Φυσική Γεωδαισία

Παρουσίαση 2^{η}: Νευτώνειο Πεδίο Έλξης

Βασίλειος Δ. Ανδριτσάνος
Αναπληρωτής Καθηγητής
Τμήμα Μηχανικών Τοπογραφίας και Γεωπληροφορικής
Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής

Περιεχόμενα παρουσίασης

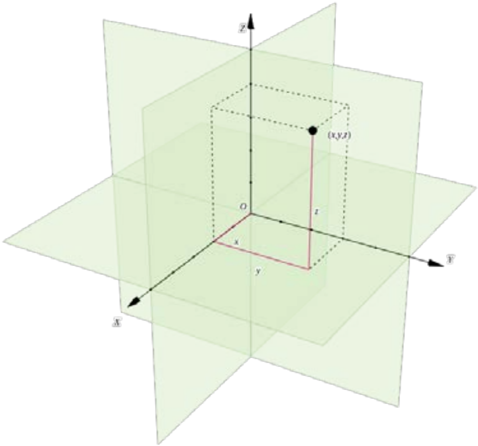
- Βασικές έννοιες αναλυτικής γεωμετρίας
- Διανύσματα, συστήματα αναφοράς και συντεταγμένων
- Συστήματα αναφοράς στη Γεωδαισία
- Νόμος Παγκόσμιας Έλξης
- Εισαγωγή στη σφαιρική αρμονική ανάλυση

Βασικές έννοιες

- 17ος αιώνας → Descartes → συντεταγμένες για την περιγραφή σημείων του χώρου με αριθμούς

- Επίλυση καθαρά γεωμετρικών προβλημάτων με αλγεβρικούς τρόπους

- Σύνδεση γεωμετρικών με «αριθμητικές» μεθόδους → **αναλυτική γεωμετρία**



Συστήματα συντεταγμένων

- Σύστημα συντεταγμένων και σύστημα αναφοράς είναι έννοιες ενγένει διαφορετικές

- Σχετίζονται και σχεδόν ταυτίζονται στο πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

- **Σύστημα συντεταγμένων** → μία απεικόνιση (συνάρτηση), η οποία σε κάθε σημείο ενός γεωμετρικού χώρου *n* διαστάσεων αντιστοιχεί *n* πραγματικούς αριθμούς

- Απαραίτητος ο <u>αμφιμονοσήμαντος χαρακτήρας</u> της απεικόνισης

Συστήματα συντεταγμένων

- **Σύστημα συντεταγμένων** → σκοπός η περιγραφή του χώρου με αριθμούς

- Εκτέλεση αριθμητικών υπολογισμών σχετικά με φυσικά φαινόμενα που συμβαίνουν μέσα στο χώρο

- **Φυσικά φαινόμενα** → περιγραφή μέσω <u>αριθμητικών μέσων</u>

- **Βαθμωτά φυσικά φαινόμενα** → σε κάθε σημείο αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός (π.χ., θερμοκρασία, δυναμικό βαρύτητας, κ.α.)

- **Διανυσματικά φυσικά φαινόμενα** → εκτός από μέγεθος έχουν και διεύθυνση και φορά → περιγραφή μέσω **<u>διανυσμάτων</u>** (π.χ., ταχύτητα, επιτάχυνση της βαρύτητας, κ.α.)

Διανύσματα

- Συμβολίζεται με βέλος $\vec{v}$

- Κάθε διάνυσμα εκφράζεται ως **γραμμικός συνδυασμός** μίας **τοπικής διανυσματικής βάσης** (μοναδιαία διανύσματα) και των **συνιστωσών** ως προς κάθε βάση

Συνιστώσες βάσης

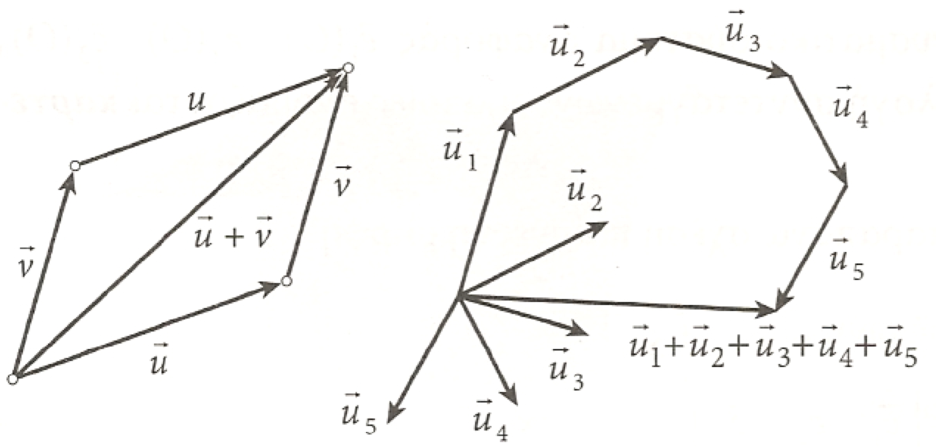
$$\vec{v} = v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + v^3\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{e}}\mathbf{v}$$

Διάνυσμα βάσης

- Τα διανύσματα βάσης δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο (γραμμικά ανεξάρτητα) → αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία διανυσμάτων και συνιστωσών

Διανύσματα

- Άθροιση διανυσμάτων → παράλληλη μετάθεση

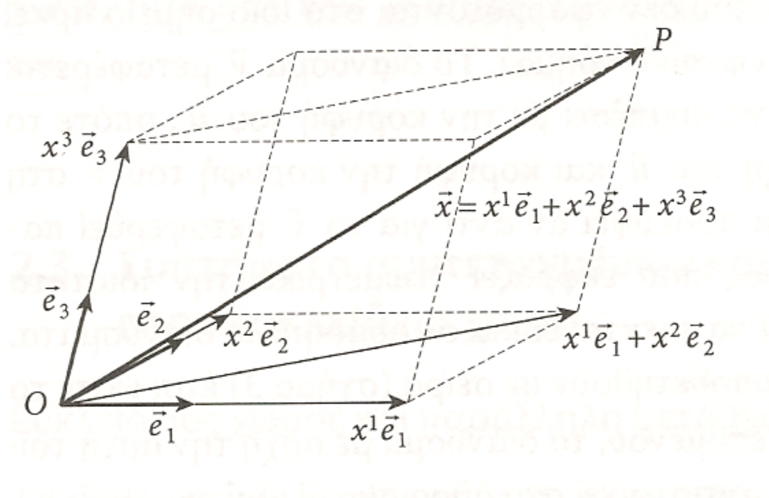


- Η παράλληλη μετάθεση είναι ιδιότητα του 5ου αξιώματος του Ευκλείδη → «από δοσμένο σημείο διέρχεται μόνο μία ευθεία παράλληλη προς δοσμένη ευθεία»

Ορισμός συστήματος αναφοράς

- Επιλογή σημείου αρχής O και ορισμός διανυσματικής βάσης

- Διάνυσμα θέσης οποιουδήποτε σημείου P



$$\vec{x} = \vec{\mathbf{e}}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

Διάνυσμα **καρτεσιανών συντεταγμένων** ως προς τη διανυσματική βάση

$$\vec{\mathbf{e}} = [\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3]$$

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

- Η μαθηματική έκφραση της **γωνίας** και της **απόστασης** στη γεωμετρία καλύπτεται από την έννοια του **εσωτερικού γινομένου**

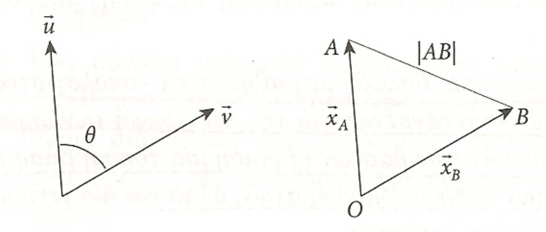
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \Leftrightarrow \theta = \arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

- Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων A και B προκύπτει από τη διανυσματική διαφορά των διανυσμάτων θέσης

$$|AB| = |\vec{x}_B - \vec{x}_A| = \sqrt{(\vec{x}_B - \vec{x}_A)\cdot(\vec{x}_B - \vec{x}_A)}$$

- Το μήκος ενός διανύσματος προκύπτει από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου

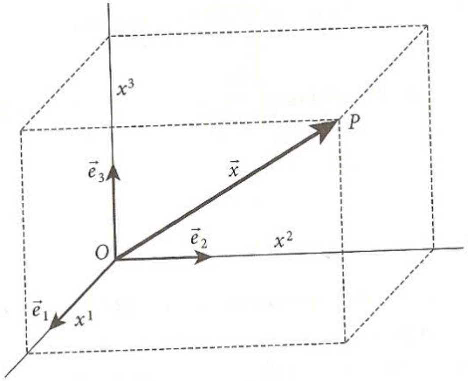
$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$



Ορθοκανονικές βάσεις

- Στη Γεωδαισία τα συστήματα αναφοράς που χρησιμοποιούνται είναι **ορθοκανονικά** → άξονες σχηματίζουν ορθές γωνίες και μοναδιαία διανύσματα βάσης

- Το **εσωτερικό γινόμενο** διανυσμάτων ορθοκανονικής βάσης είναι **μηδενικό**



$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = |\vec{e}_1||\vec{e}_2| \cos 90° = 0$$

- Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων σε ορθοκανονικές βάσεις τριών διαστάσεων

$$\vec{u} = u^1\vec{e}_1 + u^2\vec{e}_2 + u^3\vec{e}_3$$

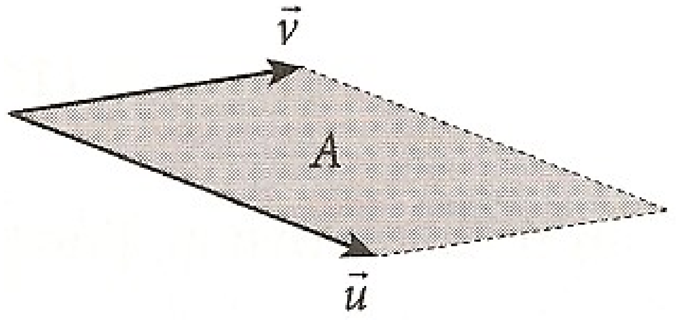
$$\vec{v} = v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + v^3\vec{e}_3$$

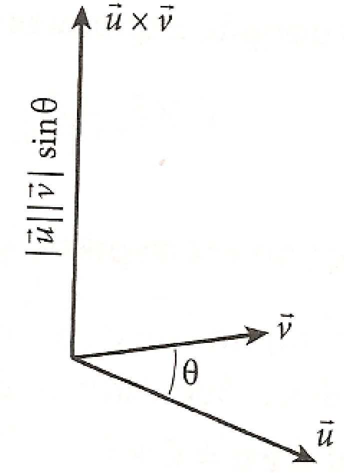
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3 = \begin{bmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$$

Εξωτερικό γινόμενο - Εμβαδόν

- Το **εξωτερικό γινόμενο** διανυσμάτων συνδέεται με το **εμβαδόν** του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα διανύσματα u και v

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$$



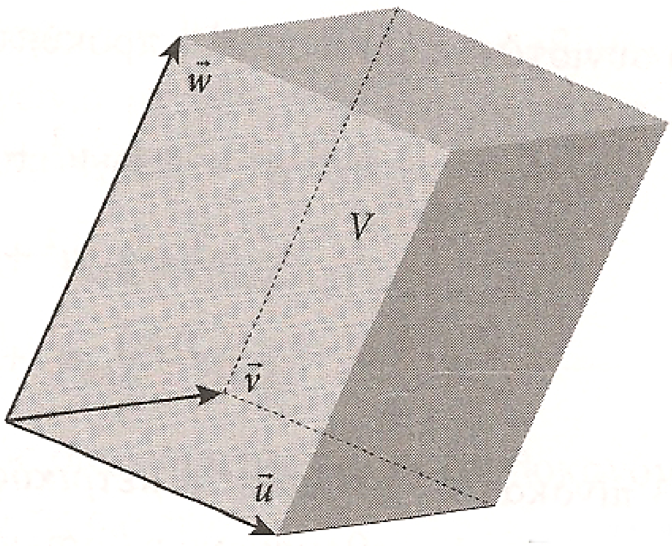


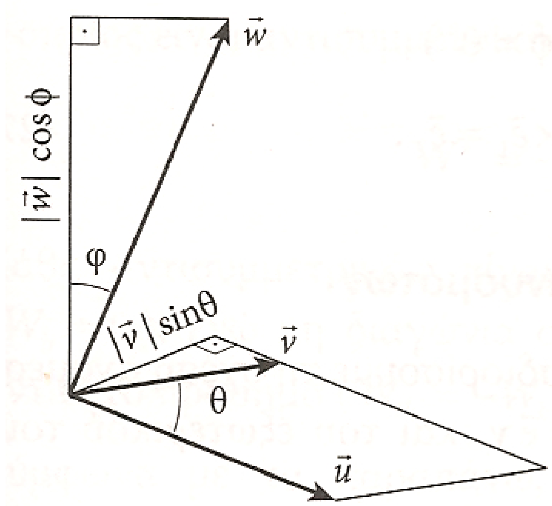
- Το εξωτερικό γινόμενο είναι ένα **διάνυσμα κάθετο** στο επίπεδο των u και v με **μέγεθος ίσο με το εμβαδόν** του παραλληλογράμμου

Μικτό γινόμενο - Όγκος

- Το **μικτό γινόμενο** διανυσμάτων συνδέεται με τον **όγκο** του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα διανύσματα u, v και w

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}=(|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta)|\vec{w}|\cos\varphi$$





Συστήματα αναφοράς στη Γεωδαισία

- **Ορισμός**: αρχή συστήματος, προσανατολισμός αξόνων, μαθηματικό και φυσικό υπόβαθρο

- **Υλοποίηση**: Σύνολο προτύπων σημείων (στον ουρανό ή στη γη) και περιγράφεται με ένα κατάλογο θέσεων ή/και κινήσεων σε συγκεκριμένη εποχή

- **Συμβατικό σύστημα αναφοράς**: Σύστημα αναφοράς, όπου όλα τα μοντέλα, οι αριθμητικές σταθερές και οι αλγόριθμοι ορίζονται επακριβώς

- **IERS Conventions** → Συμβάσεις της Διεθνούς Υπηρεσίας για την Περιστροφή της Γης και τα Συστήματα Αναφοράς (http://www.iers.org)

Συστήματα Αναφοράς Χώρου
(1 από 5)

Δύο κατηγορίες συστημάτων αναφοράς χώρου

1. Συστήματα με κέντρο αναφοράς το κέντρο του ηλιακού συστήματος: Αδρανειακά συστήματα αναφοράς: Νόμος της Παγκόσμιας Έλξης. Κατάλληλα για την περιγραφή των κινήσεων της Γης και των πλανητών. Εφαρμογή στην Ουράνια Μηχανική, στη Γεωδαιτική Αστρονομία και τη Γεωδαισία Δορυφόρων

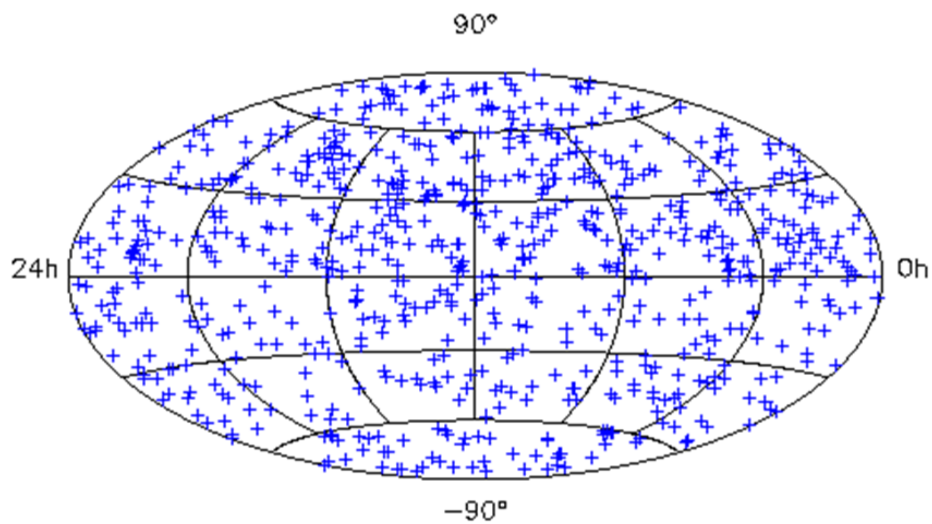
2. Συστήματα με κέντρο αναφοράς τη Γη: **Συστήματα ECEF (Earth Centered Earth Fixed):** Κατάλληλα για την περιγραφή των κινήσεων πάνω στην επιφάνεια της Γης. Σταθερά για μία μόνο εποχή, την **εποχή αναφοράς.**

Συστήματα Αναφοράς Χώρου
(2 από 5)

Αδρανειακά Συστήματα Αναφοράς

Ονομάζονται και Ουράνια Συστήματα

Βασικό μοντέλο είναι το **Διεθνές Ουράνιο Σύστημα Αναφοράς (International Celestial Reference System - ICRS)**, όπως αυτό υλοποιείται με τη βοήθεια του Πλαισίου Αναφοράς (ICRF)

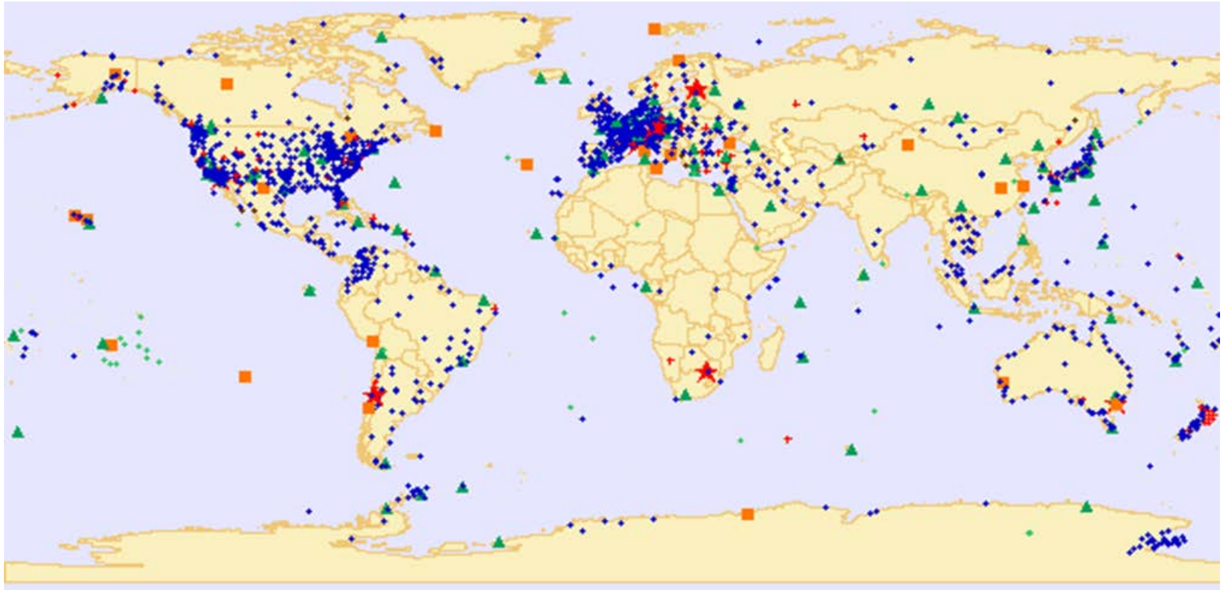


Συστήματα Αναφοράς Χώρου
(3 από 5)

Συστήματα ECEF (Earth Centered - Earth Fixed)

Ονομάζονται και **Επίγεια Συστήματα Αναφοράς**

Βασικό παγκόσμιο μοντέλο είναι το **Διεθνές Επίγειο Σύστημα Αναφοράς (International Terrestrial Reference System - ITRS),** όπως αυτό υλοποιείται με τη βοήθεια του Πλαισίου Αναφοράς (ITRF)



Συστήματα Αναφοράς Χώρου (4 από 5)

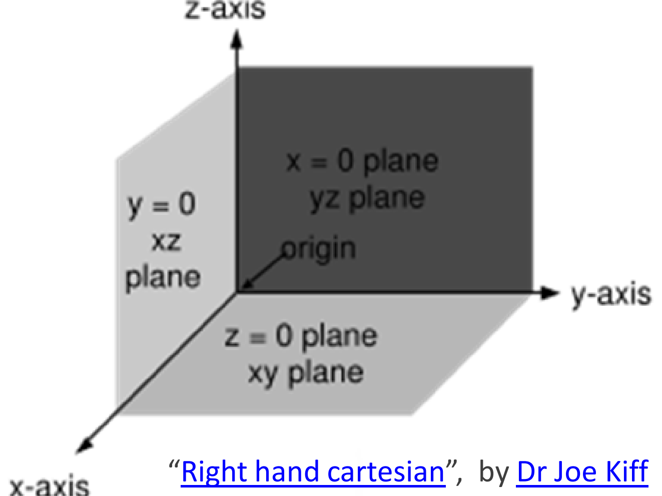
Συστήματα ECEF (Earth Centered - Earth Fixed)

Αφετηρία το γεώκεντρο

Άξονας Ζ: Προς ένα μέσο πόλο

Αξονας Χ: Προς το σημείο τομής ισημερινού και μεσημβρινού του Greenwich

Σύστημα μεταβαλλόμενο με το χρόνο



Συστήματα Αναφοράς Χώρου
(5 από 5)

Συστήματα ECEF (Earth Centered - Earth Fixed)

ITRFyy, όπου yy η εποχή της λύσης του συστήματος, πχ. ITRF05

DATA SET EXPRESSED IN ITRF2000 FRAME
STATION POSITIONS AND VELOCITIES AT EPOCH 2008/10/10

DOMES NB	SITE NAME	ID SOLN X/Vx Y/Vy		Z/Vz	SIGMA x/vx	SIGMA	
y/vy	SIGMA z/vz						
m-m/y	m-m/y	m-m/y	m-m/y	m-m/y	m-m/y		
12602M002	Dionysos	7515	1	4595216.536	2039435.451	3912629.377	0.028
0.030	0.027						
0.0059	0.0065	-0.0085	0.0016	0.0015	0.0016		
12602S001	Dionysos	7940	1	4595217.127	2039465.208	3912614.623	3.714
2.435	4.874						
0.0059	0.0065	-0.0085	0.0016	0.0015	0.0016		
12602S011	Dionysos	DIOA	1	4595215.309	2039475.479	3912614.968	0.023
0.025	0.022						
0.0059	0.0065	-0.0085	0.0016	0.0015	0.0016		

Συστήματα Αναφοράς Χώρου (5 από 5)

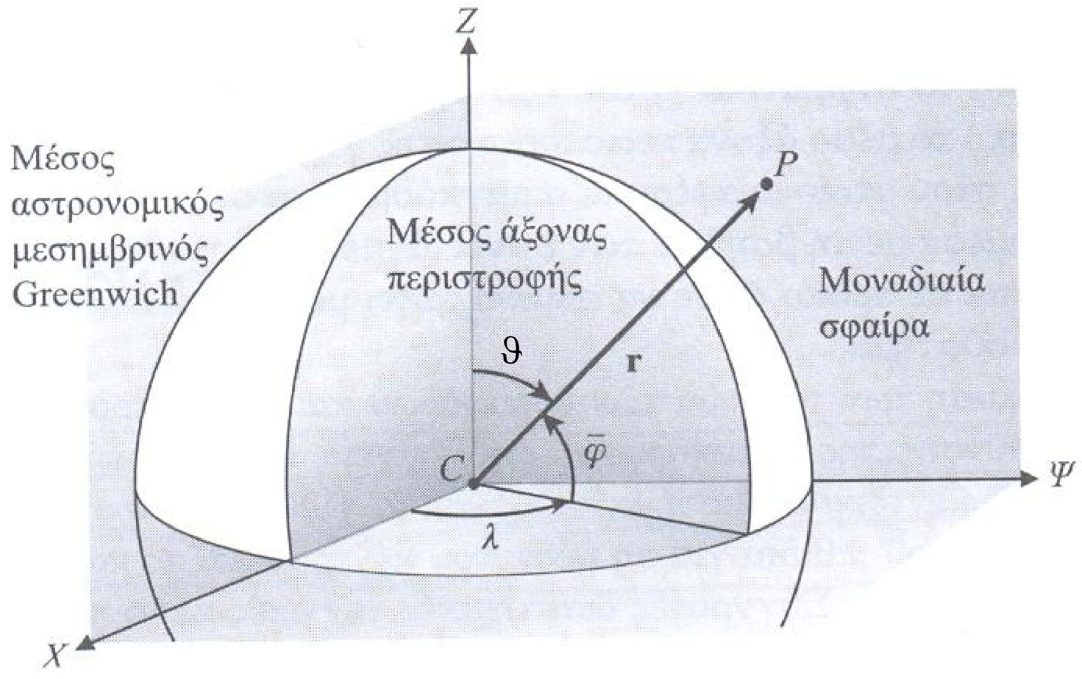
Συστήματα ECEF (Earth Centered - Earth Fixed)

ITRFyy, όπου yy η εποχή της λύσης του συστήματος, πχ. ITRF05

DATA SET EXPRESSED IN ITRF2000 FRAME STATION POSITIONS AND VELOCITIES AT EPOCH 2008/10/10					
DOMES NB	**SITE NAME ID**	**SOLN**	**X (m)**	**Y(m)**	**Z(m)**
12602M002	Dionysos 7515	1	4595216.536	2039435.451	3912629.377
12602S001	Dionysos 7940	1	4595217.127	2039465.208	2039465.208
12602S011	Dionysos DIOA	1	4595215.309	2039475.479	2039475.479
DOMES NB	**SITE NAME ID**	**SOLN**	**vX(m/year)**	**vY(m/year)**	**vZ(m/year)**
12602M002	Dionysos 7515	1	0.0059	0.0065	-0.0085
12602S001	Dionysos 7940	1	0.0059	0.0065	-0.0085
12602S011	Dionysos DIOA	1	0.0059	0.0065	-0.0085

Το γεωκεντρικό σύστημα για τη βαρύτητα

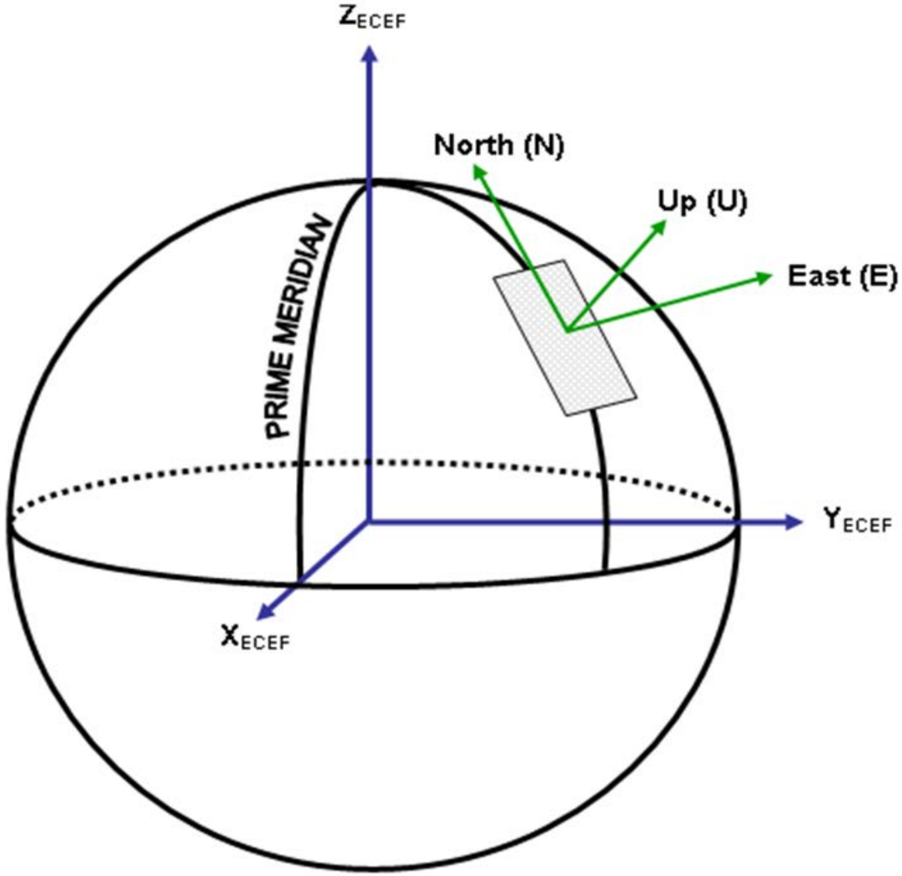
- Στην περίπτωση μελέτης του πεδίου βαρύτητας σχεδόν σφαιρικών σωμάτων χρησιμοποιείται η περιγραφή της θέσης με τη βοήθεια **σφαιρικών συντεταγμένων**



$$\vartheta = 90^\circ - \varphi$$

$$\vec{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \sin\vartheta\cos\lambda \\ \sin\vartheta\sin\lambda \\ \cos\vartheta \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$$

Τοποκεντρικά Συστήματα Συντεταγμένων (1 από 6)



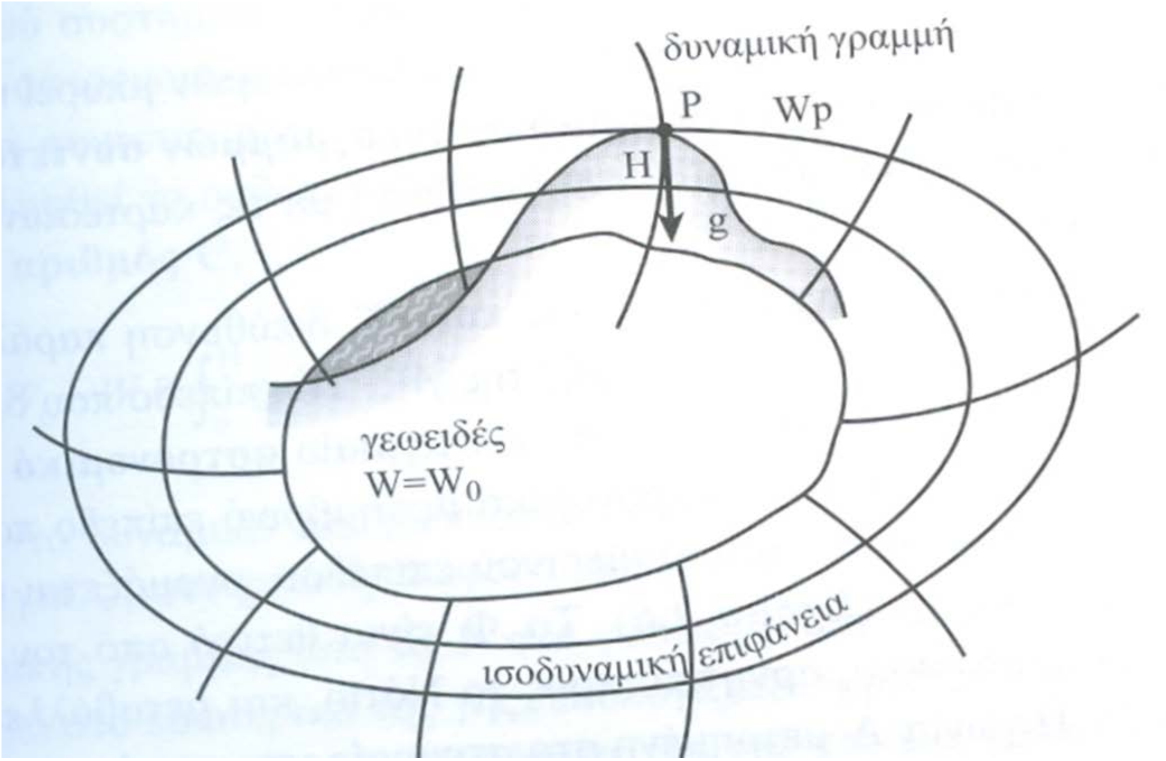
Τοποκεντρικά Συστήματα Συντεταγμένων (2 από 6)

Τα τοποκεντρικά συστήματα συντεταγμένων υλοποιούνται άμεσα από τις μετρήσεις, με την υλοποίηση της κατακορύφου κατά την κέντρωση των οργάνων

“Round prism and laser plummet on tripod”, by KJG2007 available under CC BY-SA 2.0

Τοποκεντρικά Συστήματα Συντεταγμένων (3 από 6)

Η αρχή των τοποκεντρικών συστημάτων αναφοράς (σε κάθε σημείο και διαφορετικό σύστημα) έγκειται στη μορφολογία του πεδίου βαρύτητας



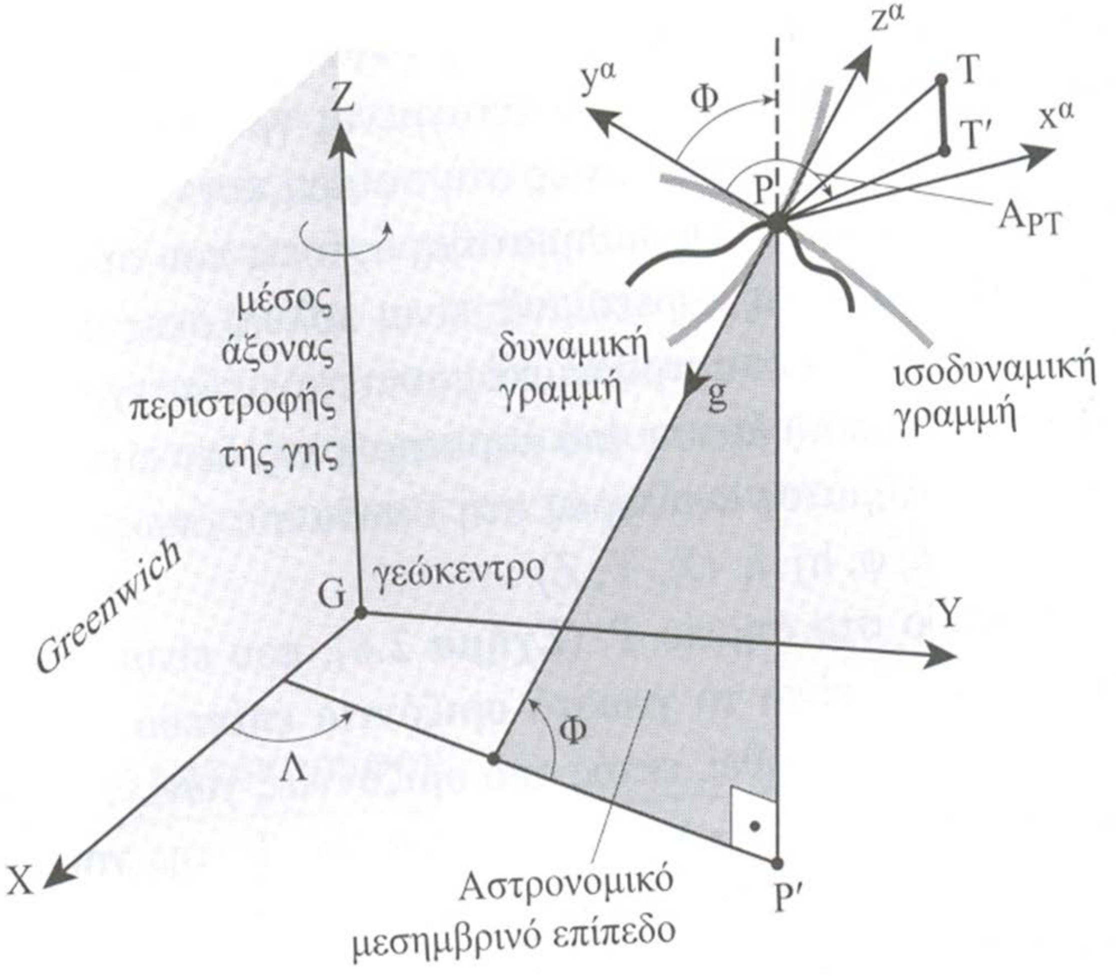
Τοποκεντρικά Συστήματα Συντεταγμένων (4 από 6)

Οι επιφάνειες του γήινου πεδίου βαρύτητας με σταθερό δυναμικό ονομάζονται **ισοδυναμικές ή χωροσταθμικές** επιφάνειες

Η διεύθυνση του διανύσματος της βαρύτητας **(κατακόρυφη)** είναι κάθετη σε κάθε σημείο της ισοδυναμικής επιφάνειας

Οι γραμμές που τέμνουν κάθετα όλες τις ισοδυναμικές επιφάνειες και έχουν συνεχώς την κατακόρυφο ως εφαπτόμενη ονομάζονται **δυναμικές** γραμμές

Τοποκεντρικά Συστήματα Συντεταγμένων (5 από 6)



Τοποκεντρικά Συστήματα Συντεταγμένων (6 από 6)

Ισοδυναμικές και δυναμικές γραμμές: Σύστημα άμεσα μετρήσιμων καμπυλόγραμμων συντεταγμένων

Στιγμιαίο αστρονομικό πλάτος Φ και μήκος Λ

Όταν διορθωθούν από την <u>κίνηση του πόλου</u> και αναφερθούν σε ένα <u>μέσο άξονα περιστροφής της Γης</u> ονομάζονται **φυσικές ή αστρονομικές συντεταγμένες (Φ, Λ, Η) ή (Φ, Λ, C),** όπου **C** είναι **ο γεωδυναμικός αριθμός** (διαφορά δυναμικού από το Γεωειδές)

<u>Άμεσα μετρήσιμες συντεταγμένες</u> με τη βοήθεια της Γεωδαιτικής Αστρονομίας

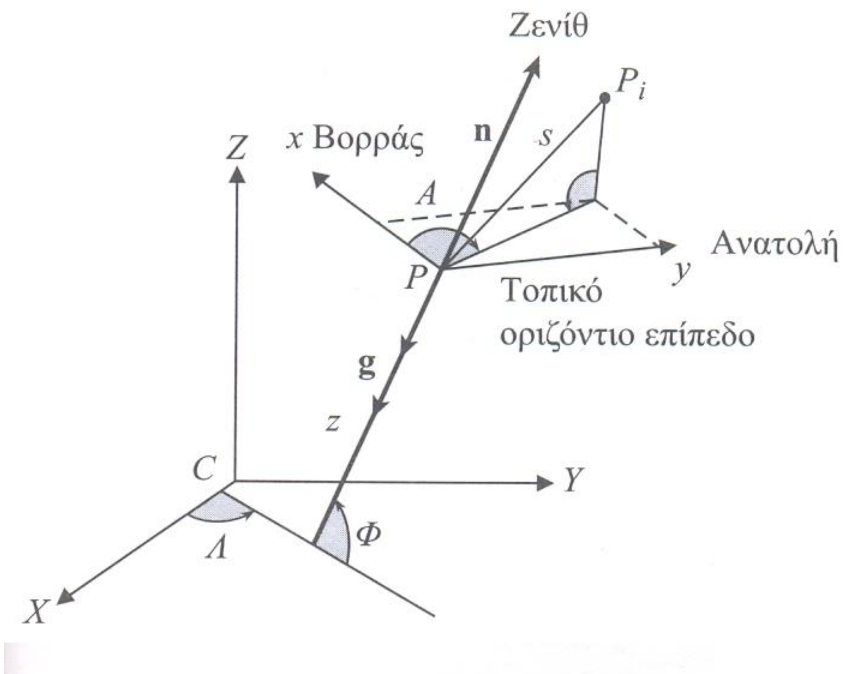
Μαθηματικές σχέσεις περίπλοκές: ακατάλληλες για τον ορισμό ενός συστήματος αναφοράς στη Γεωδαισία

Το σύστημα αναφοράς της βαρύτητας

- Το διάνυσμα της βαρύτητας **g** εκφράζεται με τη σχέση

$$\vec{\mathbf{g}} = -g\vec{\mathbf{n}} = -g\begin{bmatrix} \cos\Phi\cos\Lambda \\ \cos\Phi\sin\Lambda \\ \sin\Phi \end{bmatrix}$$

- **n** είναι το μοναδιαίο διάνυσμα της εξωτερικής καθέτου



Παράμετροι Ελλειψοειδούς Αναφοράς (1 από 3)

1. Ο μεγάλος ημιάξονας του ελλειψοειδούς a
2. Ο μικρός ημιάξονας b ή η επιπλάτυνση $f=(a-b)/a$
3. Η γήινη μάζα Μ ή η σταθερά GM
4. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης ω

ΤΟ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΠΛΗΡΩΣ

Παράμετροι Ελλειψοειδούς Αναφοράς (2 από 3)

Παράμετροι	**Bessel**	**Hayford**	**WGS84**	**GRS80**
a	6377397.1550	6378388.0000	6378137.0000	6378137.0000
b	6356078.9630	6356911.9461	6356752.3142	6356752.3141
f	0.003342773000	0.003367003000	0.003352810600	0.003352810680

Παλιότερα: προσδιορισμός παραμέτρων ελλειψοειδούς με τη μέτρηση τόξων και την εφαρμογή κατάλληλων μοντέλων συνόρθωσης

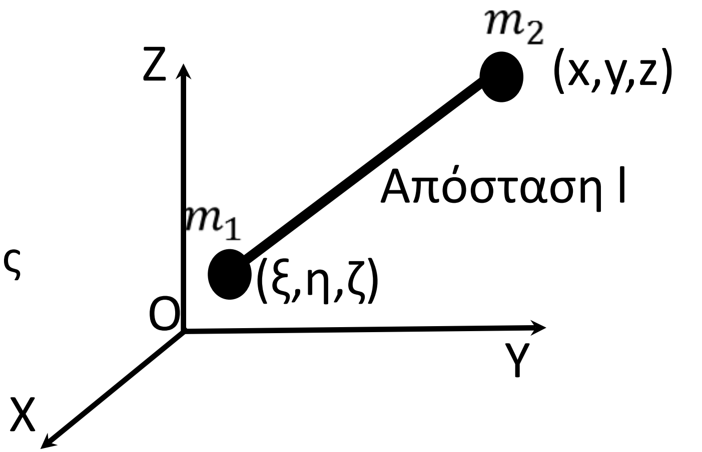
Σύγχρονοι προσδιορισμοί: Διαστημικές παρατηρήσεις και βελτιωμένα μοντέλα του γήινου πεδίου βαρύτητας

Ο νόμος της Παγκόσμιας Έλξης

- Νόμος του Νεύτωνα ανάμεσα σε δύο μάζες m_1 και m_2 με συντεταγμένες (ξ, η, ζ) και (x, y, z) αντίστοιχα,

- $G = 6.674\times10^{-10}\,\mathrm{m^3kg^{-1}sec^{-2}}$

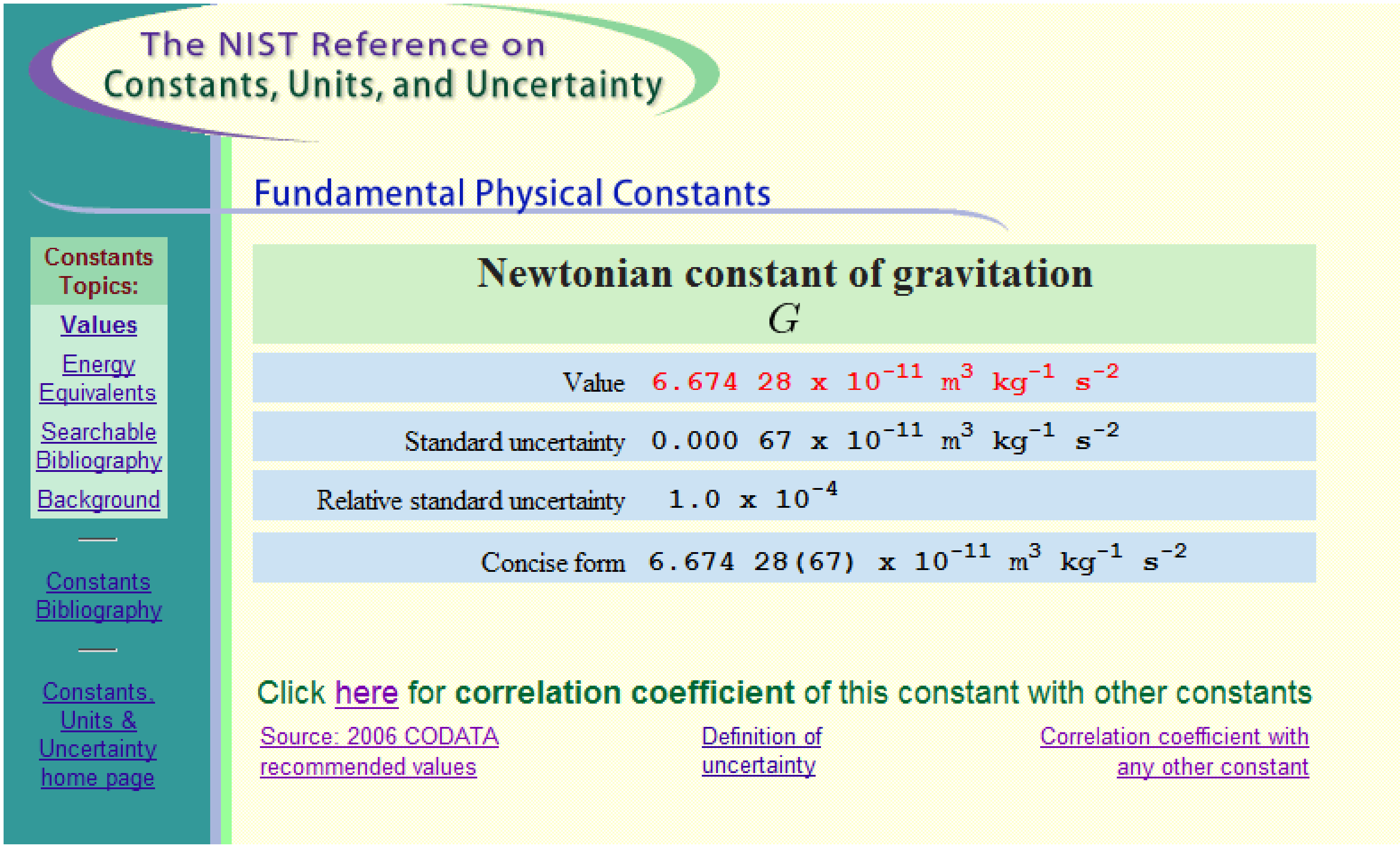
$$F = G\frac{m_1 m_2}{l^2}$$ Μέτρο της δύναμης έλξης



$$l = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

Ο νόμος της Παγκόσμιας Έλξης

www.codata.org → Committee of Data for Science and Technology



The NIST Reference on
Constants, Units, and Uncertainty

Fundamental Physical Constants

Constants Topics:
Values
Energy Equivalents
Searchable Bibliography
Background

Constants Bibliography

Constants, Units & Uncertainty home page

Newtonian constant of gravitation
G

Value	$6.674\ 28 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}}$
Standard uncertainty	$0.000\ 67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}}$
Relative standard uncertainty	1.0×10^{-4}
Concise form	$6.674\ 28(67) \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}}$

Click here for **correlation coefficient** of this constant with other constants

Source: 2006 CODATA recommended values

Definition of uncertainty

Correlation coefficient with any other constant

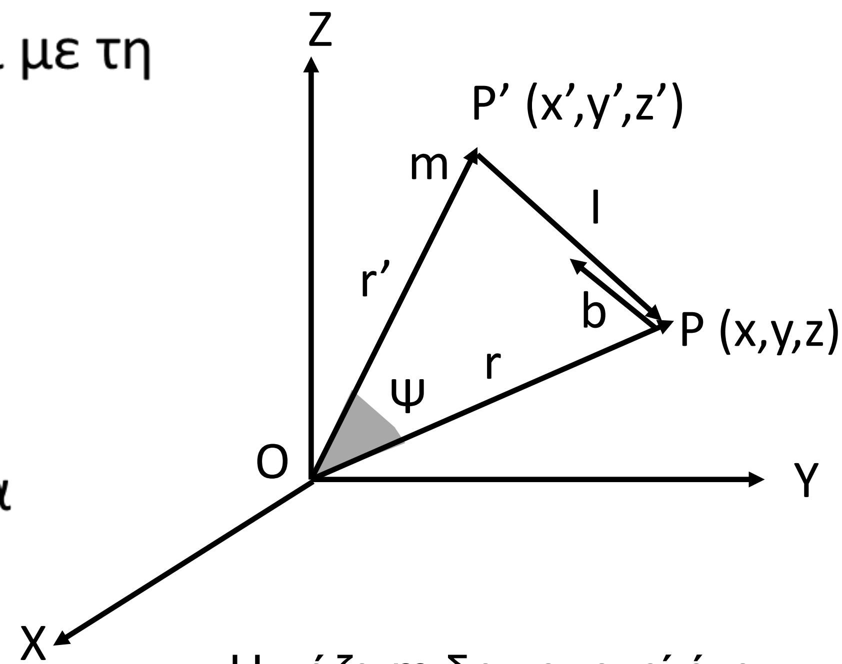
Ο νόμος της Παγκόσμιας Έλξης

- Όταν η μία μάζα αντικατασταθεί με τη μονάδα μάζας, τότε

$$b = G\,\frac{m}{l^2}$$

- b: η δύναμη που ασκεί η μονάδα μάζας σε σημείο απόστασης l

$$l = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$



Η μάζα m δημιουργεί ένα πεδίο ελκτικών δυνάμεων

Η διεύθυνση του διανύσματος **b** είναι η διεύθυνση της ευθείας που ενώνει το έλκον σημείο (μάζα m) με το ελκόμενο (μοναδιαία μάζα) με φορά από το ελκόμενο προς το έλκον

Θεμελιώδεις σχέσεις

- Σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα η **επιτάχυνση της βαρύτητας (gravity acceleration)** είναι συνισταμένη δύο επιταχύνσεων

$$\vec{\mathbf{g}} = \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{z}}$$

- **b → επιτάχυνση των ελκτικών δυνάμεων (attraction acceleration)**
- **z → φυγόκεντρη επιτάχυνση (centrifugal acceleration)**

- Η δύναμη της βαρύτητας **F** έχει αντικατασταθεί από την επιτάχυνση **g** λόγω της αναλογίας με συντελεστή m

$$\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{g}}$$

Θεμελιώδεις σχέσεις

- Το μέτρο του διανύσματος **g** ονομάζεται **ένταση της βαρύτητας (gravity intensity)** ή απλά **βαρύτητα (gravity)** $g = |\vec{\mathbf{g}}|$
- Η διεύθυνση του διανύσματος **g** είναι γνωστή ως **διεύθυνση της κατακορύφου (direction of the plumb line)**

- Μονάδες μέτρησης στο **SI** → ms^{-2}
- Για τις αποκλίσεις του πεδίου από τα διάφορα μοντέλα βαρύτητας ή τις αβεβαιότητες στις μετρήσεις βαρύτητας χρησιμοποιούνται

$1\mu ms^{-2} = 10^{-6}\,ms^{-2}$ $\quad$ $1nms^{-2} = 10^{-9}\,ms^{-2}$

- Στη Γεωδαισία και στη Γεωφυσική χρησιμοποιούνται συνήθως οι παράγωγες

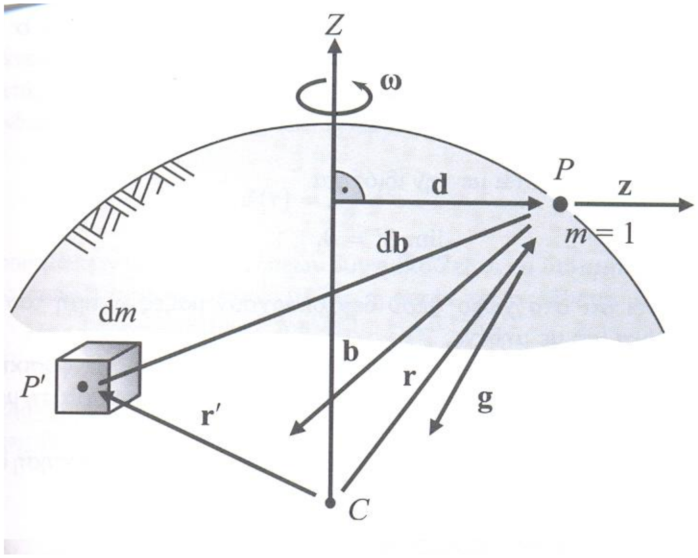
$1Gal = 1cms^{-2}$ $\quad$ $1mGal = 10^{-5}\,ms^{-2}$ $\quad$ $1\mu Gal = 10^{-8}\,ms^{-2}$

Πεδίο ελκτικών δυνάμεων

- Προκύπτει από την εφαρμογή του νόμου του Νεύτωνα

$$\vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{r}}) = G \iiint_{v} \frac{\vec{\mathbf{r}}' - \vec{\mathbf{r}}}{\left|\vec{\mathbf{r}}' - \vec{\mathbf{r}}\right|^{3}} \, dm$$

- *v* ο όγκος που περικλείει τη μάζα της Γης, **r** η διανυσματική ακτίνα θέσης του ελκόμενου σημείου P, **r**΄ η διανυσματική ακτίνα θέσης της έλκουσας στοιχειώδους μάζας *dm*



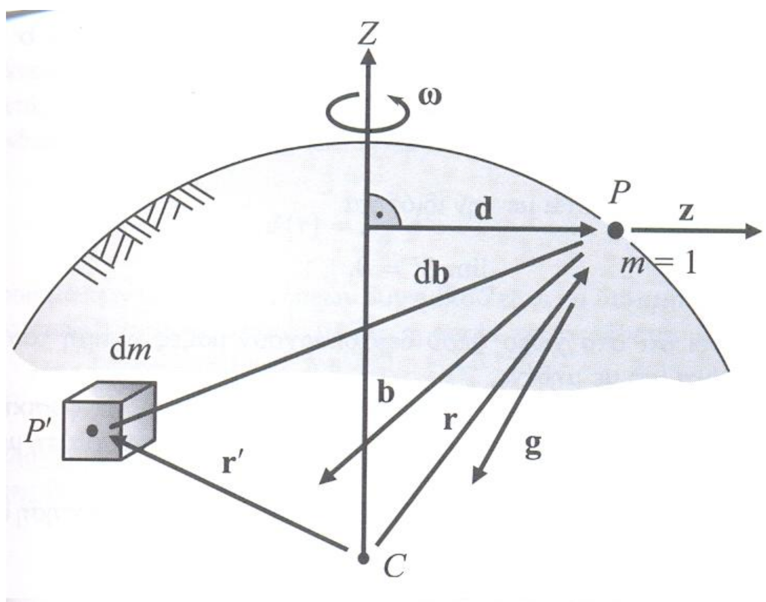
Φυγόκεντρη επιτάχυνση

- Εκτός από τις ελκτικές δυνάμεις σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα εμφανίζεται η φυγόκεντρη επιτάχυνση

$$\vec{\mathbf{z}}(\vec{\mathbf{r}}) = (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}) \times \vec{\omega} = \omega^2 \vec{\mathbf{d}}$$

- ω, το μέτρο της **γωνιακής ταχύτητας (angular velocity)** περιστροφής της Γης, η οποία είναι γνωστή με μεγάλη ακρίβεια από την Αστρονομία

$$\omega = 7.292115 \cdot 10^{-5} \, rad \cdot s^{-1}$$



Από την επιτάχυνση στο δυναμικό (έλξη)

- Οι υπολογισμοί στο πεδίο βαρύτητας απλουστεύονται αν, αντί για το διανυσματικό μέγεθος της επιτάχυνσης, χρησιμοποιηθεί το βαθμωτό μέγεθος του **δυναμικού (potential)**

- Ισχύει: $\vec{\mathbf{b}} = \nabla V = gradV = \frac{\partial V}{\partial X}\vec{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial V}{\partial Y}\vec{\mathbf{e}}_2 + \frac{\partial V}{\partial Z}\vec{\mathbf{e}}_3$

- Η συνάρτηση του δυναμικού έλξης εισάγεται με την ιδιότητα $\lim_{r\to\infty} V = 0$

- Μονάδα μέτρησης στο SI: m^2s^{-2}

- Παριστάνει το έργο το οποίο απαιτείται για τη μετατόπιση της μονάδας της μάζας στο πεδίο

Από την επιτάχυνση στο δυναμικό (έλξη)

- Το δυναμικό έλξης προκύπτει από

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = G\iiint_v \frac{\rho(\vec{\mathbf{r}}\,')}{|\vec{\mathbf{r}}\,' - \vec{\mathbf{r}}|} dv$$

- Όταν η Γη θεωρηθεί σφαιρική με ακτίνα R, τότε για σημεία εκτός της μάζας M (r > R) ισχύει

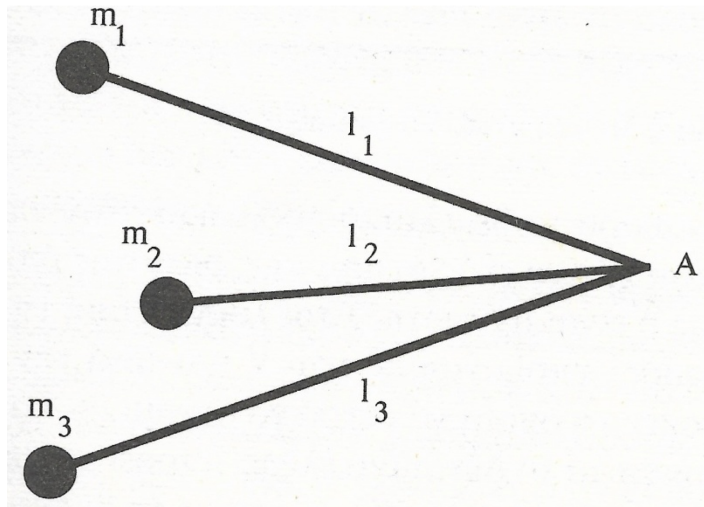
$$V_e = \frac{GM}{r}$$

- Το δυναμικό σε αυτήν την περίπτωση αντιστοιχεί στο δυναμικό σημειακής μάζας ίσης με M συγκεντρωμένης στο κέντρο μάζας (κέντρο της σφαίρας)

- Τυπική τιμή του δυναμικού έλξης: $V = 6.26 \cdot 10^7 \ m^2 s^{-2}$

Από την επιτάχυνση στο δυναμικό (έλξη)

- Το δυναμικό έλξης σε κάποιο σημείο του χώρου Α που προέρχεται από n μάζες



$$V\left(\vec{\mathbf{r}}\right)=G\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{l_i}$$

Από την επιτάχυνση στο δυναμικό (φυγόκεντρη)

- Ομοίως για τη φυγόκεντρη επιτάχυνση ισχύει η εξίσωση του **φυγόκεντρου ή φυγοκεντρικού δυναμικού (centrifugal potential)**

$$\vec{\mathbf{z}} = \nabla\Phi = grad\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial X}\vec{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial Y}\vec{\mathbf{e}}_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial Z}\vec{\mathbf{e}}_3$$

- Η συνάρτηση του φυγοκεντρικού δυναμικού εισάγεται με την ιδιότητα $\lim_{d\to 0}\Phi = 0$

- Σημεία επάνω στο άξονα περιστροφής της Γης έχουν φυγοκεντρικό δυναμικό ίσο με το μηδέν

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\omega^2}{2}d^2$$

Από την επιτάχυνση στο δυναμικό (βαρύτητα)

- Το άθροισμα των δύο συναρτήσεων του δυναμικού (έλξης και φυγοκεντρικού) είναι το **δυναμικό της βαρύτητας (gravity ή gravitational potential)**

$$W(\vec{\mathbf{r}}) = V(\vec{\mathbf{r}}) + \Phi(\vec{\mathbf{r}})$$

- Κατά αναλογία η σχέση ανάμεσα στην επιτάχυνση της βαρύτητας και το δυναμικό της βαρύτητας είναι

$$\vec{\mathbf{g}} = \nabla W = gradW = \frac{\partial W}{\partial X}\vec{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial W}{\partial Y}\vec{\mathbf{e}}_2 + \frac{\partial W}{\partial Z}\vec{\mathbf{e}}_3$$

- Οι συνιστώσες του διανύσματος της βαρύτητας προκύπτουν ως μερικές παράγωγοι του δυναμικού της βαρύτητας προς τις αντίστοιχες διευθύνσεις

$$\vec{\mathbf{g}} = gradW \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial X} & \dfrac{\partial W}{\partial Y} & \dfrac{\partial W}{\partial Z} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$$

Από την επιτάχυνση στο δυναμικό (βαρύτητα)

- Οι τιμές των συνιστωσών του διανύσματος της βαρύτητας υπολογίζονται

$$g_X = \frac{\partial W}{\partial X} = -G\iiint_v \frac{x-\xi}{l^3}\rho dv + \omega^2 x = -\frac{GM\left(x-\xi\right)}{l^3} + \omega^2 x$$

$$g_Y = \frac{\partial W}{\partial Y} = -G\iiint_v \frac{y-\eta}{l^3}\rho dv + \omega^2 y = -\frac{GM\left(y-\eta\right)}{l^3} + \omega^2 y$$

$$g_Z = \frac{\partial W}{\partial Z} = -G\iiint_v \frac{z-\zeta}{l^3}\rho dv = -\frac{GM\left(z-\zeta\right)}{l^3}$$

Υπολογισμοί για το δυναμικό έλξης

- Το φυγοκεντρικό δυναμικό σε γνωστό σημείο υπολογίζεται από τις συντεταγμένες του σημείου και τη γνωστή γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης

- **Το ελκτικό δυναμικό δεν είναι δυνατό να υπολογιστεί απευθείας** → άγνωστη η συνάρτηση πυκνότητας σε κάθε σημείο της Γης

- Προκύπτει από **ετερογενείς παρατηρήσεις** οι οποίες πραγματοποιούνται στην επιφάνεια της Γης ή έξω από αυτήν

- Στους υπολογισμούς αγνοείται η μάζα της ατμόσφαιρας → η επιφάνεια της Γης θεωρείται συνοριακή επιφάνεια

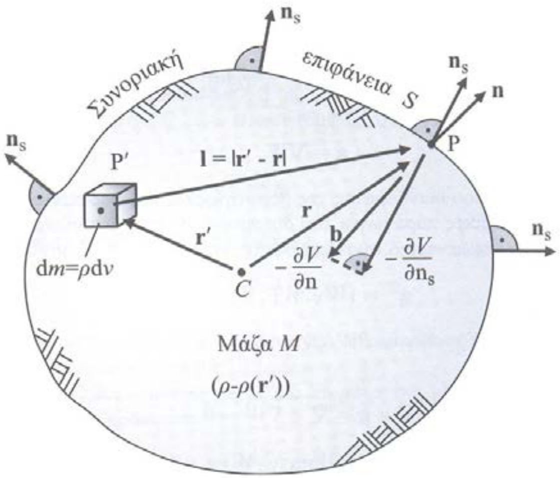
Υπολογισμοί για το δυναμικό έλξης
Ολοκληρωματικός τύπος του Gauss

- Συνδέει την παράγωγο του δυναμικού έλξης V κατά τη διεύθυνση της εξωτερικής καθέτου n_s στη συνοριακή επιφάνεια S και τις παραγώγους δεύτερης τάξης του δυναμικού

$$\iint_S \frac{\partial V}{\partial n_S} dS = \iiint_v \Delta V dv = \iiint_v \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right) dv$$

Ροή διανύσματος βαρύτητας (gravitational flux)

- Η μάζα της Γης συνδέεται με τον όγκο διαμέσου της συνάρτησης της πυκνότητας $M = \iiint_v \rho(\mathbf{r}')dv$



Υπολογισμοί για το δυναμικό έλξης
Διαφορικές εξισώσεις Poisson και Laplace

- Στη θεωρία του δυναμικού αποδεικνύεται ότι η ροή ισούται

$$\iint_S \frac{\partial V}{\partial n_S}\, dS = -4\pi GM$$

- Συνδυάζοντας τις τρεις προηγούμενες εξισώσεις προκύπτει

$$\boxed{\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = -4\pi G\rho\left(\vec{\mathbf{r}}\,'\right)} \rightarrow \text{Διαφορική εξίσωση Poisson}$$

- Ενώ σε χώρο έξω από τις μάζες όπου ρ = 0 (εκτός της συνοριακής επιφάνειας S)

$$\boxed{\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = 0} \rightarrow \text{Διαφορική εξίσωση Laplace}$$

Υπολογισμοί για το δυναμικό έλξης
Διαφορικές εξισώσεις Poisson και Laplace

- **Έξω από τις μάζες** το δυναμικό, οι παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης είναι πεπερασμένες και **συνεχείς συναρτήσεις** → **Εξίσωση Laplace** → δυναμικό αρμονική συνάρτηση → **δυνατότητα ανάπτυξης σε σειρά** (σφαιρικές αρμονικές)

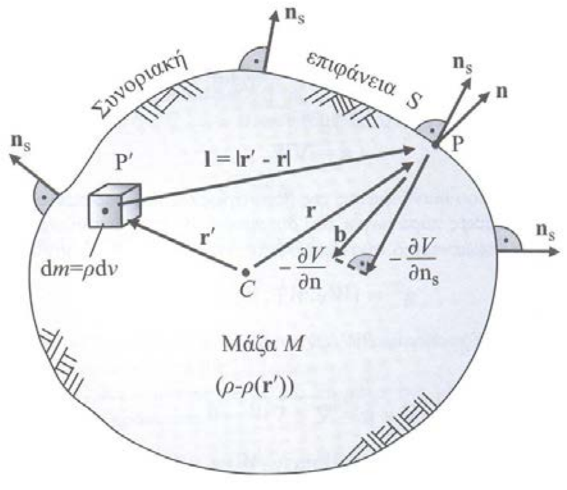
- **Μέσα στις μάζες** το δυναμικό και οι παράγωγοι πρώτης τάξης (συνιστώσες ελκτικής δύναμης) είναι συνεχείς. Κάποιες από τις **παραγώγους 2ης τάξης παρουσιάζουν ασυνέχειες** (συνάρτηση πυκνότητας) → **Εξίσωση Poisson**

- **Στη συνοριακή επιφάνεια S** το δυναμικό και οι παράγωγοι πρώτης τάξης είναι συνεχείς. **Οι δεύτερες παράγωγοι παρουσιάζουν ασυνέχεια** → **εξίσωση Poisson**

Υπολογισμοί για το δυναμικό έλξης
Θεώρημα του Green

- Ο συνδυασμός του ολοκληρωματικού τύπου του Gauss και της διαφορικής εξίσωσης του Poisson οδηγεί στην **έκφραση υπολογισμού του δυναμικού έλξης στο χώρο εκτός των μαζών**

$$V(\vec{\mathbf{r}})=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(V\frac{\partial}{\partial n_S}\left(\frac{1}{l}\right)-\frac{1}{l}\frac{\partial V}{\partial n_S}\right)dS$$



- αλλά και **στη συνοριακή επιφάνεια**

$$l=\left|\vec{\mathbf{r}}\,'-\vec{\mathbf{r}}\right| \qquad V(\vec{\mathbf{r}})=\frac{1}{2\pi}\iint_S\left(V\frac{\partial}{\partial n_S}\left(\frac{1}{l}\right)-\frac{1}{l}\frac{\partial V}{\partial n_S}\right)dS$$

- Παρέχει τη σύνδεση ανάμεσα σε μετρούμενα μεγέθη, στη συνάρτηση του δυναμικού *V* και στη συνοριακή επιφάνεια *S.*

Υπολογισμοί για το δυναμικό της βαρύτητας

- Το φυγοκεντρικό δυναμικό δεν είναι μία αρμονική συνάρτηση αφού

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial Z^2} = 2\omega^2$$

- Επομένως **το συνολικό δυναμικό της βαρύτητας δεν είναι σε καμία περίπτωση (εντός ή εκτός των μαζών) μία αρμονική συνάρτηση**

Εντός των μαζών ή πάνω στη συνοριακή επιφάνεια

$\Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega^2$ → Γενικευμένη εξίσωση Poisson

Εκτός των μαζών

$\Delta W = 2\omega^2$ → Γενικευμένη εξίσωση Laplace

- **Το δυναμικό της βαρύτητας δεν είναι δυνατό να αναπτυχθεί σε σειρά**

Αρχές ανάπτυξης δυναμικού έλξης σε σειρά

- **Το δυναμικό έλξης είναι αρμονική συνάρτηση** (ικανοποίηση εξίσωσης Laplace) εκτός των μαζών

- Είναι δυνατό να αναπτυχθεί σε **σειρά δυνάμεων** → εφαρμογή σε σφαιρική κλίμακα

$$V(\mathbf{r}) = \frac{GM}{r}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{n}\sum_{m=0}^{n}\left(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda\right)P_{nm}(\cos\theta)\right]$$

$P_{nm}(\cos\theta)$ — **Προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre** → οικογένεια λύσεων της διαφορικής εξίσωσης του Laplace

- Περισσότερα στην παρουσίαση «Σφαιρικές αρμονικές και γεωδυναμικά μοντέλα»