποίοι δυνητικά καλύπτουν το επίπεδο.

Ας είναι τ_1 και τ_2 οι γραμμικά ανεξάρτητες μεταφορές, οι οποίες αφήνουν αναλλοίωτο έναν επίπεδο συμμετρικό σχηματισμό. Από τον ορισμό της έννοιας της ομάδας προκύπτει, ότι κάθε *σύνθεση* των τ_1 και τ_2, δηλαδή κάθε *γραμμικός συνδυασμός* της μορφής $\kappa\tau_1 + \lambda\tau_2$, με $\kappa, \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, ανήκει επίσης στην ομάδα συμμετρίας του σχηματισμού. Επειδή το σύνολο αυτών των μεταφορών είναι «κλειστό», αποτελεί επίσης ομάδα. Πρόκειται για την *υποομάδα των μεταφορών* της ομάδας συμμετρίας του σχηματισμού.

Υποθέτουμε, ότι η ομάδα συμμετρίας ενός συμμετρικού σχηματισμού είναι ομάδα ταπετσαρίας. Αν στην ομάδα αυτή περιλαμβάνονται και μη ταυτοτικές στροφές, θα υπάρχουν προφανώς σημεία περί τα οποία οι στροφές κατά τα ακέραια πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους γωνίας, μέτρου έστω $360°/n$, θα αφήνουν αναλλοίωτο τον όλο σχηματισμό. Αυτά τα σημεία αναφέρονται ως *κέντρα τάξης* n ή ως n*-κέντρα*. Αν τώρα ένας συμμετρικός σχηματισμός διαθέτει *κέντρα τάξης* n, αποδεικνύεται ότι το n είναι κατ' ανάγκην 2, 3, 4 ή 6, ένα θεώρημα το οποίο είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως *κρυσταλλογραφικός περιορισμός* (crystallographic restriction). Μια σημαντική συνέπεια του κρυσταλλογραφικού περιορισμού είναι ότι το πλήθος των ομάδων ταπετσαρίας είναι πεπερασμένο και ακριβώς ίσο με 17.

3. Δύο Συμμετρικοί Σχηματισμοί

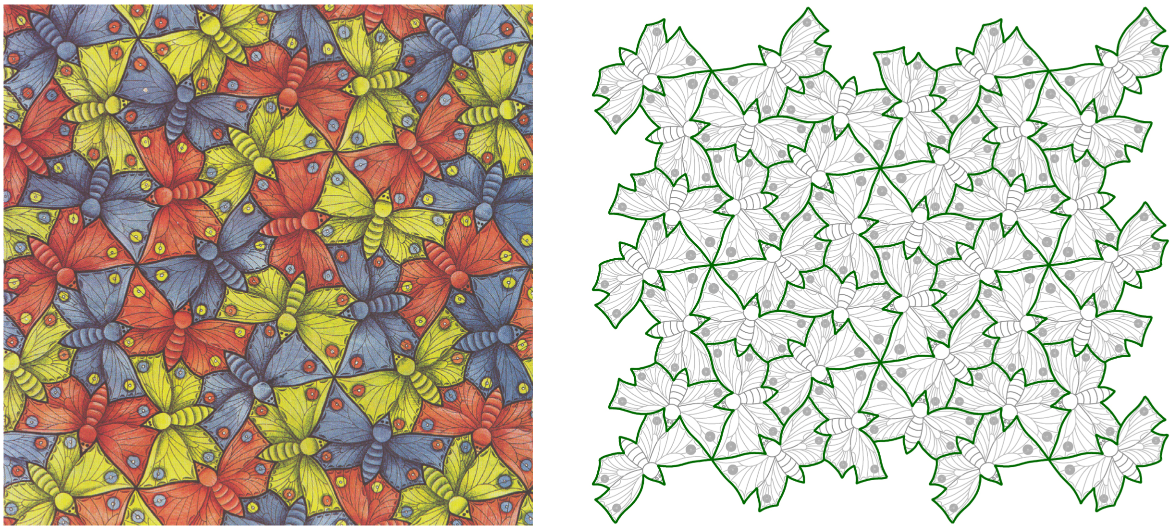
Για την εξοικείωση και με τη χρησιμοποιούμενη ορολογία, θα προχωρήσουμε στη μελέτη, από την άποψη της μαθηματικής θεωρίας της συμμετρίας, δύο συμμετρικών σχηματισμών. Ο πρώτος είναι μια γνωστή σπουδή του Ολλανδού χαράκτη M.C. Escher*, το σχεδίασμα 70 (Schattschneider, 2004:172). Πρόκειται για σύμπλεγμα από πεταλούδες (Εικόνα 1, αριστερά), το οποίο είναι δυνατόν να αναπτύσσεται απεριόριστα στο επίπεδο.

Σχεδιάσαμε εξ αρχής τμήμα του σχηματισμού (Εικόνα 1, δεξιά), αγνοώντας τις πολύ ενδιαφέρουσες χρωματικές παραλλαγές (*χρωματική συμμετρία*), χάριν απλούστευσης. Στο αριστερά σχήμα της Εικόνας 2, βλέπουμε τις δύο θεμελιώδεις μεταφορές, τ_1 και τ_2. Παρατηρούμε ότι το τμήμα του σχηματισμού, στο εσωτερικό του παραλληλογράμμου που εμφανίζεται σκιασμένο, είναι δυνατόν να παραγάγει ολόκληρο το σχηματισμό, αν υποβληθεί (αντιγραφόμενο) στις μεταφορές της ομάδας συμμετρίας του. Το χωρίο αυτό αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως *μοναδιαίο κύτταρο* (unit cell) ή *θεμελιώδης περιοχή* (fundamental region). Στην περίπτωση αυτή, το μοναδιαίο κύτταρο είναι ρόμβος με εσωτερικές γωνίες μέτρων 60° και 120°.

Αλλά είναι προφανές ότι, εκτός των μεταφορών, υπάρχουν και άλλες ισομετρίες στην ομάδα συμμετρίας του σχηματισμού, συγκεκριμένα στροφές, με κέντρα σε χαρακτηριστικά σημεία του μοναδιαίου κυττάρου. Στην Εικόνα 2 (δεξιά), τα κέντρα τάξης 6 συμβολίζονται με εξάγωνα, τα κέντρα τάξης 3 με τρίγωνα και τα κέντρα

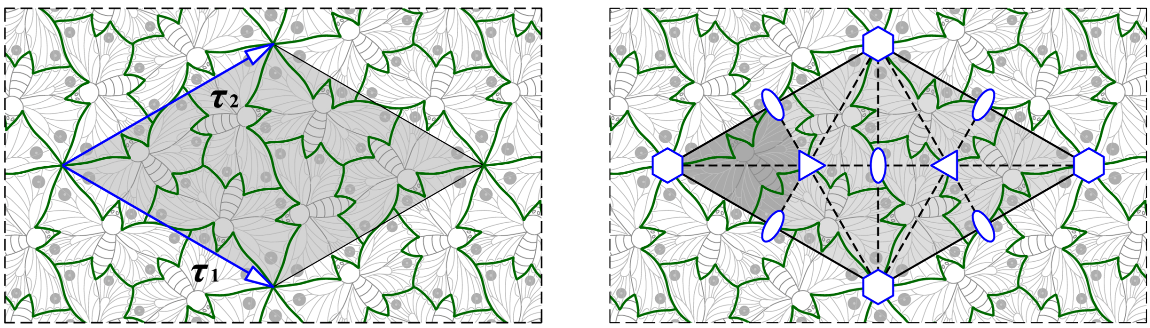
* All M.C. Escher works © The M.C. Escher Foundation – Baarn – Netherland

τάξης 2 με ελλείψεις. Αν λάβουμε υπόψην και τις ισομετρίες αυτές, διαπιστώνουμε ότι το μοναδιαίο κύτταρο και συνεπώς ολόκληρος ο σχηματισμός είναι δυνατόν να προκύψει από μια στοιχειωδέστερη περιοχή, η οποία στην εικόνα εμφανίζεται με εντονότερη σκίαση. Αυτή η περιοχή αναφέρεται ως *ασύμμετρη μονάδα* (asymmetric unit) ή *μοτίβο* (motif) του σχηματισμού και στην πραγματικότητα αποτελεί τον δομικό του λίθο.



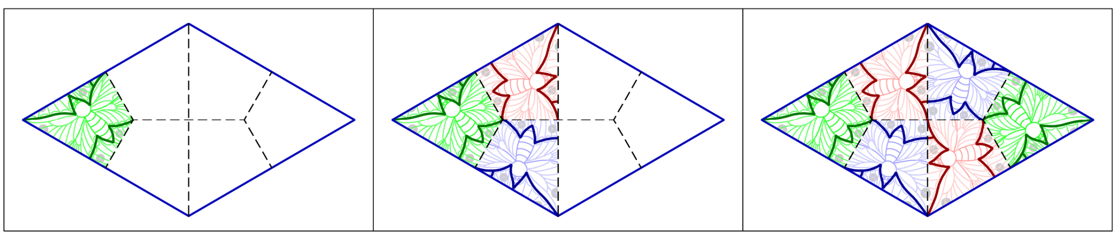
Εικόνα 1

Πέραν των μεταφορών και των στροφών που σημειώσαμε, δεν υπάρχουν άλλες ισομετρίες στην ομάδα συμμετρίας αυτού του σχηματισμού. Πρόκειται για την ομάδα $p6$, κατά τον επικρατούντα συμβολισμό της Διεθνούς Ένωσης Κρυσταλλογραφίας (International Union of Crystallography, IUC).



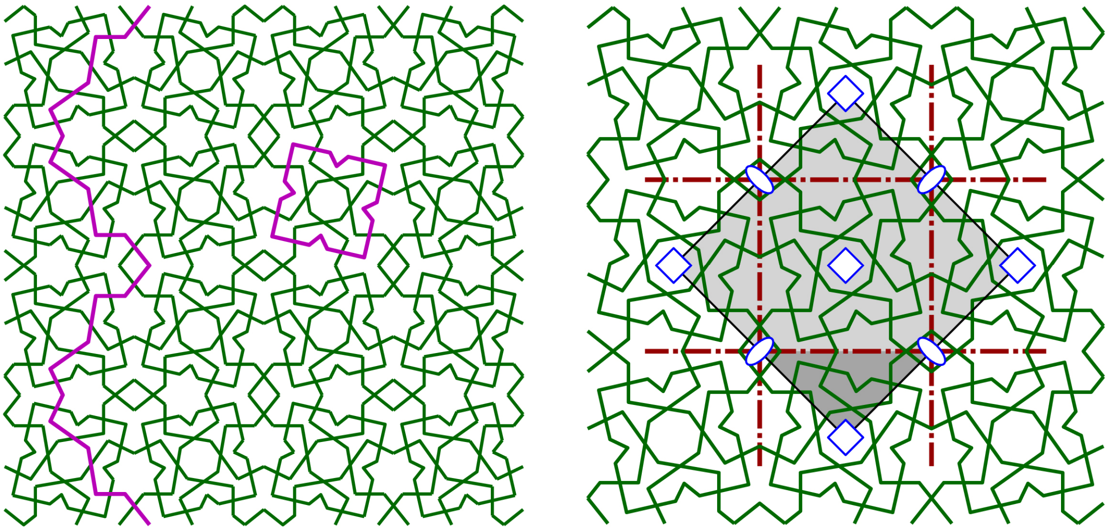
Εικόνα 2

Στην Εικόνα 3 παρατηρούμε τη διαδικασία παραγωγής του μοναδιαίου κυττάρου από την ασύμμετρη μονάδα του σχηματισμού. Οι στροφές της τελευταίας κατά γωνίες 120° και 240°, περί το κέντρο τάξης 3, παράγουν το ήμισυ του μοναδιαίου κυττάρου – τα αντίγραφα εμφανίζονται με διαφορετικό χρώμα, για λόγους ευκρίνειας. Η στροφή 180° περί το κέντρο του ρόμβου (κέντρο τάξης 2) παράγει το μοναδιαίο κύτταρο. Οι μεταφορές της ομάδας αναλαμβάνουν στη συνέχεια να αναπτύξουν το σχηματισμό στο επίπεδο.



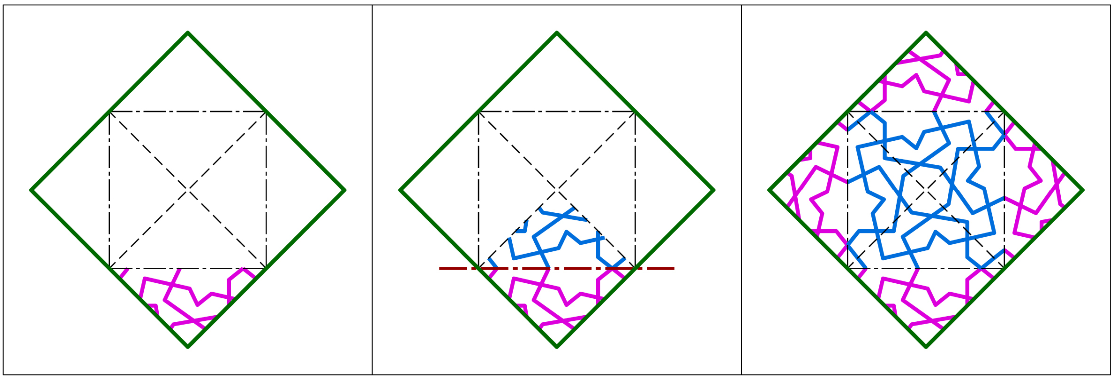
Εικόνα 3

Το δεύτερο θέμα είναι ένας αραβικός διακοσμητικός σχηματισμός (Εικόνα 4, αριστερά). Τον δανειστήκαμε από κλασικό βιβλίο του Jean Bourgoin (1879/1973:170) και τον ξανασχεδιάσαμε με ακρίβεια. Τον επιλέξαμε και για το ενδιαφέρον της ομάδας συμμετρίας του και για το γεγονός ότι είναι από τις σπάνιες περιπτώσεις συμμετρικών σχηματισμών στις οποίες εμπλέκεται το κανονικό επτάγωνο, ένα πολύγωνο το οποίο είναι γνωστό ότι δεν κατασκευάζεται γεωμετρικά.



Εικόνα 4

Στην Εικόνα 4 (δεξιά) παρατηρούμε το μοναδιαίο κύτταρο του σχηματισμού. Έχει τετράγωνο σχήμα, με κέντρα τάξης 4 στις κορυφές και στο κέντρο και με κέντρα τάξης 2 στα μέσα των πλευρών. Οι δύο θεμελιώδεις μεταφορές (δεν σημειώνονται ως διανύσματα στο σχήμα) ορίζονται από δύο διαδοχικές πλευρές του τετραγώνου. Εκτός των μεταφορών και των στροφών, η ομάδα συμμετρίας του σχηματισμού περιλαμβάνει και κατοπτρισμούς, οι *άξονες* των οποίων σημειώνονται με κόκκινες αξονικές γραμμές. Είναι αξιοπρόσεκτο το γεγονός, ότι οι άξονες δεν διέρχονται από τα 4 - κέντρα αλλά από τα 2 - κέντρα, μια σημαντική ιδιομορφία της ομάδας $p4g$ (ή $p4gm$, κατά τον πλήρη συμβολισμό της IUC), στην οποία ανήκει ο σχηματισμός.



Εικόνα 5

Στην ομάδα $p4g$ περιλαμβάνονται και ολισθαίνοντες κατοπτρισμοί. Οι *γραμμές ολίσθησης* των τελευταίων δεν σημειώνονται στην Εικόνα 4, ώστε το σχήμα να παραμείνει λιγότερο περίπλοκο και περισσότερο ευανάγνωστο, αλλά σημειώνονται στο Πίνακα 1 (εγγραφή 12, ομάδα $p4g$). Το έντονα σκιασμένο τμήμα του σχηματισμού αποτελεί την ασύμμετρη μονάδα, η οποία αποτελεί το 1/8 του μοναδιαίου κυττάρου.

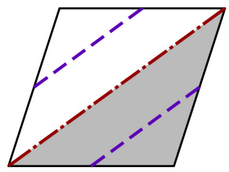
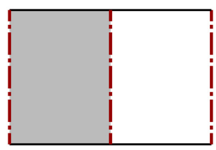
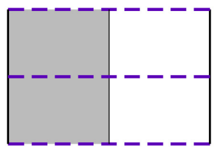
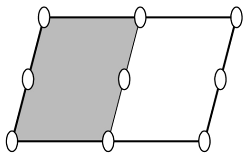
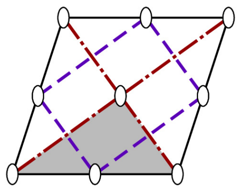
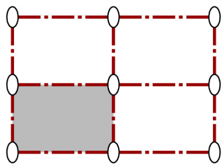
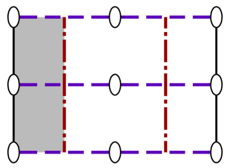
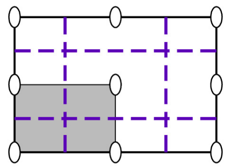
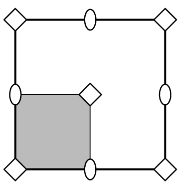
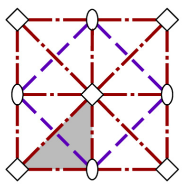
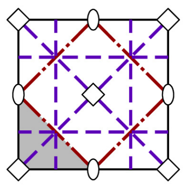
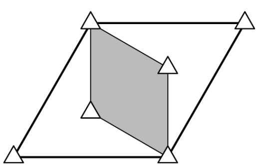
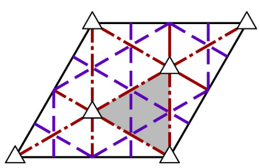
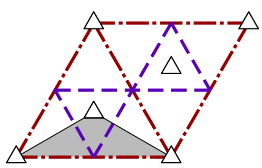
Στην Εικόνα 5 (αριστερά), βλέπουμε την ασύμμετρη μονάδα. Ο κατοπτρισμός, ως προς τον άξονα που σημειώνεται, παράγει το τέταρτο του μοναδιαίου κυττάρου (μέσον). Στη συνέχεια, οι στροφές κατά ακέραια πολλαπλάσια της ορθής γωνίας, περί το κέντρο του τετραγώνου (κέντρο τάξης 4), παράγει το μοναδιαίο κύτταρο στο σύνολό του (δεξιά) – και πάλι, τα αντίγραφα της ασύμμετρης μονάδας διαφοροποιούνται χρωματικά, για λόγους ευκρίνειας. Τέλος, οι μεταφορές της ομάδας αναπτύσσουν το σχηματισμό σε ολόκληρο το επίπεδο.

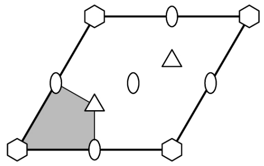
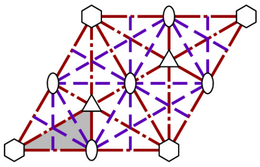
Σε μια περισσότερο «μακροσκοπική» θεώρηση, διαπιστώνουμε ότι ολόκληρος ο σχηματισμός παράγεται από τις δύο χρωματικά διαφοροποιημένες πολυγωνικές γραμμές της Εικόνας 4 (αριστερά), αν αυτές υποβληθούν στη δράση των στροφών, μεταφορών και κατοπτρισμών της ομάδας συμμετρίας του. Η πρώτη γραμμή είναι ανοικτή και συντίθεται από μια απείρως επαναλαμβανόμενη μονάδα, αποτελούμενη από 10 ευθύγραμμα τμήματα. Η δεύτερη γραμμή είναι κλειστή και αποτελείται από 16 ευθύγραμμα τμήματα, σε τέσσερις μονάδες των τεσσάρων τμημάτων. Οι αλληλοτομίες δύο κατοπτρικών στιγμιοτύπων της δεύτερης γραμμής, με τρία στιγμιότυπα της πρώτης, δύο εκ των οποίων είναι κατοπτρικά, δημιουργούν τα κανονικά αστεροειδή επτάγωνα, τα οποία χαρακτηρίζουν αυτό το σχηματισμό.

4. Οι Επίπεδες Κρυσταλλογραφικές Ομάδες

Στον Πίνακα 1, παραθέτουμε το μοναδιαίο κύτταρο, καθώς και την ασύμμετρη μονάδα (η σκιασμένη περιοχή), για κάθε μία από τις 17 ομάδες ταπετσαρίας. Το μοναδιαίο κύτταρο για τις ομάδες $p1$ και $p2$ είναι τυχόν παραλληλόγραμμο. Για τις ομάδες pm, pg, pmm, pmg και pgg είναι τυχόν ορθογώνιο. Για τις ομάδες cm και cmm είναι τυχών ρόμβος. Για τις ομάδες $p4$, $p4m$ και $p4g$ είναι τετράγωνο. Τέλος για τις ομάδες $p3$, $p3m1$, $p31m$, $p6$ και $p6m$ είναι ρόμβος με εσωτερικές γωνίες μέτρων 60° και 120°.

Οι άξονες κατοπτρικής συμμετρίας σημειώνονται με κόκκινες αξονικές γραμμές. Για τους ολισθαίνοντες κατοπτρισμούς, οι γραμμές ολίσθησης σημειώνονται με μωβ διακεκομμένες γραμμές. Τα κέντρα στροφικής συμμετρίας ακολουθούν το συμβολισμό που σημειώνεται στην τελευταία εγγραφή του Πίνακα.

Πίνακας 1: Οι 17 Επίπεδες Κρυσταλλογραφικές Ομάδες					
1 $p1$		**2** cm ή $c1m1$		**3** pm ή $p1m1$	
4 pg ή $p1g1$		**5** $p2$ ή $p211$		**6** cmm ή $c2mm$	
7 pmm ή $p2mm$		**8** pmg ή $p2mg$		**9** pgg ή $p2gg$	
10 $p4$		**11** $p4m$ ή $p4mm$		**12** $p4g$ ή $p4gm$	
13 $p3$		**14** $p3m1$		**15** $p31m$	

16 *p6*		**17** *p6m* ή *p6mm*		ΥΠΟΜΝΗΜΑ Κέντρο τάξης 2 Κέντρο τάξης 3 Κέντρο τάξης 4 Κέντρο τάξης 6

Για τις ομάδες ταπετσαρίας, χρησιμοποιείται συνήθως ο συντομογραφικός συμβολισμός της IUC, αντί του πλήρους. Στον Πίνακα πάντως παραθέτουμε και τον πλήρη συμβολισμό, όταν αυτός διαφέρει από τον συντομογραφικό.

Ο Πίνακας 1 είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για την αναγνώριση του είδους της συμμετρίας, καθώς και για την εύρεση του μοναδιαίου κυττάρου και της ασύμμετρης μονάδας κάθε επίπεδου συμμετρικού σχηματισμού, του οποίου η ομάδα συμμετρίας είναι ομάδα ταπετσαρίας.

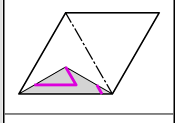
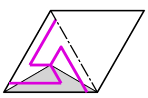
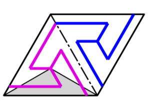
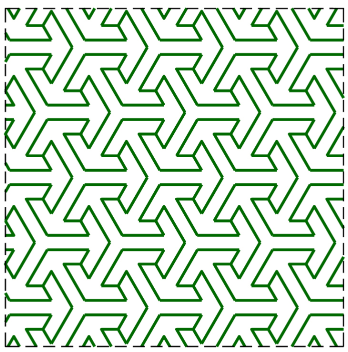
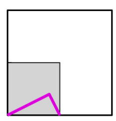
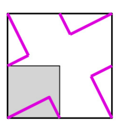
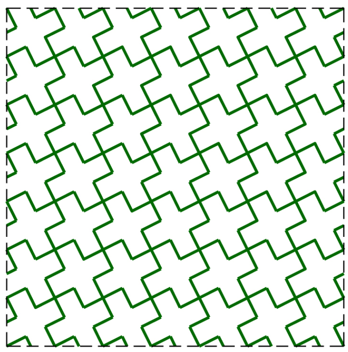
5. Η Εφαρμογή SYMMETRY

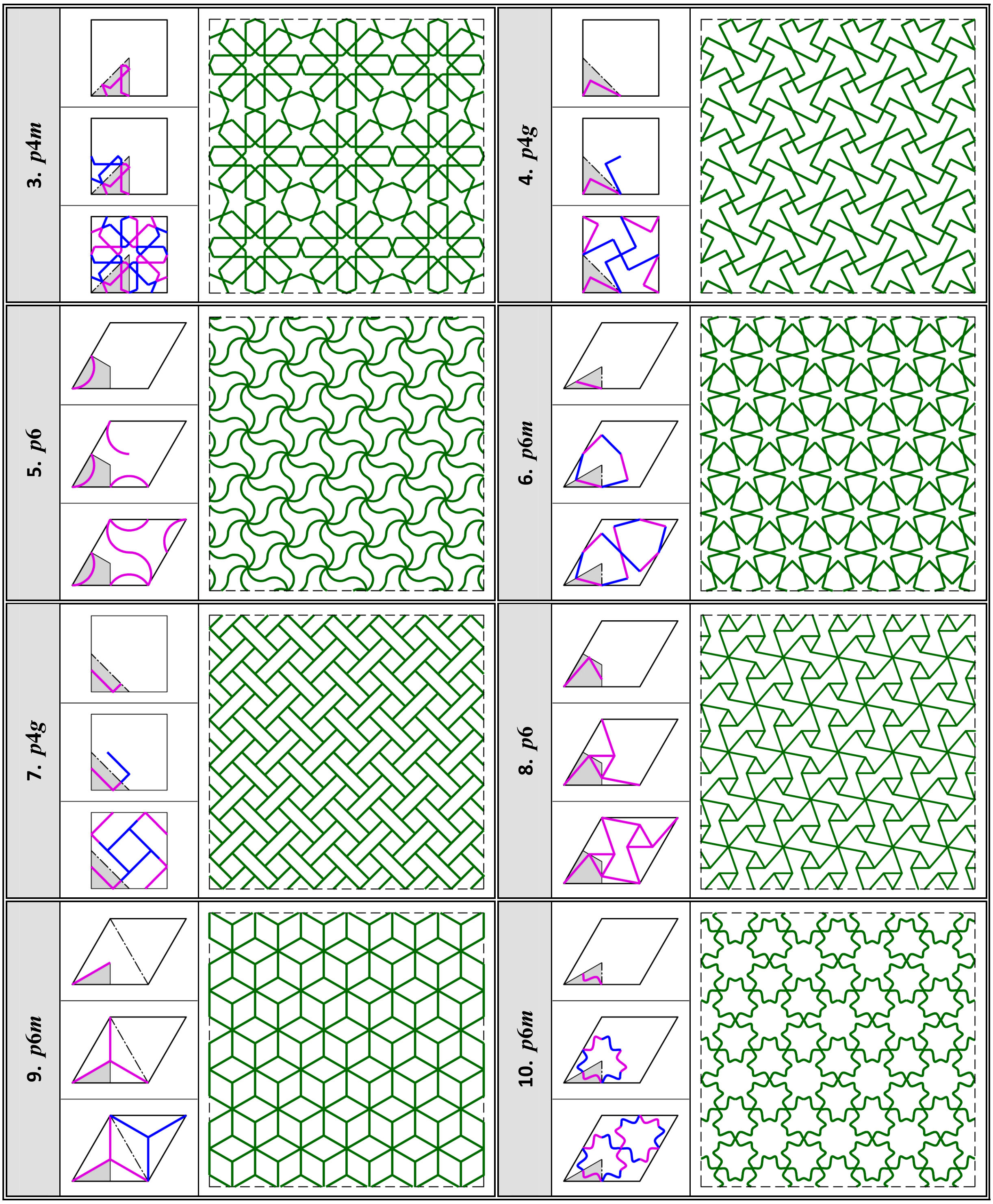
Η ερευνητική μας ομάδα έχει αναπτύξει την εφαρμογή λογισμικού SYMMETRY, για έρευνα και πειραματισμό με συμμετρικούς σχηματισμούς, των οποίων η ομάδα συμμετρίας είναι (προς το παρόν) ομάδα ταπετσαρίας. Η εφαρμογή έχει γραφτεί στη γλώσσα Visual LISP για το περιβάλλον του AutoCAD και τα αντικείμενά της είναι πλήρως επεξεργάσιμα και αξιοποιήσιμα στο AutoCAD.

Η εφαρμογή «φορτώνεται» στο AutoCAD (εντολή APPLOAD) και δημιουργεί μια νέα εντολή, την SYMMETRY. Όταν κληθεί η εντολή αυτή, ο χρήστης προτρέπεται να επιλέξει μία από τις 17 ομάδες. Για κάθε ομάδα, η εφαρμογή διαθέτει τρεις, προς το παρόν, έτοιμες αφετηρίες, αποτελούμενες από μία ή από ελάχιστες σχεδιαστικές οντότητες του AutoCAD, οι οποίες συνθέτουν την ασύμμετρη μονάδα ενός σχηματισμού. Ο χρήστης επιλέγει μία από τις έτοιμες αφετηρίες και η εφαρμογή την υποβάλλει στους μετασχηματισμούς της ομάδας και παράγει το μοναδιαίο κύτταρο και στη συνέχεια το σχηματισμό, σε όση έκταση ζητηθεί.

Από τα περισσότερο ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά της εφαρμογής είναι η δυνατότητα που παρέχει στο χρήστη να πειραματιστεί, σχεδιάζοντας τη δική του ασύμμετρη μονάδα. Του παρέχει το σχήμα του μοναδιαίου κυττάρου και το περίγραμμα της ασύμμετρης μονάδας και τον προτρέπει να σχεδιάσει κάτι στο εσωτερικό ή επί των ορίων αυτού του περιγράμματος. Είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν όλες οι σχεδιαστικές οντότητες του AutoCAD. Όταν ο χρήστης καλέσει εκ νέου την SYMMETRY, οι σχεδιασμένες οντότητες αναγνωρίζονται από την εφαρμογή και υποβάλλονται στη δράση των μετασχηματισμών της ομάδας, ώστε να δημιουργηθεί το μοναδιαίο κύτταρο και στη συνέχεια ο σχηματισμός, σε όση έκταση ζητηθεί. Το αποτέλεσμα συνήθως εκπλήσσει και έχει συχνά ιδιαίτερο αισθητικό ενδιαφέρον.

Στον Πίνακα 2, παρατίθενται ενδεικτικά 10 περιπτώσεις δημιουργίας ενός συμμετρικού σχηματισμού, με αφετηρία την αποτελούμενη από ελάχιστες σχεδιαστικές οντότητες ασύμμετρη μονάδα. Τα 6 πρώτα παραδείγματα εκκινούν από προκαθορισμένες αφετηρίες και τα υπόλοιπα 4 από σχέδια του χρήστη. Στη στήλη αριστερά εκάστου σχηματισμού παρατίθενται χαρακτηριστικά στάδια της διαδικασίας δημιουργίας του, με πρώτο στάδιο το σχήμα της ασύμμετρης μονάδας και τελευταίο το σχήμα του μοναδιαίου κυττάρου. Τα αρχικά στάδια δεν είναι σχεδιασμένα στην ίδια κλίμακα με το τελικό αποτέλεσμα.

Πίνακας 2: Δείγματα χρήσης της εφαρμογής SYMMETRY					
1. *p31m*	  		**2. *p4***	 	



Τα παραδείγματα 1, 3, 4, 5 και 6 είναι γνωστοί αραβικοί διακοσμητικοί σχηματισμοί. Το παράδειγμα 2 είναι γνωστό από τη βυζαντινή αγιογραφία. Τέλος το παράδειγμα 9 είναι μια πολύ γνωστή *μονόεδρη πλακόστρωση* (monohedral tessellation).

6. Μελλοντική ανάπτυξη

Η ερευνητική μας ομάδα σκοπεύει να συνεχίσει την ανάπτυξη της εφαρμογής SYMMETRY, αν μη τι άλλο, επειδή αντλεί αισθητική απόλαυση προγραμματίζοντας τη συμμετρία και επισκοπώντας τα αποτελέσματα της εργασίας της. Για το άμεσο μέλλον, έχουμε θέσει σε προτεραιότητα δύο στόχους:

α. Την αναβάθμιση του interface. Ο διάλογος με τον χρήστη θα γίνεται μέσω πλαισίων διαλόγου και θα είναι περισσότερο ευέλικτος. Μέχρι στιγμής ο διάλογος γίνεται στη γραμμή εντολών του AutoCAD.

β. Η εφαρμογή θα χειρίζεται όλες τις ομάδες ισομετρικών μετασχηματισμών του επιπέδου, περιλαμβανομένων και των ομάδων ρόδακα και διακοσμητικής ταινίας.

Ο χειρισμός των ομάδων ισομετρικών μετασχηματισμών του χώρου των τριών διαστάσεων, γνωστών ως *χωρικών ομάδων* (space groups – χαρακτηρίζουν τις δομές των κρυστάλλων), είναι ένα πολύ δυσκολότερο εγχείρημα, καθώς, μεταξύ άλλων δυσχερειών, αφορά ένα πλήθος 230 ομάδων. Είναι στις προθέσεις μας, αλλά προϋποθέτει διαφορετικούς όρους εργασίας, μεταξύ των οποίων τη διεύρυνση της ερευνητικής μας ομάδας.

Βιβλιογραφία

Armstrong, M.A. (2002). *Ομάδες και Συμμετρία*. Μτφρ. Νταής, Δ. Αθήνα: Leader Books.

Beyer, J. (1999). *Designing Tessellations: The Secrets of Interlocking Patterns*. Chicago: Contemporary Books.

Bigalke, H.G. & Wippermann, H. (1994). *Reguläre Parkettierungen: Mit Anwendungen in Kristallographie, Industrie, Baugewerbe, Design und Kunst*. Mannheim: Wissenschaftsverlag.

Bourgoin, J. (1973). *Arabic Geometrical Pattern & Design*. New York: Dover (Πρώτη έκδοση 1879).

Broug, E. (2008). *Islamic Geometric Patterns*. London: Thames & Hudson.

Coxeter, H.S.M. (1989). *Introduction to Geometry* (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons.

Day, L.F. (1999). *Pattern Design*. New York: Dover (Πρώτη έκδοση 1903).

Fejes Tóth, L. (1964). *Regular Figures*. Oxford: Pergamon Press.

Hattstein, M. & Delius, P. (Eds.). (2004). *Islam: Art and Architecture*. Königswinter: Könemann.

Higgins, P. (2002). *Mathematics for the Imagination*. New York: Oxford University Press.

Hilbert, D. & Cohn-Vossen, S. (1999). *Geometry and the Imagination*. Providence, Rhode Island: AMS (American Mathematical Society), Chelsea (Πρώτη έκδοση 1932, στη γερμανική γλώσσα).

Jones, O. (2006). *The Grammar of Ornament*. Paris: L' Aventurine (Πρώτη έκδοση 1856).

Lockwood, E.H., & Macmillan, R.H. (1978). *Geometric Symmetry*. London: Cambridge University Press.

MacGillavry, C.H. (1976). *Symmetry Aspects of M.C. Escher's Periodic Drawings* (2nd ed.). Utrecht: Bohn, Scheltema & Holkema.

Martin, G.E. (1982). *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry*. New York: Springer.

Schattschneider, D. (1978). The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation. *The American Mathematical Monthly*, 85 (6), 439-450.

Schattschneider, D. (2004). *M.C. Escher: Visions of Symmetry* (2nd ed.). London: Thames & Hudson.

Weyl, H. (1980). *Symmetry*. Princeton: Princeton University Press.