ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

$\int f'(x)\,dx = f(x) + c$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
2. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$
3. $\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$ (Παραγοντική Ολοκλήρωση)

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση (αλλαγή μεταβλητής)

Όταν το ολοκλήρωμα περιέχει μία σύνθετη συνάρτηση, δηλαδή είναι της μορφής $\int f(g(x))\,dx$

1. Θέτουμε $g(x) = u(x)$
2. Υπολογίζουμε το νέο διαφορικό για το οποίο ισχύει $u' = g'(x) \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = g'(x) \Leftrightarrow du = g'(x)\,dx$
3. Αντικαθιστούμε u, du στο ολοκλήρωμα και λύνουμε
4. Στο τελικό αποτέλεσμα αντικαθιστούμε όπου u με την ποσότητα x που αντιστοιχεί.

Παράδειγμα 1

$I_2 = \int xe^{x^2}dx$

Θέτω $u(x) = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2xdx$

Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα έχουμε:

$I = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx = I = \frac{1}{2}\int e^u dx = \frac{1}{2}e^u + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

Παράδειγμα 2

$I = \int x^2 \cos x^3 dx$

Θέτω $u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2dx$

και το ολοκλήρωμα τότε γίνεται:

$I = \frac{1}{3}\int \cos u dx = -\frac{1}{3}\sin u + C = -\frac{1}{3}\sin x^3 + C$

Παράδειγμα 3

$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}dx$

θέτω $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$

τα νέα άκρα του ολοκληρώματος θα είναι $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$

$I = -\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{u}du = [\ln|u|]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = 0$

Παράδειγμα 4

$I = \int \frac{1}{1+x^2}dx$

Εδώ έχουμε μια ιδιόμορφη ρητή συνάρτηση με παρονομαστή που δεν παραγοντοποιείται περαιτέρω γιατί έχει μιγαδικές ρίζες. Ένα συχνό *λάθος* είναι η αντικατάσταση $u = 1 + x^2$.

Η ΣΩΣΤΗ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ: $x = \tan u$ (1)

Οπότε

$x' = \frac{1}{\cos^2 u} \Rightarrow \frac{dx}{du} = \frac{1}{\cos^2 u} \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos^2 u}$ (2)

(1),(2)$\Rightarrow$ $I = \int \frac{1}{1+\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}} \cdot \frac{du}{\cos^2 u} = \int \frac{1}{\frac{\cos^2 u + \sin^2 u}{\cos^2 u}} \cdot \frac{du}{\cos^2 u} = \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 u}} \cdot \frac{du}{\cos^2 u} = \int du = \arctan x + C$

Η συνάρτηση τόξο-εφαπτομένης του x,$\arctan(x)$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της εφαπτομένης στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Όταν έχουμε ολοκλήρωμα της μορφής $I = \int \frac{1}{a^2+b^2x^2} dx$ αντικαθιστούμε με $x = \frac{a}{b} \tan u$

Παράδειγμα *5*

Ομοίως υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

με την αντικατάσταση

$x = \sin u \Rightarrow dx = \cos u$

οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}} \cos u du = \int \frac{1}{\sqrt{\cos^2 u}} \cos u du = \int du = u + C = \arcsin x + C.$

Γενικά αν έχουμε ολοκλήρωμα της μορφής $I = \int \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} dx$ αντικαθιστούμε με $x = \frac{a}{b} \sin u$

Παραγοντική Ολοκλήρωση

Από τις ιδιότητες των παραγώγων θυμόμαστε ότι

$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x)$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση έχουμε τον *τύπο της παραγοντικής ολοκλήρωσης*:

$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

Παραγοντική Ολοκλήρωση χρησιμοποιούμε συνήθως όταν η μία από τις δύο συναρτήσεις είναι εκθετική ή τριγωνομετρική (ημίτονο ή συνημίτονο) ή πολυωνυμική. Τότε αυτή την συνάρτηση την γράφουμε ως παράγωγο άλλης συναρτησης και εφαρμόζουμε τον τύπο όσες φορές χρειαστεί για να επιλυθεί το ολοκλήρωμα

Παράδειγμα 6

$I = \int x^2 \sin(2x) dx = \int x^2 \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]' dx =$

$= -\frac{1}{2}x^2 \cos(2x) + \frac{1}{2}\int \left(x^2\right)' \cos(2x) dx = -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}\int 2x\cos(2x) dx =$

$= -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \int x\cos(2x) dx$

Επαναλαμβάνοντας άλλη μία φορά την παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε:

$I = -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \int x \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]' dx =$

$= -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x) - \frac{1}{2}\int x' \sin(2x) dx =$

$= -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x) - \frac{1}{2}\int \sin(2x) dx =$

$= -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C$

Παράδειγμα 7

$I=\int x\left(\ln x\right)^2 dx=\int x\left(\ln x\right)^2 dx=\int \left(\frac{x^2}{2}\right)'\left(\ln x\right)^2 dx=$

$=\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)^2-\int \frac{x^2}{2}\left[\left(\ln x\right)^2\right]' dx=\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)^2-\int \frac{x^2}{2}\left[2\left(\ln x\right)\frac{1}{x}\right]dx=$

$=\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)^2-\int x\left(\ln x\right)dx=\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)^2-\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\left(\ln x\right)dx=$

$\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)^2-\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)+\int\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\ln x\right)' dx=\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)^2-\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)+\int\left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{x}dx=$

$=\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)^2-\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)+\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)^2-\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)+\frac{x^2}{2}+C$

Παράδειγμα 8

για $x>0$

$I=\int \ln x dx=\int 1\ln x dx=\int x'\ln x dx\Rightarrow$

$I=x\ln x-\int x\left(\ln x\right)' dx=x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+C$

Συνήθως στην παραγοντική αποφεύγουμε να εκφράσουμε μια πολυωνυμική συνάρτηση ως παράγωγο γιατί με αυτόν τον τρόπο αυξάνει ο βαθμός του πολυωνύμου. Όμως αν η άλλη συνάρτηση είναι λογαριθμική τότε επιλέγουμε το πολυώνυμο.

Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων Όταν έχουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int \frac{n(x)}{d(x)}dx$ όπου n, d είναι πολυώνυμα με τον βαθμό του $d\left(x\right)$να είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του $n\left(x\right)$ έχουμε δύο περιπτώσεις

- $d'\left(x\right)=n\left(x\right)\Rightarrow\int\frac{n(x)}{d(x)}dx=\int\frac{d'(x)}{d(x)}dx=ln\left|d\left(x\right)\right|+C.$

  Παράδειγμα 9

  $I=\int\frac{2x+3}{x^2+3x+7}dx=\int\frac{\left(x^2+3x+7\right)'}{x^2+3x+7}dx=\ln\left|x^2+3x+7\right|+C$

- $d'\left(x\right)\neq n\left(x\right)$ Στην περίπτωση αυτή προσπαθούμε να αναλύσουμε τον παρονομαστή σε παράγοντες και να "σπάσουμε" την ρητή συνάρτηση σε απλούστερα κλάσματα

  Παράδειγμα 10

$I=\int\frac{2x+1}{x^2+x+2}dx=\int\frac{2x+1}{(x+2)(x-1)}dx$

Αναζητούμε απλούστερες συναρτήσεις με παρονομαστές $(x+2)$και $(x-1)$. Έτσι γράφουμε:

$\frac{2x+1}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}=\frac{(A+B)x+(-A+2B)}{(x+2)(x-1)}$

$\Rightarrow \begin{array}{c} A+B=2 \\ -A+2B=1 \end{array}\Big\}\Rightarrow \begin{array}{c} A=1 \\ B=1 \end{array}\Big\}$

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται

$I=\int\frac{1}{(x+2)}dx+\int\frac{1}{(x-1)}dx=\ln\left|x+2\right|+\ln\left|x-1\right|+C$

Ιδιαίτερη προσοχη θέλει όταν ένας παράγοντας είναι δευτέρου βαθμού και δεν αναλύεται περισσότερο (όταν έχει δηλαδη μιγαδικές ρίζες) ή αν κάποιος παράγοντας ειναι υψωμένος σε κάποια δύναμη (έχει πολλαπλότητα). Ο αριθμητής πρέπει να ειναι κατά σε βαθμό μία μονάδα μικροτερος από τον παρονομαστή

Παράδειγμα 11

$I=\int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)}dx$

Τότε το κλάσμα αναλύεται ως εξής:

$\frac{x-1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$

ή ισοδύναμα

$\frac{x-1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{\mathrm{K}}{x-1}+\frac{Bx}{x^2+1}+\frac{C}{x^2+1}$

διαλέγουμε έναν από τους δύο τρόπους και συνεχιζουμε όπως παραπάνω για την επίλυση του ολοκληρώματος

Παράδειγμα 12

$I=\int \frac{x^2+3x+3}{(x-2)^2(x+1)}dx$

Τότε το κλάσμα αναλύεται ως εξής:

$\frac{x^2+3x+3}{(x-2)^2(x+1)}=\frac{Ax+B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x+1}$

ή ισοδύναμα

$\frac{x^2+3x+3}{(x-2)^2(x+1)}=\frac{\mathrm{K}}{(x-2)^2}+\frac{\Lambda}{(x-2)}+\frac{C}{x+1}$

διαλέγουμε έναν από τους δύο τρόπους και συνεχιζουμε

Συνήθως στα ολοκληρώματα επιλέγουμε τη δεύτερη ανάλυση, δηλαδή γράφουμε

$\frac{x^2+3x+3}{(x-2)^2(x+1)}=\frac{A}{(x-2)^2}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-2)(x+1)+C(x-2)^2}{(x-2)^2(x+1)}\Rightarrow$

$A\left(x+1\right)+B\left(x-2\right)\left(x+1\right)+C\left(x-2\right)^2=x^2+3x+3\Rightarrow$

$A\left(x+1\right)+B\left(x^2-x-2\right)+C\left(x^2-4x+4\right)=x^2+3x+3\Rightarrow$

$\left(B+C\right)x^2+\left(A-B-4C\right)x+\left(A-2B+4C\right)=x^2+3x+3\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{c} B+C=1 \\ A-B-4C=3 \\ A-2B+4C=3 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c} A=\frac{13}{3} \\ B=\frac{8}{9} \\ C=\frac{1}{9} \end{array}\right\}$$

Οπότε το ολοκλήρωμά μας γράφεται:

$I=\int\left(\frac{13}{3(x-2)^2}+\frac{8}{9(x-2)}+\frac{1}{9(x+1)}\right)dx\Rightarrow$

$I=-\frac{13}{3}\left(x-2\right)+\frac{8}{9}\ln\left|x-2\right|+\frac{1}{9}\ln\left|x+1\right|+C$

Παράδειγμα 13

$I=\int \frac{1}{e^x+2e^{-x}+3}dx$

Αν θέσουμε $u=e^x$ τότε$du=e^x dx$ και το ολοκλήρωμα γίνεται

$I=\int \frac{e^x}{e^x(e^x+2e^{-x}+3)}dx=\int \frac{e^x}{(e^{2x}+3e^x+2)}dx=\int \frac{1}{u^2+3u+2}du\Rightarrow$

$I=\int \frac{1}{(u+1)(u+2)}du$

Αναλύοντας το κλάσμα έχουμε

$\frac{1}{(u+1)(u+2)}=\frac{\mathrm{A}}{(u+1)}+\frac{\mathrm{B}}{(u+2)}\Rightarrow\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}\right)u+(2\mathrm{A}+\mathrm{B})=1\Rightarrow \left.\begin{array}{c}\mathrm{A}=1\\ \mathrm{B}=-1\end{array}\right\}$

οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$\int\left(\frac{1}{(u+1)}-\frac{1}{(u+2)}\right)dx=\ln\left|u+1\right|+\ln\left|u+2\right|+C\Rightarrow$

$I=\ln\left(e^x+1\right)+\ln\left(e^x+2\right)+C$