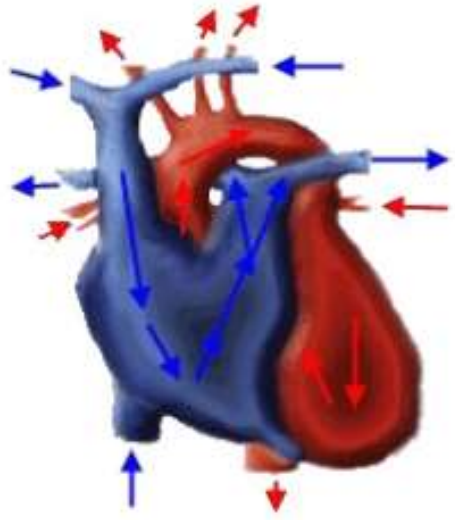
ΡΕΥΣΤΑ ΙΙ

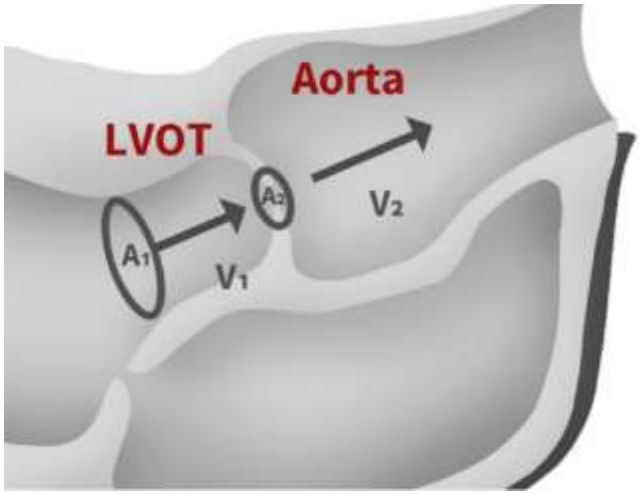
Αρχή της συνέχειας
Εξίσωση Μπερνούλι
Εφαρμογές

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Βασίζεται στον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικης

- Η μάζα δεν μπορεί να δημιουργηθεί ούτε να καταστραφεί
- Η ποσότητα της μάζας που εισέρχεται στο σύστημα (όγκος ελέγχου) ισούται με την ποσότητα της μαζας που εξέρχεται από το σύστημα

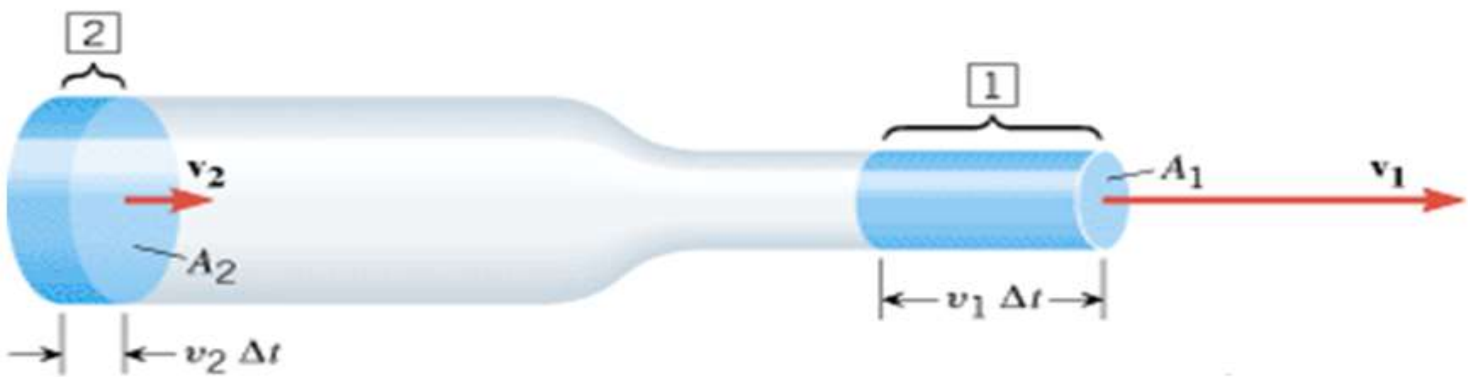




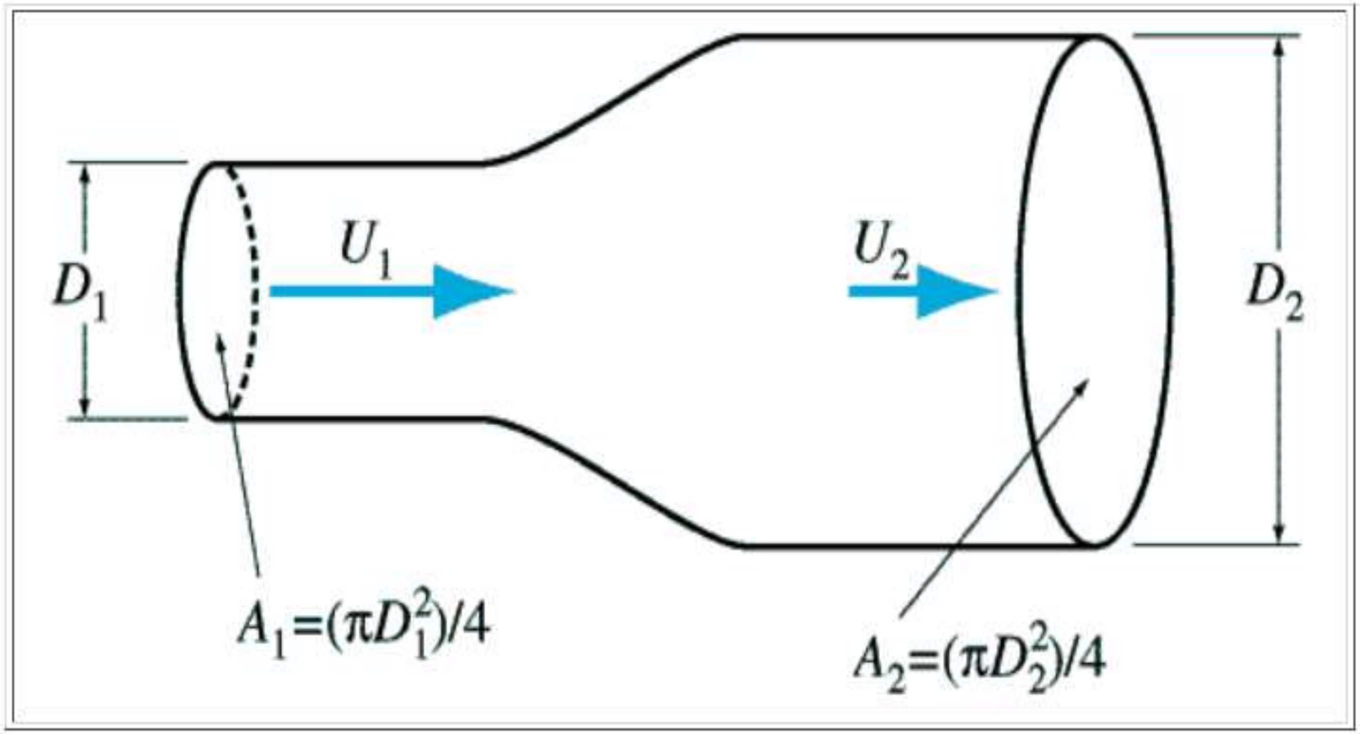
ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

**για παράδειγμα, για να ποτίσουμε,
κλείνουμε με τον αντίχειρα λίγο την έξοδο
του λάστιχου ποτίσματος
η διατομή του μικραίνει και η ταχύτητα εξόδου
αναγκαστικά μεγαλώνει
αποτέλεσμα είναι η φλέβα να φτάνει μακρύτερα**

$$Q = A_1V_1 = A_2V_2$$



ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ



Παράδειγμα: Το νερό τρέχει από κύριο αγωγό ύδρευσης επιφάνειας διατομής 0.4 m^2 με ταχύτητα 3 m/s. Υπολογίστε την παροχή Q και την ταχύτητα του νερού όταν το νερό μπεί σε αγωγό διατομής 0.3 m^2

ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΠΕΡΝΟΥΛΙ

- Η εξίσωση Μπερνούλι, ή εξίσωση διατήρησης της ενέργειας, εκφράζει ακριβώς το γεγονός ότι η υφιστάμενη ποσότητα ενέργειας μιας μονάδας μάζας δεν καταστρέφεται ούτε αυξάνεται. Κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής η ενέργεια ενός υγρού διατηρείται.

- Η εξίσωση αυτή απόδίδεται στον Δανιήλ Μπερνούλι, παρόλο που κατά πάσα πιθανότητα η οριστική της μορφή οφείλεται στον Λαγκράντζ.

- Η εξίσωση Μπερνούλι μαζί με την αρχή της συνέχειας (αρχή διατήρησης της μάζας) χρησιμεύει στην επίλυση πολλών σημαντικών και διαφορετικών προβλημάτων στην μηχανική των ρευστών.

- Η εξίσωση εφαρμόζεται υπό τις εξής προϋποθέσεις:
  1. Ιδεατό υγρό (χωρίς τριβές)
  2. Ασυμπίεστο και ομογενές ρευστό
  3. Μόνιμη ροή (=ροή με σταθερή παροχή)

ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΠΕΡΝΟΥΛΙ

$$\frac{u^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = \textbf{σταθερό}$$

Φορτίο ταχύτητας: $\frac{u^2}{2g} \overset{\text{dim}}{=} \frac{L^2}{T^2}\frac{T^2}{L} = L$

Φορτίο βαρύτητας ή υψομετρικό φορτίο: $z \overset{\text{dim}}{=} L$

Φορτίο πίεσης: $\frac{p}{\rho g} \overset{\text{dim}}{=} \frac{ML}{T^2L^2}\frac{L^3}{M}\frac{T^2}{L} = L$

Στην παραπάνω εξίσωση κάθε όρος έχει διαστάσεις μήκους [L].

1. το **p/ρg** λέγεται **ύψος πιέσεως,**
2. το **z υψομετρικό ύψος** και
3. το **V^2/2g** λέγεται **ύψος κινητικής ενέργειας**

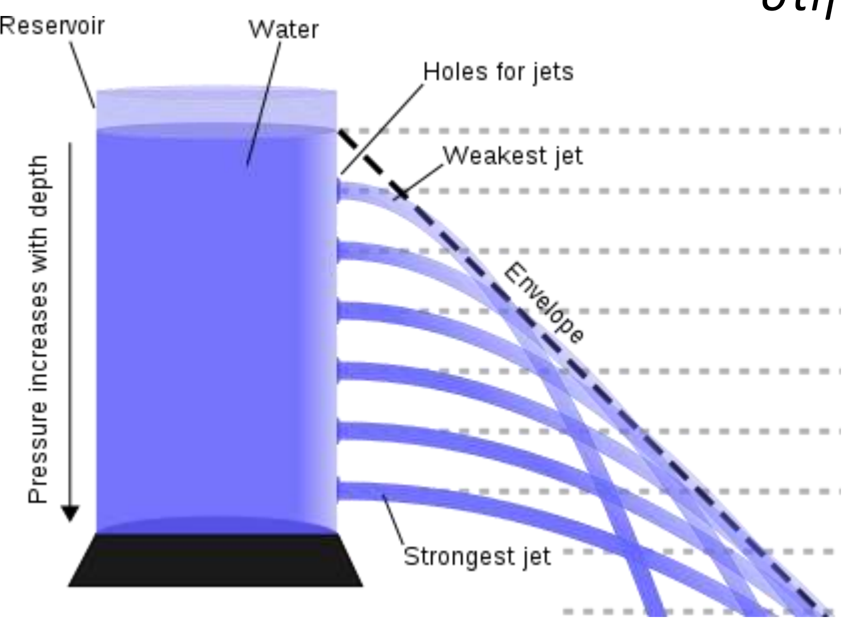
το άθροισμα τους αποτελεί το **ολικό ύψος** ή **ολικό φορτίο.**

Η ενέργεια ή έργο όπως είδαμε είναι απόσταση (μήκος) επί δύναμη. Επομένως εάν πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο στην παραπάνω έκφραση επί ρg (ειδικό βάρος του υγρού, δηλαδή το βάρος μιας μονάδας όγκου) παίρνουμε διαστάσεις ενέργειας (Joule).

ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΤΟΡΙΚΕΛΙ

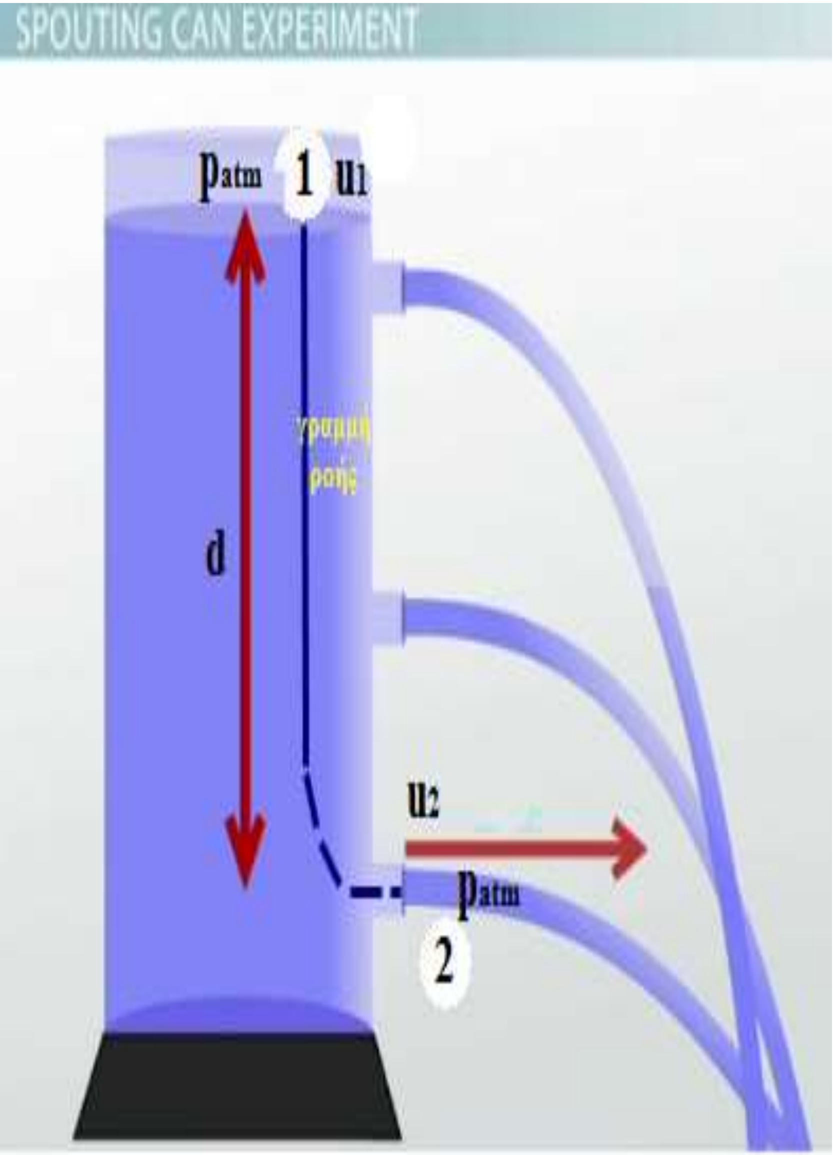
“Οι ταχύτητες του νερού που εξέρχονται από μιά διάτρητη δεξαμενή είναι ανάλογες με τις τετραγωνικές ρίζες των αποστάσεων των τρυπών από την επιφάνεια του νερού

Η εξερχόμενη φλέβα έχει την ίδια ενώθηση (= ενέργεια) με εκείνη ενός σώματος που πέφτει από ένα ύψος ίσο με το βάθος του νερού στη δεξαμενή



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

«Οι ταχύτητες του νερού που εξέρχονται από μιά διάτρητη δεξαμενή είναι ανάλογες με τις τετραγωνικές ρίζες των αποστάσεων των τρυπών από την επιφάνεια του νερού»



Επειδή το ολικό φορτίο είναι σταθερό, το άθροισμα των φορτίων της ταχύτητας, του υψόμετρου και της πίεσης θα είναι ίδιο σε κάθε σημείο πάνω στην γραμμή ροής.
Με την χρήση δεικτών για να δείξουμε τα σημεία 1 και 2, η εξίσωση Bernoulli μπορεί να γραφτεί :

$$\frac{u_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{u_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$

Εφόσον η u_1 είναι πολύ μικρότερη από την u_2 ($u_1 << u_2$), μπορούμε να την θεωρήσουμε μηδενική. Η πίεση στην επιφάνεια θα είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση και επίσης ατμοσφαιρική θα είναι και η πίεση στην έξοδο του νερού από την οπή, στο σημείο 2. Η μικρή διαφορά στην τιμή της ατμοσφαιρικής πίεσης στα σημεία 1 και 2 μπορεί να αγνοηθεί. Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε

$$z_1 + \frac{p_{\text{atmos}}}{\rho g} = \frac{u_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_{\text{atmos}}}{\rho g} \quad \text{ή} \quad \frac{u_2^2}{2g} = z_1 - z_2$$

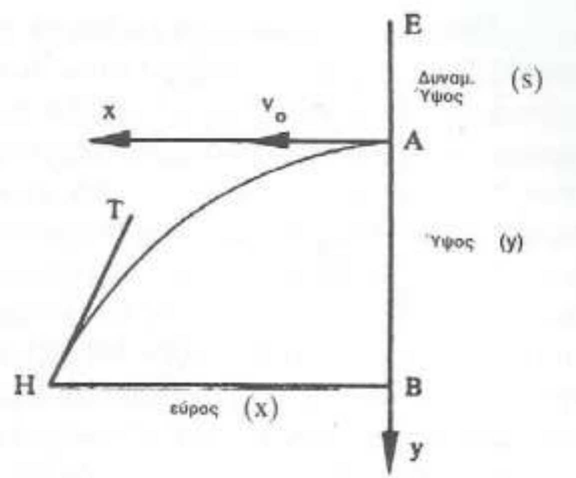
Αν θέσουμε $d = z_1 - z_2$ τότε $u_2 = (2gd)^{1/2}$

ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΤΟΡΙΚΕΛΙ

Ερώτηση κρίσης και σκέψης

Πώς μπορούσε ο Τορικέλι να μετρήσει τις ταχύτητες του νερού κατά την έξοδό του από την οπή?

Τώρα, η υπόθεση ότι σε οριζόντια κίνηση οι διανυόμενες αποστάσεις είναι ανάλογες του χρόνου, και στην κατακόρυφη, ανάλογες του τετραγώνου του χρόνου, οδηγεί αμέσως στο συμπέρασμα ότι η προκύπτουσα τροχιά είναι παραβολική. Πράγματι, χρησιμοποιώντας αλγεβρικούς συμβολισμούς και καρτεσιανές συντεταγμένες (σχήμα 24) - αγνώστων και των δύο στο Γαλιλαίο - και καλώντας v_0 την αρχική ταχύτητα που προσδίδεται στο βλήμα στην οριζόντια κατεύθυνση, x το "εύρος" της βολής, μετρούμενο στη στάθμη του ορίζοντα ΒΗ, και y το "ύψος" του όπλου, έχουμε



Σχήμα 24

$$x = v_0 t\,; \qquad y = g t^2/2$$

όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

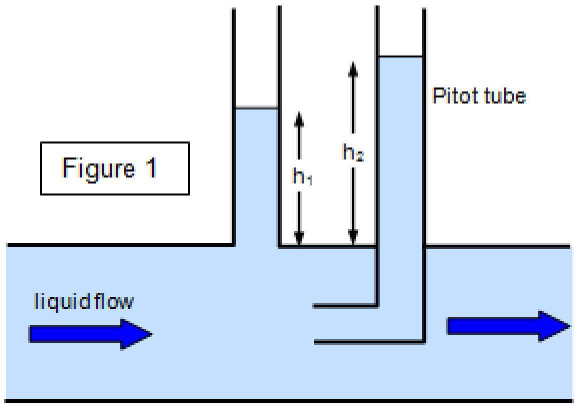
Με απαλοιφή του t, προκύπτει η εξίσωση

$$y = g x^2 / 2 v_0^2 \qquad (1)$$

που παριστάνει ακριβώς μια παραβολή με κατακόρυφο άξονα και την κορυφή στο Α.

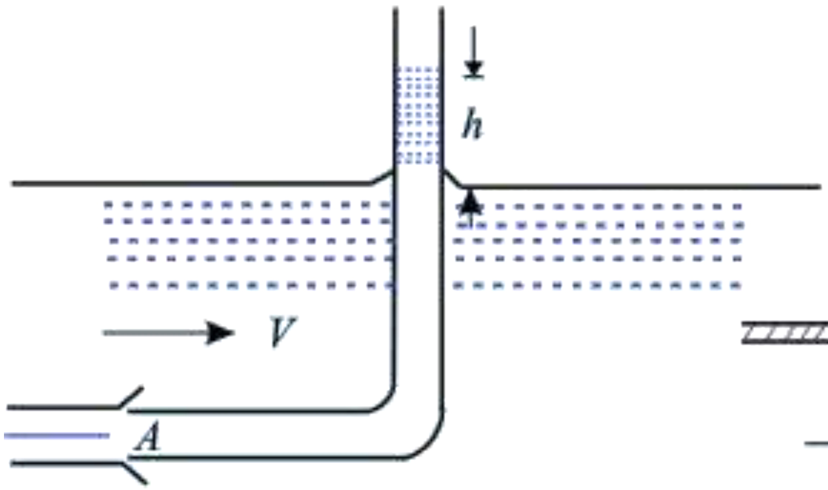
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ - ΣΩΛΗΝΑΣ ΠΙΤΟ

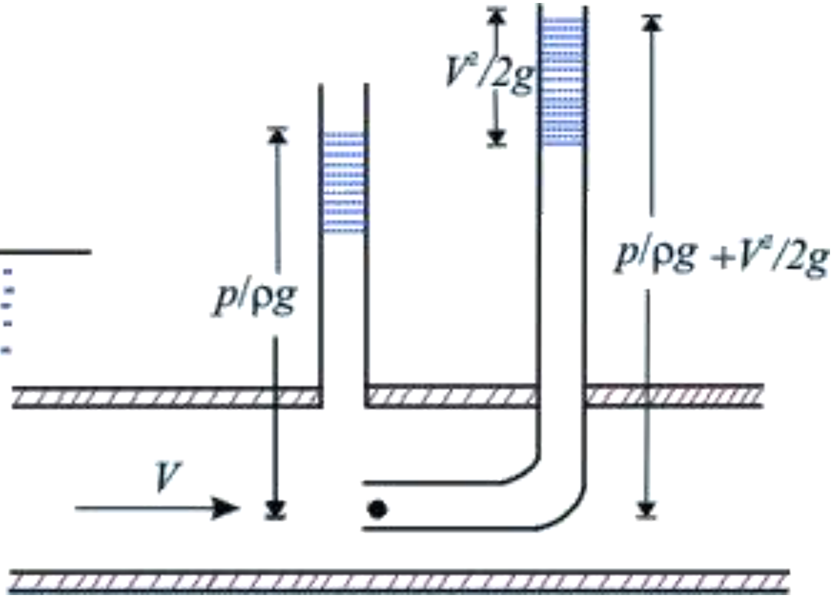
Ο Pitot (1732) κατασκεύασε την απλή αυτή συσκευή με σκοπό τη μέτρηση της ταχύτητας του νερού στα ποτάμια. Μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί και σε κλειστούς αγωγούς.



Στο διπλανό σχήμα το h_1 είναι η στατική πίεση ($p/\rho g$) ενώ το h_2 είναι ο όρος $p/\rho g + u^2/2g$

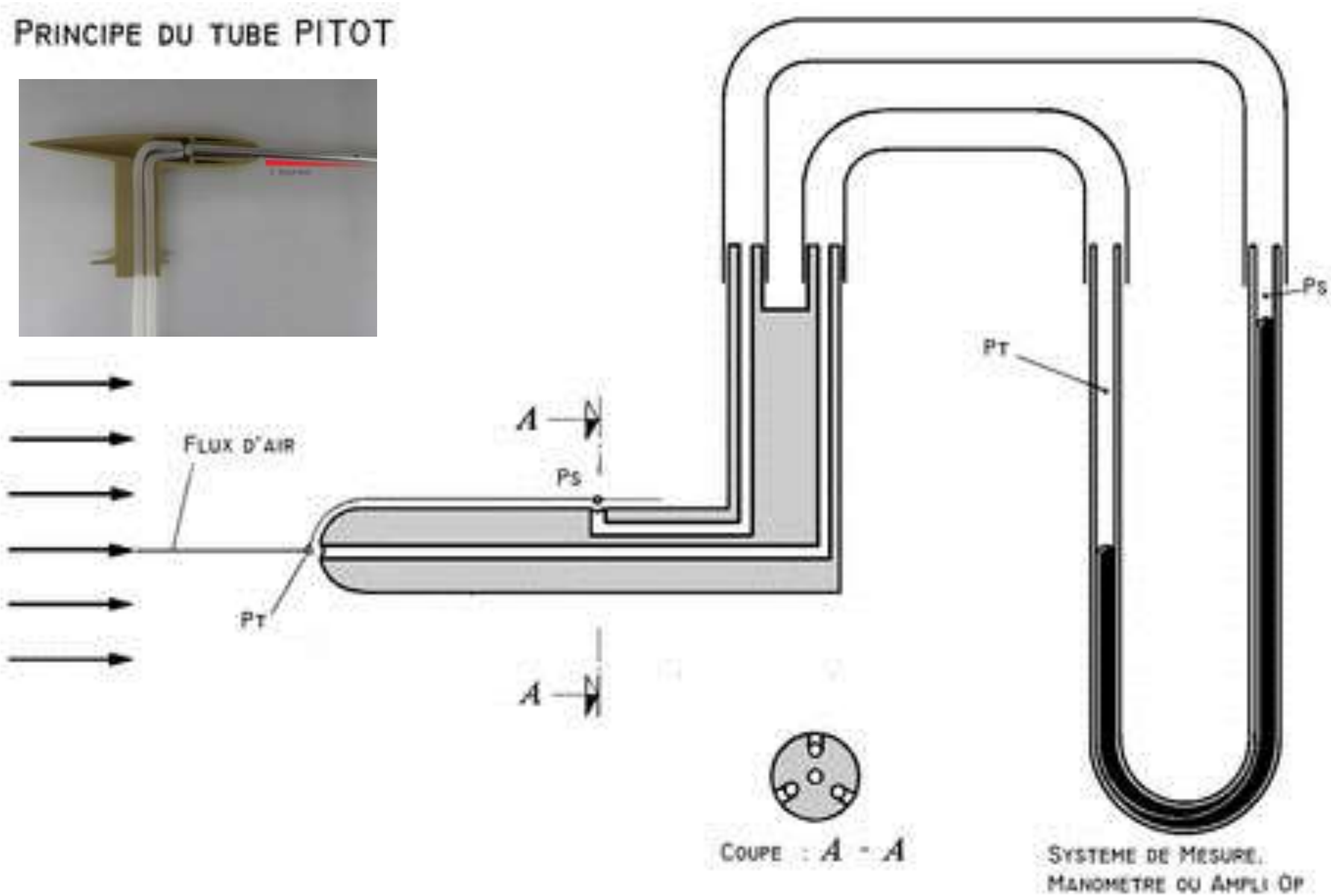
Η διαφορά τους επομένως, Δh, είναι ο όρος $u^2/2g$ (δες κάτω δεξιά σχήμα).



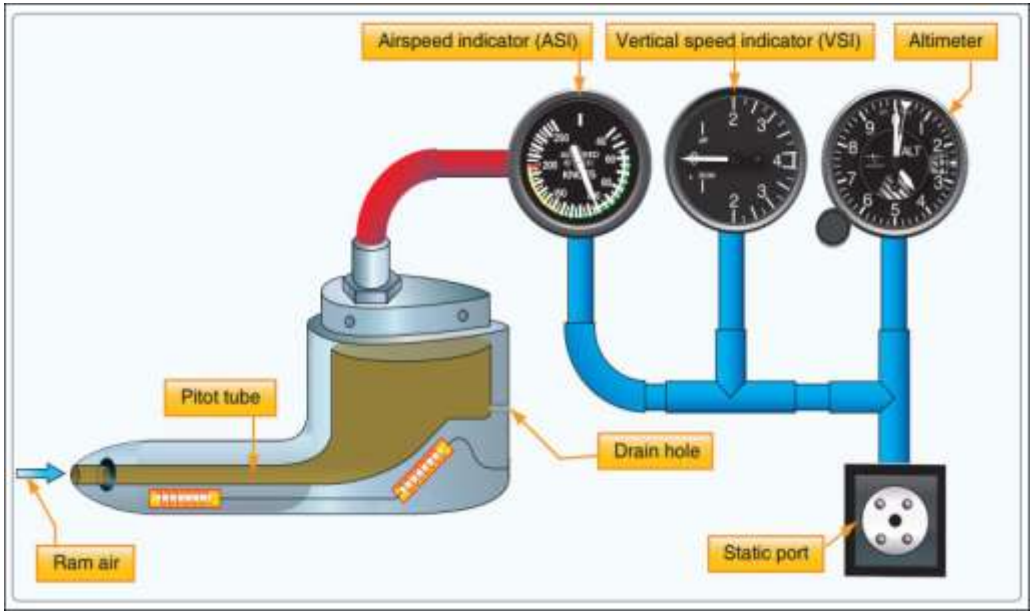


ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ – ΣΩΛΗΝΑΣ ΠΙΤΟ

Σωλήνας Pitot όπως μετασκευάστηκε από τον Prandtl
Στο πλάι υπάρχει τρυπούλα για την στατική πίεση.

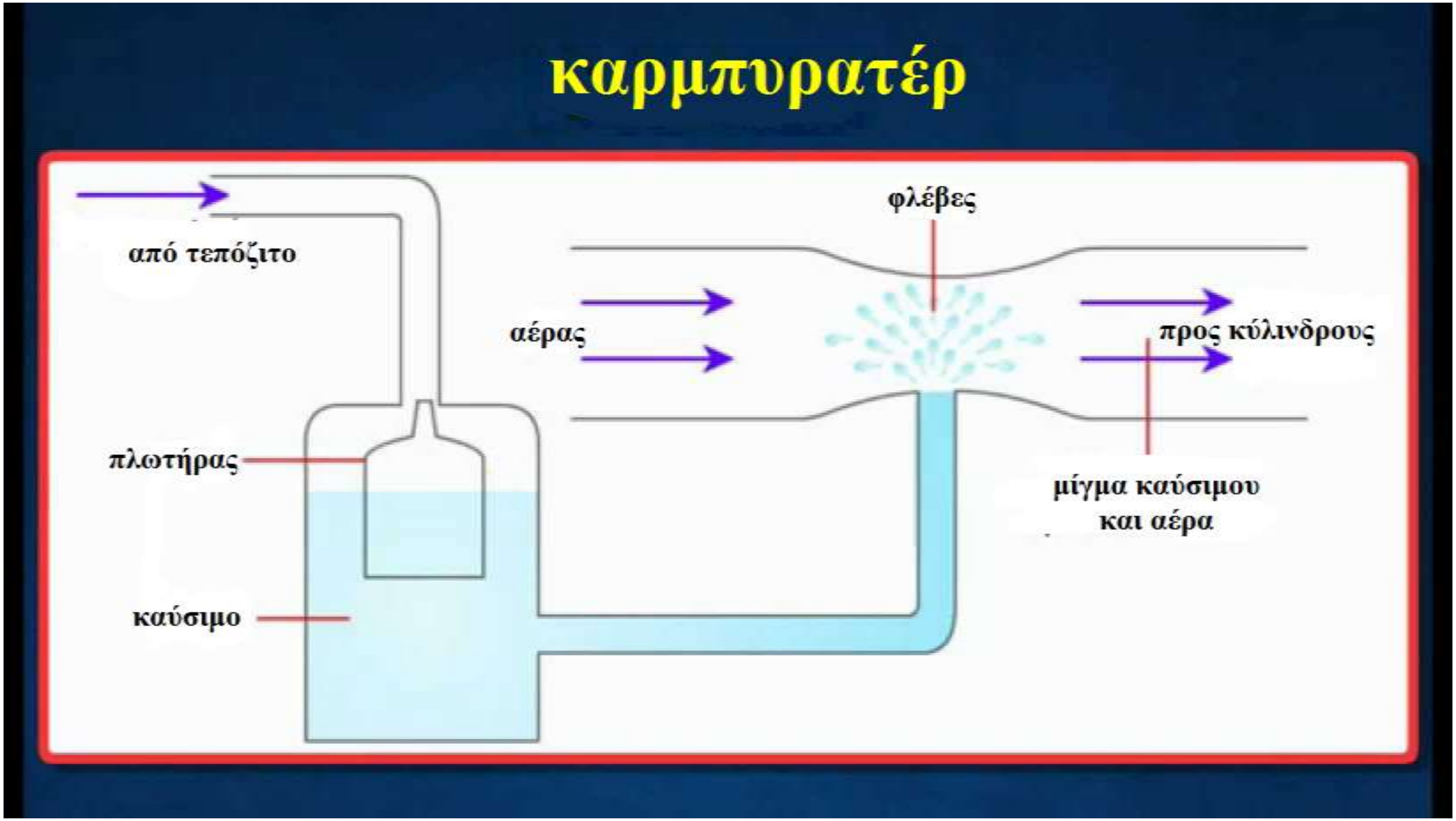


ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ - ΣΩΛΗΝΑΣ ΠΙΤΟ

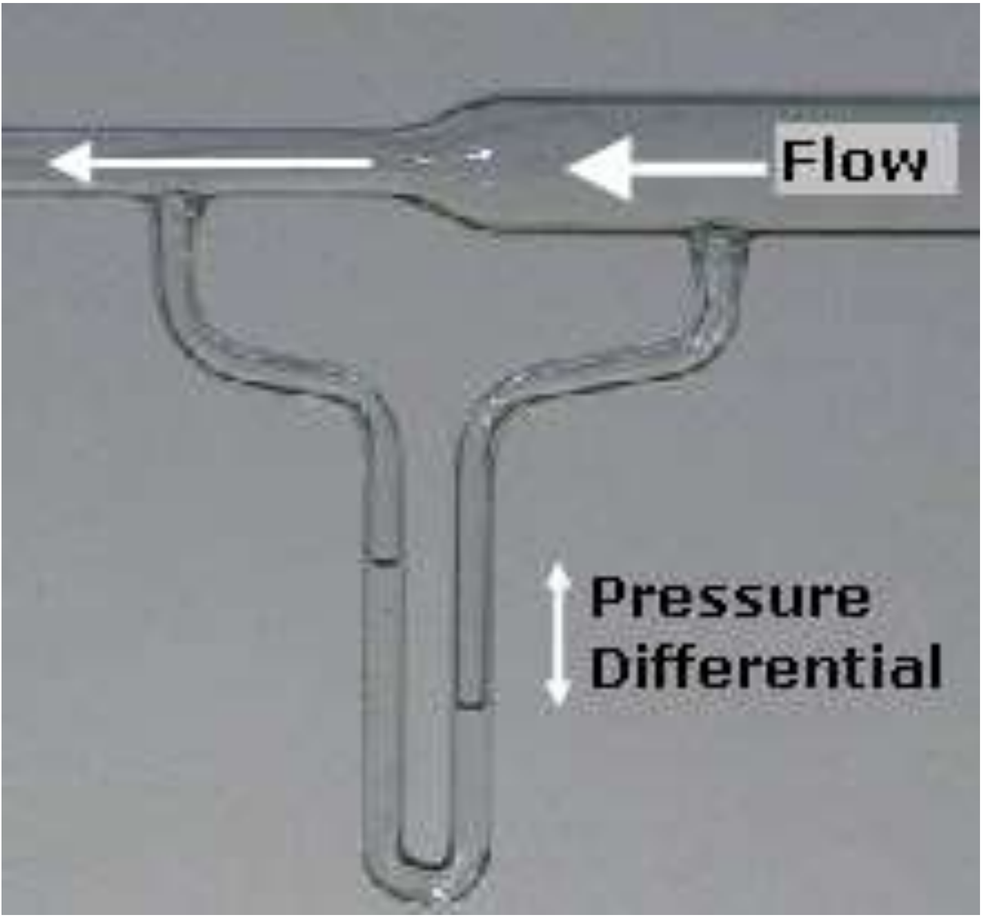


Στα αεροπλάνα σήμερα ο σωλήνας Πιτό χρησιμοποιείται για την μέτρηση της ταχύτητας αλλά και, μέσω της στατικής πίεσης (ατμοσφαιρικής),και σαν αλτίμετρο.
Ο σωλήνας Πιτο χρησιμοποιείται κυρίως στα αέρια.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ- ΚΑΡΜΠΥΡΑΤΕΡ



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ- ΜΕΤΡΗΤΗΣ VENTURI



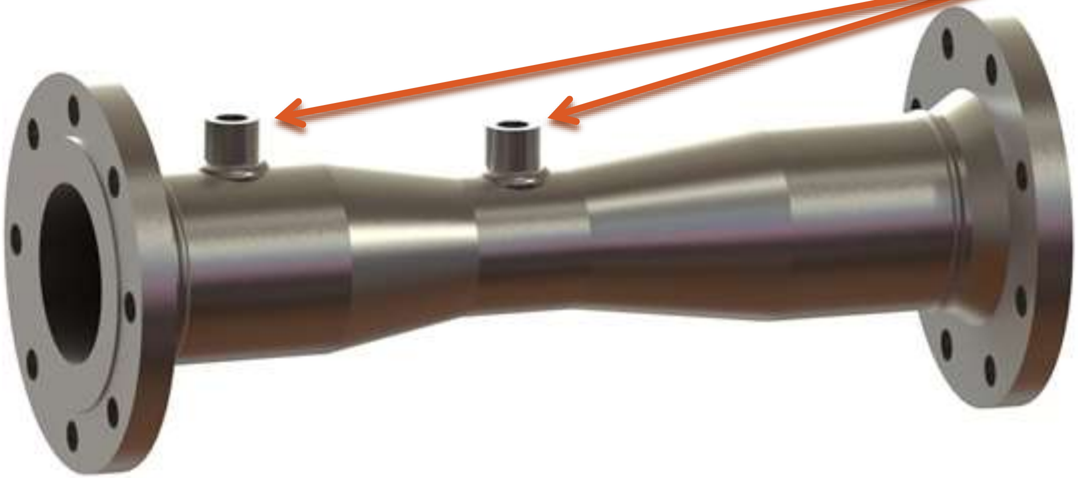
Άλλη μια συσκευή για τη μέτρηση των ταχυτήτων των υγρών.

Καθώς το υγρό μπαίνει στον μικρότερο σωλήνα η ταχύτητα αυξάνεται ενώ μειώνεται η πίεση.

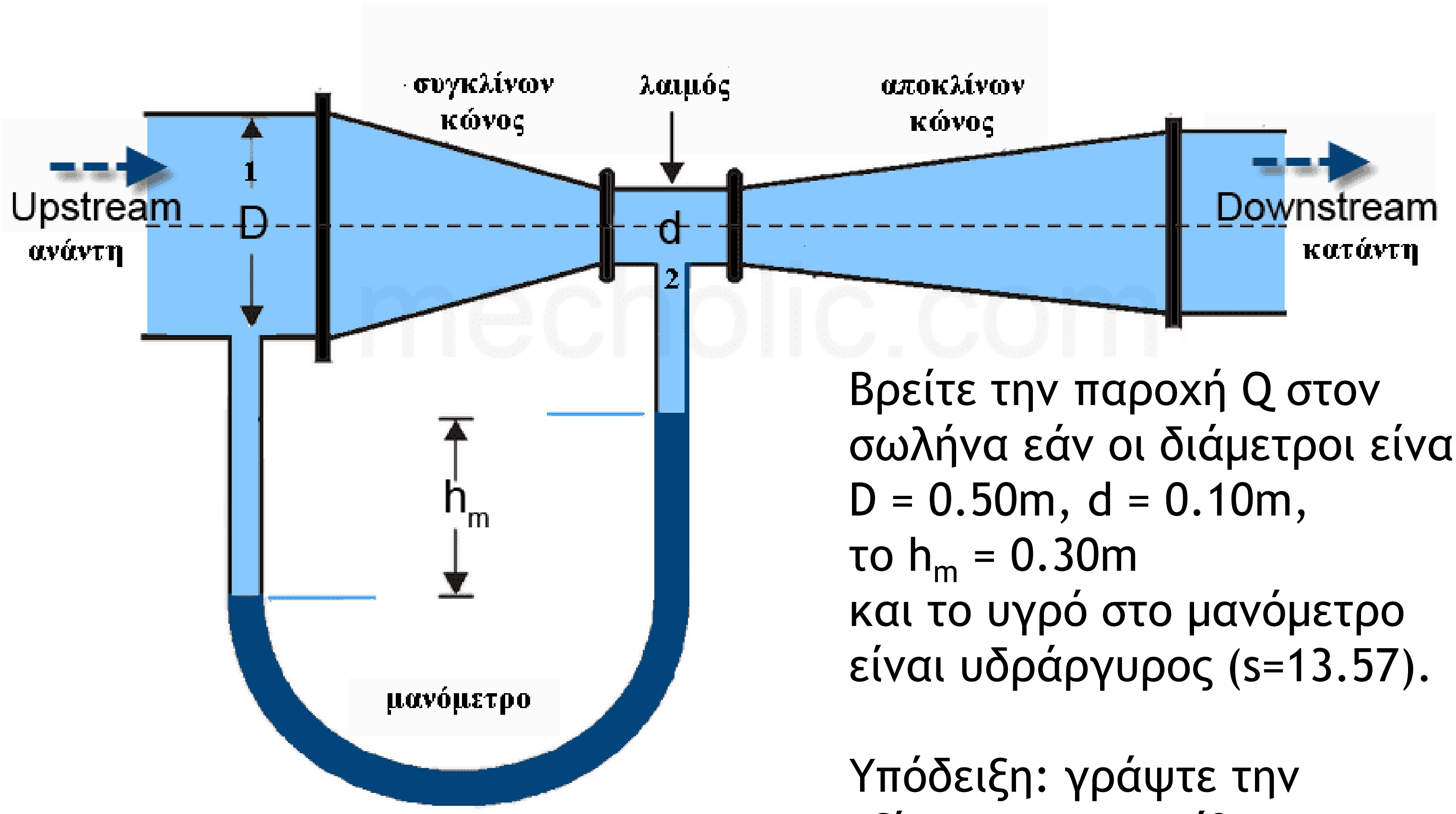
Η διαφορά της πίεσης που δίνεται από κατάλληλα τοποθετημένο μανόμετρο, και με γνωστές τις διαμέτρους των αγωγών, μπορεί να δώσει την ταχύτητα και την παροχή του σωλήνα μέσω της εξίσωσης Μπερνούλι.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ- ΜΕΤΡΗΤΗΣ VENTURI

Προσέξτε τις εξοχές,
είναι αναμονές για την
τοποθέτηση του μανόμετρου



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ- ΜΕΤΡΗΤΗΣ VENTURI

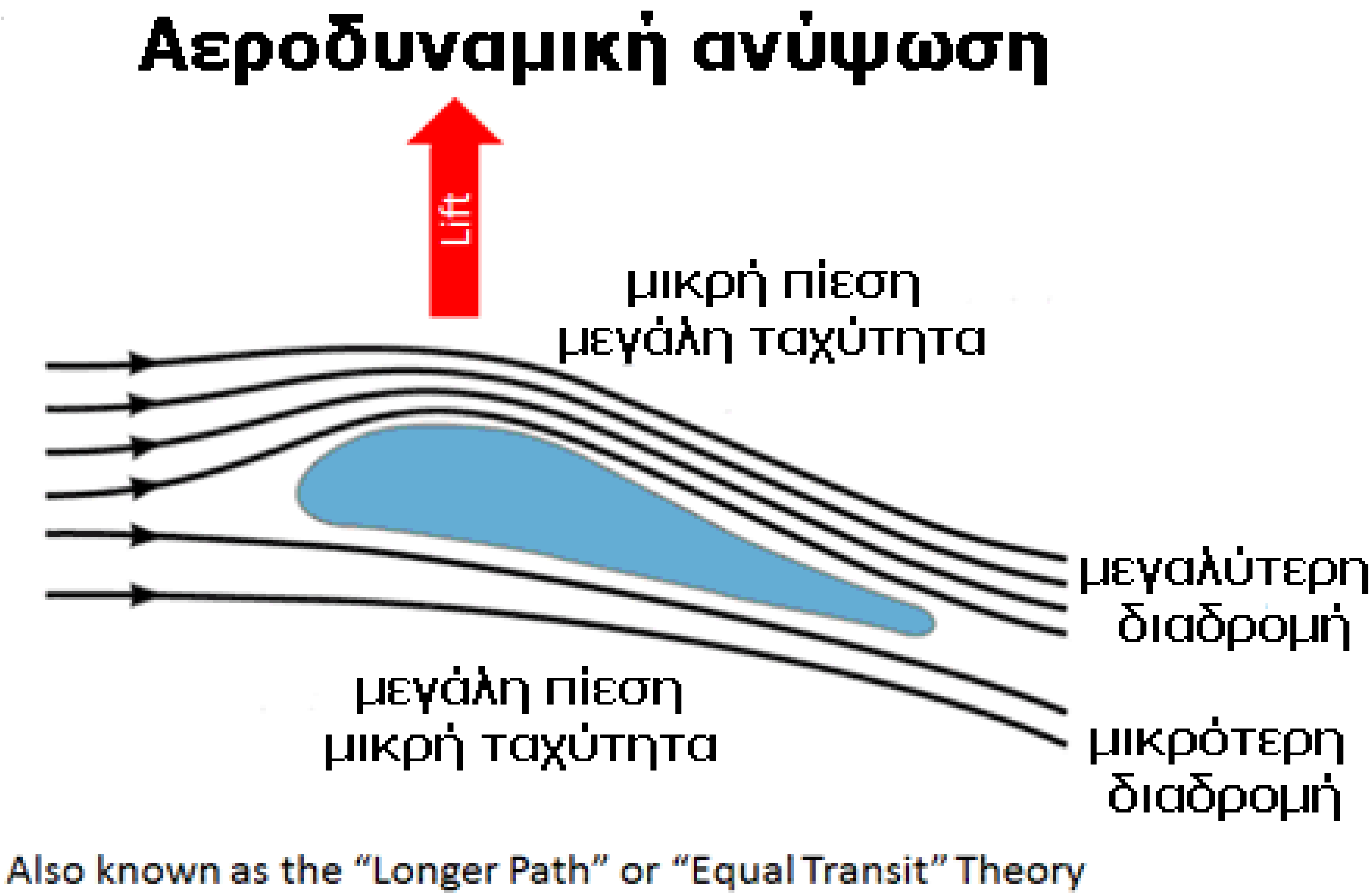


$$Q = A_2 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}}$$

Βρείτε την παροχή Q στον σωλήνα εάν οι διάμετροι είναι D = 0.50m, d = 0.10m, το h_m = 0.30m και το υγρό στο μανόμετρο είναι υδράργυρος (s=13.57).

Υπόδειξη: γράψτε την εξίσωση Μπερνούλι για τα σημεία 1 και 2. Προσέξτε ότι ο άξονας του σωλήνα είναι οριζόντιος άρα δεν υπάρχει Δz.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ- ΠΤΗΣΗ



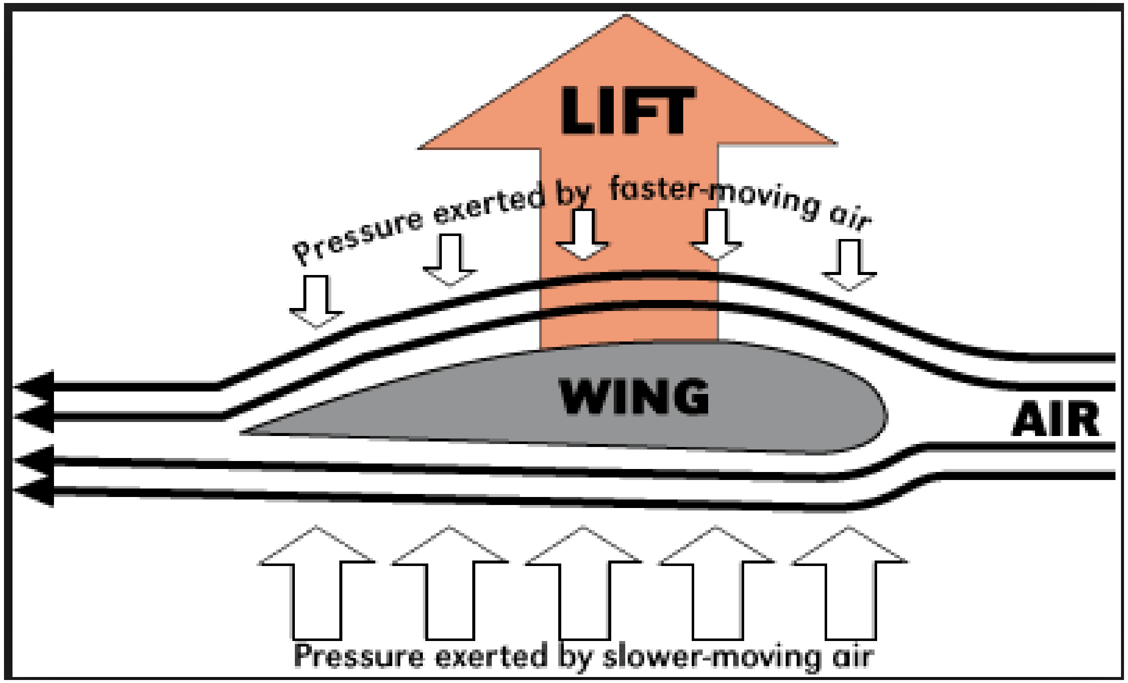
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ- ΠΤΗΣΗ

Ροή αέρα γύρω από φτερό αεροπλάνου. Προσέξτε την συμπύκνωση των υδρατμών πάνω από το φτερό, όπου οι μεγαλύτερες ταχύτητες του αέρα αντιστοιχούν σε μικρότερες πιέσεις και επομένως μικρότερες θερμοκρασίες.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ- ΠΤΗΣΗ

FIGURE 5
Very little downward deflection of streamlines is shown in this typical wind-tunnel photo.

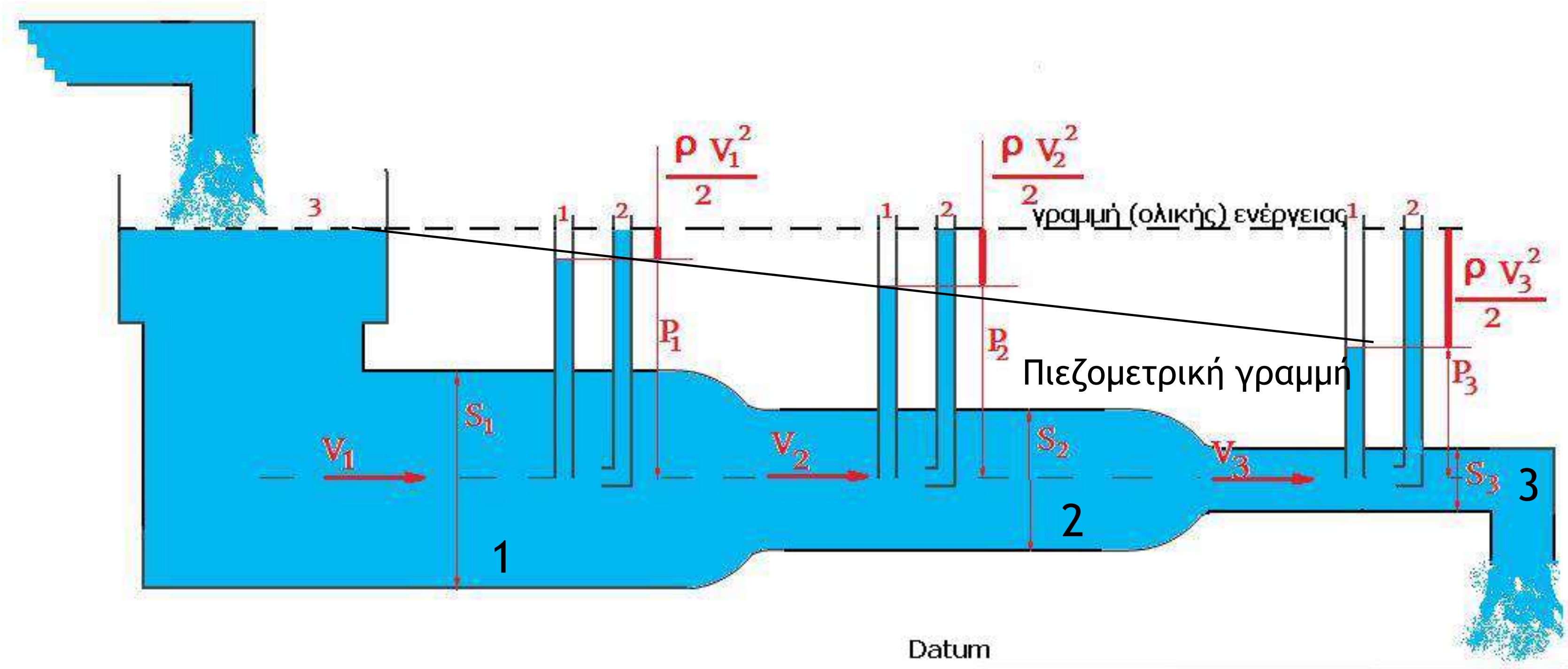
Φωτογραφία από αεροσήραγγα (windtunnel)
Προσέξετε ότι οι ροϊκές γραμμές (streamlines) είναι πυκνότερες πάνω από το φτερό και αραιότερες από κάτω.
Αυτό σημαίνει μεγαλύτερη ταχύτητα του αέρα πάνω από το φτερό και μικρότερη από κάτω.



Επομένως η πίεση κάτω από το φτερό είναι μεγαλύτερη από την πίεση πάνω από το φτερό.

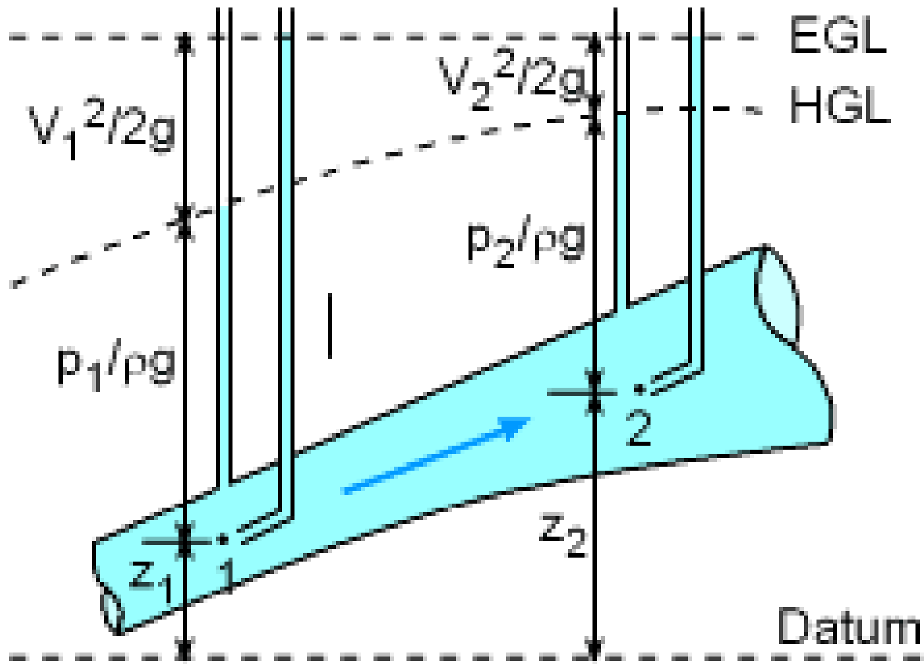
Θα υπάρχει συνεπώς μια διαφορά πίεσης που θα τείνει να σηκώσει το φτερό.

ΓΡΑΜΜΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΙΕΖΟΜΕΤΡΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ



Αν οι διάμετροι είναι S_1=1m, S_2=0.6m,S_3 =0.3m και Q=2m^3/s
Βρείτε τα ύψη της κινητικής ενέργειας (=$u^2/2g$) στα 1,2,3.

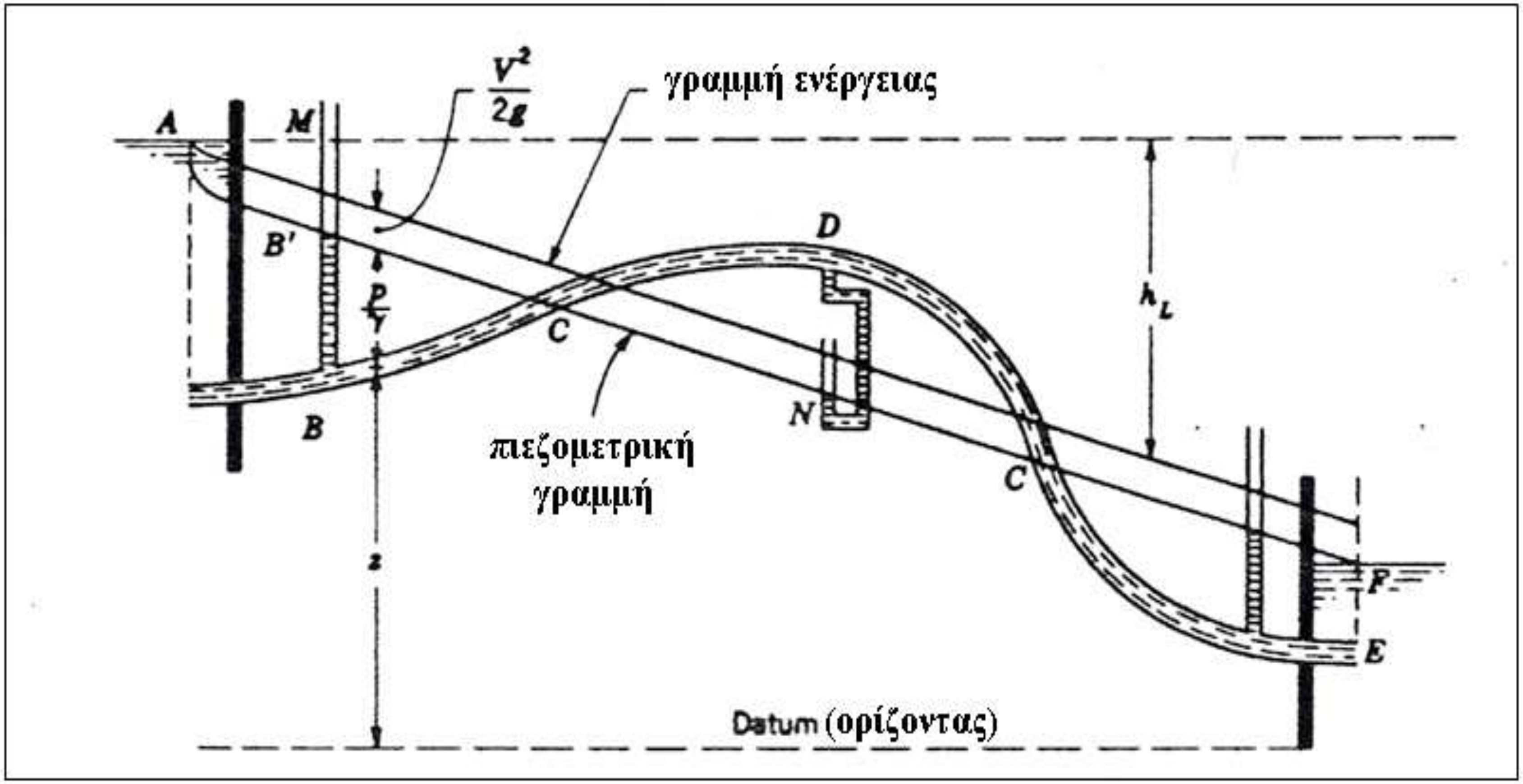
ΓΡΑΜΜΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΙΕΖΟΜΕΤΡΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ



Στο σχήμα έχουμε ροή σε ένα ιδεατό ρευστό. Οι σωλήνες στο πλάι του αγωγού (πιεζομετρικοί σωλήνες) μετρούν μόνο το ύψος πίεσης (το z θεωρείται σταθερό) και οι κορυφές τους "γράφουν" την πιεζομετρική γραμμή (**Hydraulic Grade Line – HGL**), ενώ οι σωλήνες στο κέντρο του αγωγού περιλαμβάνουν και τον όρο της κινητικής ενέργειας και οι κορυφές τους "γράφουν" την γραμμή ενέργειας (**Energy Line – EL**). Παρατηρούμε ότι η γραμμή ενέργειας μένει οριζόντια γιατί θεωρούμεότι δεν έχουμε απώλειες , ενώ στην φαρδύτερη διατομή του σωλήνα όπου η ταχύτητα μειώνεται (και άρα και το ύψος της κινητικής ενέργειας) για να μείνει σταθερή η συνολική ενέργεια αυξάνεται το ύψος πίεσης.

ΓΡΑΜΜΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΙΕΖΟΜΕΤΡΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο σωλήνας του σχήματος στο διάστημα CDC τέμνει την πιεζομετρική γραμμή. Στο σημείο C η (απόλυτη) πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική ενώ στο σημείο D η απόλυτη πίεση είναι αρνητική. Αυτό στην πράξη σημαίνει ότι εάν είχαμε εισροή αέρα στο σωλήνα, αυτός θα συγκεντρωνόταν στο σημείο D και η ροή θα σταματούσε (σκεφτείτε την περίπτωση ενός λόφου).



Βιβλιογραφία

- Στοιχεία φυσικής υδρολογίας, Κεφάλαιο 3 (**Αρχές της μηχανικής των ρευστών**)

  G. Hornberger et al. Μτφ: Σωτήρη Καραλή
- **Η επιστήμη του νερού**, Enzo Levi, Εκδόσεις ΤΕΕ, Μτφ: Γιάννη Λεονταρίτη
- **Υδραυλική**, 1ος τόμος, Daugherty – Franzini