

## Διανυσματικοί Χώροι

**Αλγεβρική Δομή:** Ένα σύνολο εφοδιασμένο με συναρτήσεις που έχουν ως πεδίο ορισμού αυτό το σύνολο. Τις συναρτήσεις αυτές ονομάζουμε πράξεις. Οι πιο συνήθεις Αλγεβρικές Δομές είναι οι Ομάδες, οι Δακτύλιοι, Τα Σώματα και οι Διανυσματικοί Χώροι.

**Ομάδα**  $A$  : Αλγεβρική δομή με μία κλειστή, διμερή πράξη “\*” η οποία

- Είναι Προσεταιριστική

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

για κάθε  $a, b, c \in A$

- Έχει Ουδέτερο στοιχείο (συμβολ. “0” ή “1”)

$$a * 0 = 0 * a = a$$

- Είναι Συμμετρική

Για κάθε  $a \in A$  υπάρχει  $a' \in A$  ώστε  $aRa' = a'Ra = 0$  (Όπου “0” το ουδέτερο στοιχείο)

Αν η πράξη είναι Μεταθετική η ομάδα ονομάζεται **Αβελιανή**

## Παραδειγματα Ομάδων

- i. Το σύνολο των **Φυσικών Αριθμών** ως προς την πράξη της πρόσθεσης είναι Αβελιανή Ομάδα με ουδέτερο στοιχείο το 0.  $(a * b) * c = a * (b * c)$   
Δεν είναι ομάδα με την πράξη του πολλαπλασιασμού. (γιατί;;;)
- ii. Οι Ρητοί, οι Πραγματικοί, οι Μιγαδικοί είναι Προσθετικές Αβελιανές Ομάδες. Είναι επίσης Πολλαπλασιαστικές Ομάδες χωρίς το Μηδεν!
- iii. Οι Πίνακες ίδιων διαστάσεων είναι Προσθετικές Ομάδες.

**Δακτύλιος** ονομάζεται η αλγεβρική δομή  $(R, +, *)$  που αποτελείται από ένα σύνολο  $R$  και δύο κλειστές πράξεις  $+, *$  τις οποίες συχνά αποκαλούμε “πρόσθεση” και “πολλαπλασιασμό” και για τις οποίες ισχύουν:

A.  $(R, +)$  είναι Αβελιανή

B. Για τον πολλαπλασιασμό “ $*$ ” ισχύουν

1.  $(a * b) * c = a * (b * c)$  (Προσεταιριστική Ιδιότητα)

2.  $1 \in R: 1 * a = a * 1 = a$  (Ουδέτερο Στοιχείο)

C. Ο πολλαπλασιασμός είναι **Επιμεριστικός** ως προς την πρόσθεση

$$a * (b + c) = a * b + a * c, \quad (a + b) * c = a * c + b * c$$

Ένας δακτύλιος καλείται **Μεταθετικός Δακτύλιος** αν επιπλέον ισχύει η μεταθετική ιδιότητα για την πράξη του πολλαπλασιασμού, δηλαδή:

$$a * b = b * a \quad \text{για κάθε } a, b \in R$$

**Σώμα** ονομάζεται ο δακτύλιος  $(F, +, *)$  όταν για κάθε στοιχείο του  $F$  εκτός του “0” υπάρχει ο πολλαπλασιαστικός αντίστροφος:

Για κάθε  $a \in F \setminus \{0\}$  υπάρχει  $b \in F \setminus \{0\}$  ώστε  $a * b = b * a = 1$

Τα σύνολα των ρητών, των πραγματικών και των μιγαδικών (**Q, R, C**) με τις συνηθείς πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αποτελούν σώματα.

## Διανυσματικός Χώρος

Ένα σύνολο  $V$  ονομάζεται διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα  $K$  αν

I.  $(V, +)$  είναι Αβελιανή Ομάδα

II. Για κάθε  $a \in K$ ,  $v \in V$  ορίζεται το στοιχείο  $a \cdot v \in V$  το οποίο ονομάζεται το οποίο ονομάζεται βαθμωτό πολλαπλάσιο του  $v$  επί το  $a$ , και ισχύουν οι ιδιότητες:

1.  $a(u+v) = au + av$  , για κάθε  $a \in K$ ,  $u, v \in V$
2.  $(a+b)u = au + bu$  , για κάθε  $a, b \in K$ ,  $u \in V$
3.  $a(bu) = (ab)u$  , για κάθε  $a, b \in K$ ,  $u \in V$
4.  $1 \cdot u = u$  , για κάθε  $u \in V$

## Παραδείγματα διανυσματικών χώρων

- i. Το σύνολο των πραγματικών  $\mathbb{R}$  επί του εαυτού του. Επίσης το σύνολο των μιγαδικών επί των πραγματικών και το σύνολο των μιγαδικών επί του εαυτού του
- ii. Το σύνολο  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in \mathbb{R}\}$  επί του  $\mathbb{R}$  αν ορίσουμε
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$
$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$
- iii. Το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού αν ορίσουμε
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$
- iv. Το σύνολο των πραγματικών πολυωνύμων μιας μεταβλητής
- v. Το σύνολο  $M^{m \times n}$  των πινάκων με διαστάσεις  $m \times n$