9.1 Να αποδειχθεί ότι η ενεργός τιμή της έντασης εναλλασσόμενου ημιτονοειδούς ρεύματος $i=i_0\sin\omega t$ είναι $i_{rms}=\dfrac{i_0}{\sqrt{2}}$.

Λύση

Έστω ωμική αντίσταση R στην οποία εφαρμόζεται ημιτονοειδής τάση $v=v_0\sin\omega t$, όπου $\omega=2\pi f=\dfrac{2\pi}{T}$. T, f είναι η περίοδος και η συχνότητα της ημιτονοειδούς τάσης. Η αντίσταση διαρρέεται από ημιτονοειδές ρεύμα $i=i_0\sin\omega t$, όπου $i_0=\dfrac{v_0}{R}$. Στην διάρκεια μιας περιόδου η ενέργεια που καταναλώνεται στην αντίσταση R όταν διαρρέεται από την συνεχές ρεύμα με ένταση i_{rms} είναι $W=i_{rms}^2RT$.

Κατά την διάρκεια ενός μικρού χρονικού διαστήματος dt η ενέργεια που καταναλώνεται στην αντίσταση είναι $dW=Ri^2dt=Ri_0^2\sin^2\omega t dt$ ή

$$dW=R\frac{T}{2\pi}i_0^2\sin^2\omega t d\omega t$$

Ισχύει $cos(a+b)=cosacosb\text{-}sinasinb$. Επομένως $cos2a=cos^2a\text{-}sin^2a=1\text{-}2sin^2a$. Άρα

$$dW=R\frac{T}{2\pi}i_0^2\sin^2\omega t d\omega t=R\frac{T}{4\pi}i_0^2\frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)d\omega t$$

Κατά την διάρκεια μιας περιόδου ($0\rightarrow T$) ό όρος $2\omega t$ γίνεται από $0\rightarrow 2\pi$.

Επομένως η ενέργεια που καταναλώνεται στην αντίσταση θα είναι

$$W=\int_0^{2\pi}R\frac{T}{4\pi}i_0^2(1-2\cos 2\omega t)d\omega t=R\frac{T}{4\pi}i_0^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos 2\omega t)d\omega t=$$

$$=R\frac{T}{4\pi}i_0^2\int_0^{2\pi}d\omega t-R\frac{T}{4\pi}i_0^2\int_0^{2\pi}2\cos 2\omega t d\omega t$$

Ισχύει $\quad R\dfrac{T}{4\pi}i_0^2\displaystyle\int_0^{2\pi}d\omega t=R\frac{T}{4\pi}i_0^2 2\pi=R\frac{T}{2}i_0^2$.

Επίσης $\displaystyle\int\cos ax dx=\frac{1}{a}\int\sin ax da x=\frac{1}{a}\sin ax$.

Επομένως $\displaystyle R\frac{T}{4\pi}i_0^2\int_0^{2\pi}2\cos 2\omega t d\omega t=R\frac{T}{4\pi}i_0^2\sin 2\omega t\Big|_0^{2\pi}=R\frac{T}{4\pi}i_0^2(\sin 4\pi-\sin 0)=0$

Τελικά $W=R\dfrac{T}{2}i_0^2$. Επομένως $i_{rms}^2RT=R\dfrac{T}{2}i_0^2\rightarrow$

$$\text{ή}\quad i_{rms}=\frac{i_0}{\sqrt{2}}$$

9.2 Να αποδειχτεί ότι η ενέργεια που αποθηκεύεται σε έναν πυκνωτή χωρητικότητας C όταν φορτιστεί σε τάση V είναι $W=\frac{1}{2}CV^2$

Για να αυξηθεί το φορτίο και το δυναμικό σε έναν πυκνωτή πρέπει να παραχθεί έργο από μία εξωτερική πηγή για να μετακινηθούν φορτία. Εάν το δυναμικό του πυκνωτή είναι v το έργο dw που δαπανάται για να γίνει μία μετακίνηση φορτίου dq είναι $dw=vdq$. Ισχύει $C=\frac{q}{v}$ ή $q=Cv$ ή $dq=Cdv$. Επομένως $dw=Cvdv$

¨Αρα το έργο που δαπανάται κατά την φόρτιση του πυκνωτή από 0 σε V είναι Volt είναι $W=\int_0^V Cvdv = \frac{1}{2}Cv\Big|_0^V = \frac{1}{2}CV^2$.

9.3 Να αποδειχτεί ότι η ενέργεια που αποθηκεύεται σε ένα πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L όταν διαρρέεται από ρεύμα I είναι $W=\frac{1}{2}LI^2$.

Έστω ότι το πηνίο έχει συνδεθεί σε μία μεταβλητή πηγή συνεχούς τάσης. Υποθέτουμε ότι η ένταση του ρεύματος i αυξάνεται σταδιακά από το 0 έως κάποια τελική τιμή I. Καθώς το ρεύμα που περνάει μέσα από το πηνίο αυξάνει αναπτύσσεται σε αυτό μια ηλεκτρεγερτική δύναμη εξ αυτεπαγωγής με τιμή $E=-L\frac{di}{dt}$ η οποία έχει πολικότητα ώστε να είναι αντίθετη με την αύξηση της έντασης του ρεύματος. Επομένως από την πηγή τάσης πρέπει να δαπανηθεί ενέργεια για να περάσει το ρεύμα από το πηνίο. Η ενέργεια που δαπανάται σε χρονικό διάστημα dt είναι

$$dW = Pdt = -Eidt = iL\frac{di}{dt}dt = Lidi$$

Επομένως η συνολική ενέργεια που δαπανάται είναι

$$W=\int_0^I Lidi = L\int_0^I idi = \frac{1}{2}Li^2\Big|_0^I$$

ή

$$W=\frac{1}{2}LI^2$$