Ορίζουσα - Αντίστροφος πίνακας

Έστω A, B τετραγωνικοί πίνακες $n \times n$. Αν ισχύουν

$AB = I$, $BA = I$

τότε ο B ονομάζεται αντίστροφος του A και συμβολίζεται A^{-1}

Αν υπάρχει ο αντίστροφος ενός πίνακα τότε αυτός είναι μοναδικός.

Από τις παραπάνω σχέσεις είναι προφανές ότι ο αντίστροφος του B είναι ο A. Δηλαδή

$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

Όταν ένας πίνακας έχει αντίστροφο λέγεται αντιστρέψιμος

Αν έχουμε δυο πίνακες A, B τετραγωνικούς $n \times n$, αντιστρέψιμους τότε ισχύουν

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$\left(A^{k}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{k} = A^{-k}$

Αντιστροφος 2×2

Αν έχουμε τον πίνακα

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

τότε για να είναι αντιστρέψιμος θα πρεπει να υπάρχει πίνακας

$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$

ώστε $AX = I$ και $XA = I$ δηλαδή

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτουν

$$\begin{array}{ll} x = \frac{d}{ad-bc} & y = \frac{-b}{ad-bc} \\ z = \frac{-c}{ad-bc} & w = \frac{a}{ad-bc} \end{array} \qquad (1)$$

Ορίζουσα 2×2

Είναι προφανές ότι για να υπάρχει ο αντίστροφος του A ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι

$ad - bc \neq 0$

Ο αριθμός $ad-bc$ ονομάζεται *Ορίζουζα* του A και συμβολίζεται ως $|A|$ή $\det(A)$

Ορίζουσα $n \times n$

Ιδιότητες

Η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα A, διαστάσεων $n \times n$ είναι ένας μοναδικός αριθμός με τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Η ορίζουσα εξαρτάται γραμμικά από την πρώτη γραμμή της. Δηλαδή ισχύει:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

και

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Η γραμμική εξάρτηση όπως θα φανεί και από τις παρακάτω ιδιότητες τελικά ισχύει για κάθε γραμμή και για κάθε στήλη.

Προσοχή! Το πρώτο σκέλος της ιδιότητας ΔΕΝ *σημαίνει* $|A+B| = |A|+|B|$*!!!*

Γενικά ισχύει$|A+B| \neq |A|+|B|$ενώ από τη δεύτερη ιδιότητα προκύπτει πως $|kA| = k^n\,|A|$

2. Αν ο πίνακας A έχει δυο γραμμές ή στήλες ίσες ή ανάλογες, τότε έχε ορίζουσα ίση με 0.

Για παράδειγμα:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0\ , \begin{vmatrix} 1 & -2 & x \\ -1 & 2 & y \\ 5 & 10 & z \end{vmatrix} = 0$$

3. Αν ένας πίνακας έχει μία γραμμή ή μία στήλη που αποτελείται μόνο από μηδενικά στοιχεία, τότε η ορίζουσά του ισούται με 0.

$$\begin{vmatrix} s & t & x \\ 0 & 0 & 0 \\ y & z & w \end{vmatrix} = 0$$

4. Ένας τριγωνικός πίνακας έχει ορίζουσα ίση με το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου. Το ίδιο ισχύει και για τους διαγώνιους πίνακες.

$$\begin{vmatrix} a & x & z \\ 0 & b & y \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ k & b & 0 \\ l & m & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

5. Αν οι γραμμές ή οι στήλες ενός πίνακα δεν είναι όλες γραμμικά ανεξάρτητες τότε ο πίνακας έχει ορίζουσα ίση με 0. (Σε αυτή την περίπτωση αποδεικνυεται ότι *ο πίνακας δεν ειναι αντιστρέψιμος*. Ισχύει και το αντίστροφο)

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ ax_{11}+bx_{21} & ax_{12}+bx_{22} & ax_{13}+bx_{23} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & kx_{11}+lx_{12} \\ x_{21} & x_{22} & kx_{21}+lx_{22} \\ x_{31} & x_{32} & kx_{31}+lx_{32} \end{vmatrix} = 0$$

6. Αν σε ένα πίνακα εφαρμόσουμε στοιχειώδεις πράξεις γραμμών ή αντίστοιχες πράξεις μεταξύ στηλών, εκτός από εναλλαγές, τότε ο πίνακας που προκύπτει έχει ορίζουσα ίση με τον αρχικό.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$$

7. Αν εναλλάξουμε δύο διαδοχικές γραμμές ή στήλες, η ορίζουσα που προκύπτει είναι αντιθετη της αρχικής

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{11} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{11} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{vmatrix}$$

8. Η ορίζουσα του γινομένου δύο πινάκων $n \times n$ ισούται με το γινόμενο των επιμέρους οριζουσών

$$|\mathrm{AB}| = |\mathrm{A}|\,|\mathrm{B}|$$

9. Η ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα ισούται με την ορίζουσα του ανάστροφού του.

$$\left|A^T\right| = |A|$$

10. Δύο όμοιοι πίνακες έχουν την ίδια ορίζουσα.

Παράδειγμα 1. Να υπολογιστεί η οριζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε

Αφαιρώντας την πρώτη γραμμή από τις υπόλοιπες παίρνουμε:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & b-1 & c-1 \\ 0 & a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 0 & a^3-1 & b^3-1 & c^3-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & b-1 & c-1 \\ 0 & (a-1)(a+1) & (b-1)(b+1) & (c-1)(c+1) \\ 0 & (a-1)\left(a^2+a+1\right) & (b-1)\left(b^2+b+1\right) & (c-1)(c+c+1) \end{vmatrix}$$

Αφαιρώντας την 2η γραμμή πολλαπλασιασμένη με $(a+1)\left(a^2+a+1\right)$από την 3η και την 4η γραμμή αντίστοιχα έχουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & b-1 & c-1 \\ 0 & 0 & (b-1)(b-a) & (c-1)(c-a) \\ 0 & 0 & (b-1)\left(b^2+b-a^2-a\right) & (c-1)\left(c+c-a^2-a\right) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & b-1 & c-1 \\ 0 & 0 & (b-1)(b-a) & (c-1)(c-a) \\ 0 & 0 & (b-1)(b-a)(b+a+1) & (c-1)(c-a)(c+a+1) \end{vmatrix}$$

Αφαιρώντας την 3η γραμμή από την 4η πολλαπλασιασμένη με $(b+a+1)$έχουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & b-1 & c-1 \\ 0 & 0 & (b-1)(b-a) & (c-1)(c-a) \\ 0 & 0 & 0 & (c-1)(c-a)(c-b) \end{vmatrix}$$

Οπότε η ορίζουσα έχει τώρα άνω τριγωνική μορφή και το αποτέλεσμα είναι το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου

$$|A| = (a-1)(b-1)(b-a)(c-1)(c-a)(c-b)$$

Ελάσσονες Ορίζουσες-Αλγεβρικά Συμπληρώματα

Έστω ένας πίνακας A διαστάσεων $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ Ελάσσονα ορίζουσα του A ονομάζουμε την ορίζουσα που προκύπτει αν διαγράψουμε μια γραμμή και μια στήλη του A. Για παράδειγμα αν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη του προηγούμενου πίνακα προκύπτει η ελάσσων ορίζουσα

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Για κάθε στοιχείο a_{ij} του πίνακα υπάρχει ένας αριθμός A_{ij} που προκύπτει αν στην ορίζουσα του πίνακα διαγράψουμε την i γραμμή και τηνj στήλη στις οποίες βρίσκεται το στοιχείο και πολλαπλασιάσουμε με $(-1)^{i+j}$. Ο $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ονομάζεται *αλγεβρικό συμπλήρωμα του* a_{ij} *ή συμπαράγοντας του* a_{ij} .

Παράδειγμα 2. *Έστω ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Οι ελασσονες ορίζουσες και τα αλγεβρικά συμπληρώματα του πίνακα θα είναι:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 6\ A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6\ A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

Συνεχίζοντας στις επόμενες γραμμές έχουμε

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -1$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-1,\ A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=-1$$
$$M_{23}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=3,\ A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-3$$
$$M_{31}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-2,\ A_{31}=(-1)^{3+1}M_{21}=-2$$
$$M_{32}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-2,\ A_{22}=(-1)^{3+2}M_{22}=2$$

$$M_{33}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2,\ A_{33}=(-1)^{3+3}M_{23}=2$$

Ανάπτυγμα της Ορίζουσας σε Συμπαράγοντες (Αλγεβρικά Συμπληρώματα)

Η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα $n\times n$ είναι ένας *γραμμικός συνδυασμός* των στοιχείων της πρώτης γραμμής και των συμπαραγόντων τους. Δηλαδή αν

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

τότε

$$\det(A)=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+...+a_{1n}A_{1n}$$

Παράδειγμα 3: Στον πίνακα του προηγούμενου παραδείγματος$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 3 & 0 & -1\end{bmatrix}$

θα έχουμε

$$\det(A)=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 0 & -1\end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & -2\\ 3 & 0\end{vmatrix}+$$
$$0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-2+6+0=4$$

Με τον παραπάνω τρόπο η ορίζουσα 3×3 γράφεται σαν ανάπτυγμα οριζουσών 2×2.

Μια ορίζουσα μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός μιας οποιαδήποτε γραμμής ή στήλης της.

Παράδειγμα 4: Η ορίζουσα του παραπάνω πίνακα μπορεί να γραφτεί και ως ανάπτυγμα της 2ης στήλης οπότε τότε θα έχουμε:

$\det(A) = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} +$
$0(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$

Αντίστροφος πίνακας

Έστω ένας A τετραγωνικός πίνακας $n \times n$.

ΟA είναι αντιστρέψιμος αν και μονο αν $\det(A) \neq 0$

Ο αντίστροφος του A ισούται με

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 5: Για τον πίνακα του παραδείγματος 2 έχουμε

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$