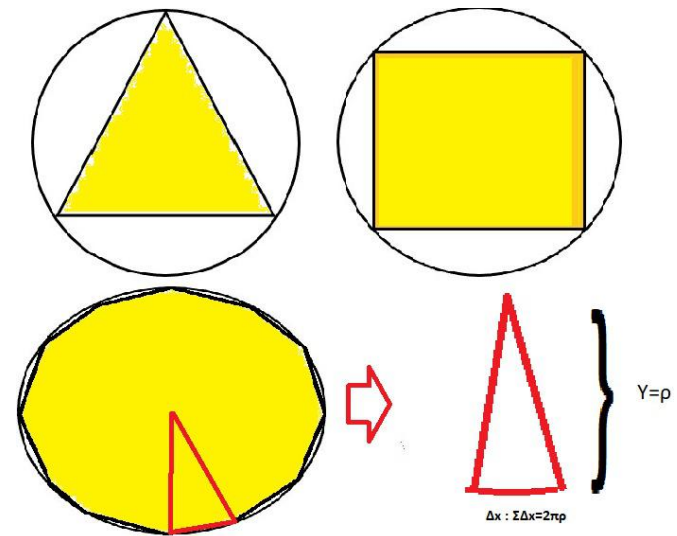


Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Ιστορική Διαδρομή

- Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι για τον υπολογισμό μιας επιφάνειας που περικλείονταν από μία μή-ευθεία καμπύλη μοίραζαν μια επιφάνεια σε τρίγωνα και παραλληλόγραμμα
- Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν υπολογίσει το εμβαδό του κύκλου $E = \pi r^2$ θεωρώντας τον κύκλο ως ένα πολύγωνο με “άπειρες” πλευρές. Στην ουσία χρησιμοποίησαν Διπλό Ολοκλήρωμα!



- Ο Αρχιμήδης θα ασχοληθεί με τις καμπύλες και συγκεκριμένα με δύο προβλήματα
 - Α. Τις εφαπτόμενες σε καμπύλη -----> Παράγωγος!
 - Β. Το Εμβαδό που ορίζει μια καμπύλη----->Ορισμένο Ολοκλήρωμα!!!

Η εποχή του Αρχιμήδη στερείται τα εργαλεία (Συναρτήσεις, Όρια κλπ) που θα τον βοηθούσαν να θεμελιώσει τη θεωρία του και αργότερα ο Μεσαίωνας θα σβήσει για αιώνες τα επιστημονικά και τεχνολογικά επιτεύγματα.



Sir Isaac Newton

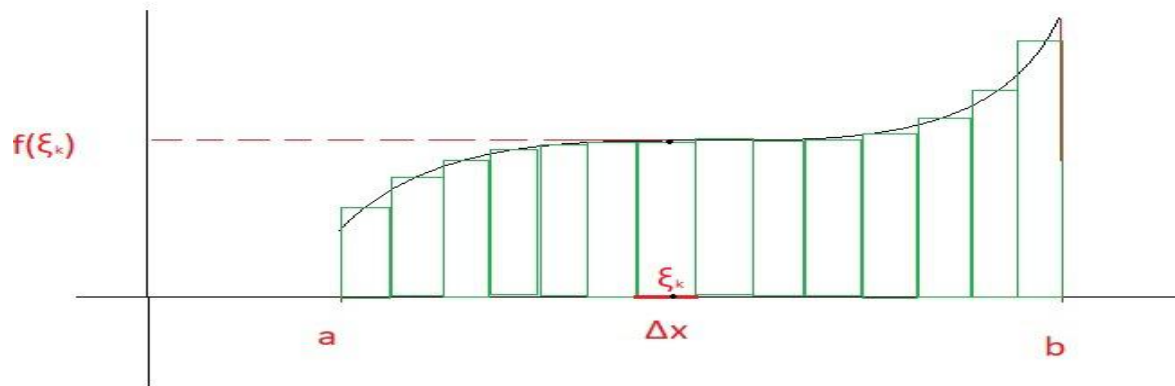
1643-1727

Gottfried Wilhelm von Leibniz

1646-1716

Οι ανταγωνιστές Newton και Leibniz πατώντας σε πεφωτισμένους μαθηματικούς δύο αιώνων θα εισάγουν την έννοια του ολοκληρώματος. Τον τελικό ορισμό θα δώσει το 19^ο αιώνα ο Riemann

Ορισμός



και ύψος $f(\xi_j)$

Το άθροισμα $\sum_{j=1}^n E_j = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \Delta x$ είναι μια προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Η προσέγγιση γίνεται ακριβέστερη όσο η διαμέριση αυξάνεται.

Το όριο του αθροίσματος για $n \rightarrow \infty$ μας δίνει το ακριβές ζητούμενο εμβαδό

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \Delta x$$

*Για την ιστορία το ολοκλήρωμα ορίζεται ως το κοινό όριο τριών σειρών. Δύο που λαμβάνουν ως ύψος το μέγιστο και το ελάχιστο αντίστοιχα της συνάρτησης σε κάθε διάστημα και μία με τυχαία ενδιάμεση τιμή, όπως είδαμε παραπάνω

Για τον υπολογισμό της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη της συνάρτησης, τον οριζόντιο άξονα και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$

Διαμερίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε n ίσα μέρη

$[a, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, b]$

Για τυχαίο* $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ δημιουργούμε τα

παραλληλόγραμμα E_j με βάση $\Delta x = x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n}$

Αντιπαράγωγος - Αόριστο Ολοκλήρωμα και Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

➤ Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής τότε υπάρχει συνάρτηση F ώστε $F'(x) = f(x)$

Η F ονομάζεται Αντιπαράγωγος ή Παράγουσα της f και συμβολίζουμε

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

➤ Αν μια συνάρτηση έχει συνεχή παράγουσα σε κάποιο διάστημα $[a, b]$ τότε

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ιδιότητες

$$1. \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$2. \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = \int_a^{\xi} f(x) dx + \int_{\xi}^b f(x) dx, \quad \xi \in (a, b)$$

$$4. f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$5. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Παράδειγμα 1:

$$\int_1^e (\ln x - 3x) dx = \int_1^e \ln x dx - 3 \int_1^e x dx = \frac{1}{x} \Big|_1^e - 3 \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = (e^{-1} - 1) - \left(\frac{3}{2} e^2 - \frac{3}{2} \right) = -\frac{3}{2} e^2 + e^{-1} + \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 2:

$$\int_0^5 |x - 3| dx = \int_0^3 |x - 3| dx + \int_3^5 |x - 3| dx = \int_0^3 |x - 3| dx + \int_3^5 |x - 3| dx = \int_0^3 (3 - x) dx + \int_3^5 (x - 3) dx$$

Υπολογισμός Εμβαδού

Για τον υπολογισμό του εμβαδού της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη της συνάρτησης και τον οριζόντιο άξονα θα πρέπει να πάρουμε την απόλυτη τιμή της συνάρτησης δηλαδή το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

