Πα.Δα.
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Υπολογιστών

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Δημήτριος Νικολόπουλος,
Καθηγητής
Περιβαλλοντική και Ιατρική Φυσική

Εξίσωση και κλίση ευθείας

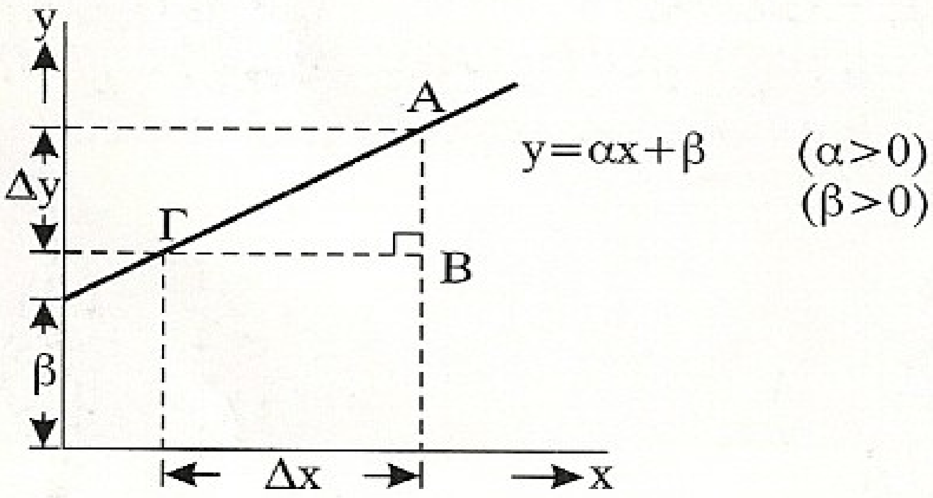
Έστω ότι έχουμε δυο σταθερές α και β τότε η γενική εξίσωση ευθεία είναι:

$$y = \alpha \cdot x + \beta$$

Η σταθερά α που είναι συντελεστής του x καλείται κλίση της ευθείας.

$$\alpha = \frac{dy}{dx}$$

Κλίση ευθείας

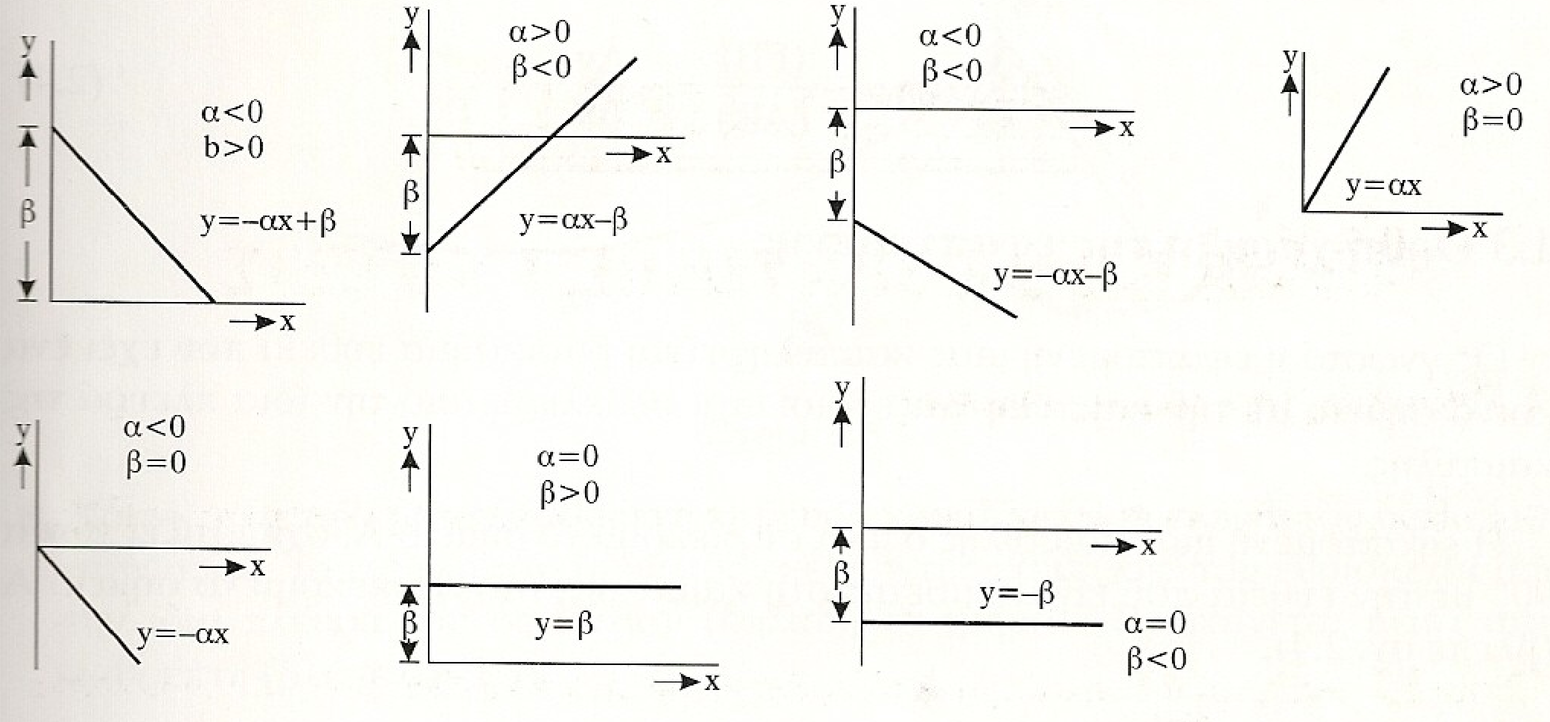


Σχήμα 2.1.

Αφού γίνει η γραφική παράσταση σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο (ΑΒΓ) του οποίο η υποτείνουσα είναι ένα μέρος της ευθείας. Η κλίση της ευθείας είναι ο λόγος των πλευρών ΑΒ και ΒΓ, οι οποίες πλευρές μετρούνται στους άξονες x και y αντίστοιχα, ανάλογα με τις κλίμακες και τις μονάδες που υπάρχουν στους άξονες.

$$K = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

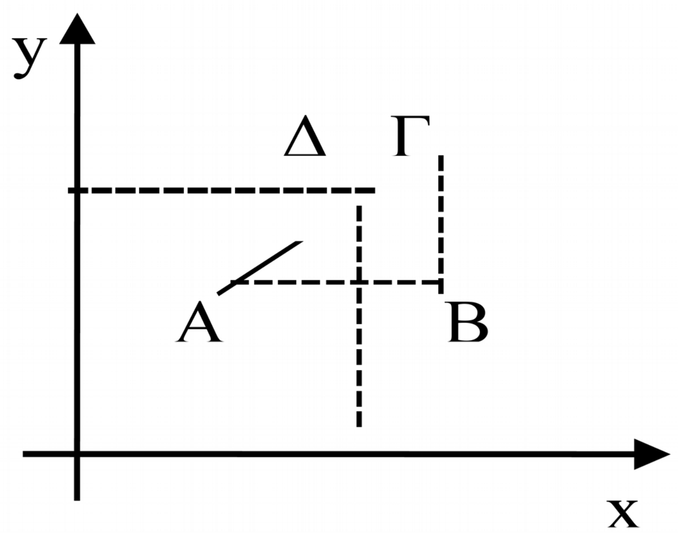
Μορφές ευθειών



Σχήμα 2.2

Εξίσωση και κλίση καμπύλης

Η κλίση μιας καμπύλης μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο, και επομένως για να βρεθεί η κλίση της καμπύλης πρέπει πρώτα να δοθούν οι συντεταγμένες του σημείου για το οποίο ζητείται η κλίση.



$$K = \frac{\Gamma B}{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

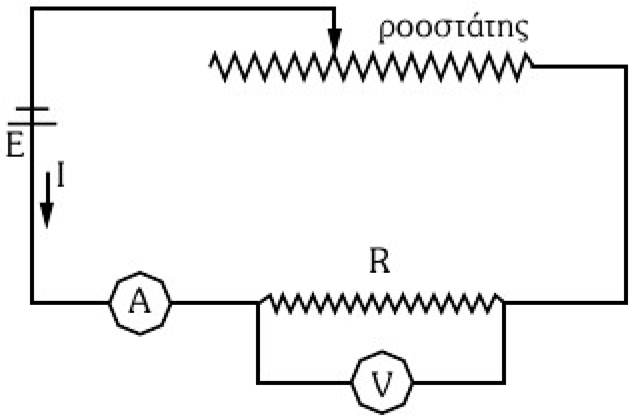
Η κλίση της καμπύλης στο σημείο Δ με συντεταγμένες (x_1,y_1) είναι ο λόγος (ΒΓ/ΒΑ). Τα μήκη (ΒΓ) και (ΑΒ) βρίσκονται πάνω στους άξονες y και x σύμφωνα με τις κλίμακες και τις μονάδες, που υπάρχουν σ' αυτούς τους άξονες. Η (ΑΓ) είναι η εφαπτόμενη στην καμπύλη στο σημείο $\Delta(x_1,y_1)$.

Παραδείγματα
(υπολογισμών μέσω γραφικών παραστάσεων ευθειών)

Εκτίμηση τιμής αντίστασης

Μία άγνωστη αντίσταση μπορεί να βρεθεί με τη βοήθεια της συνδεσμολογίας του πιο κάτω σχήματος

Το αμπερόμετρο A μετρά την ένταση του ρεύματος I, το βολτόμετρο V, (απείρου εσωτερικής αντίστασης) μετρά την τάση V στα άκρα της αντίστασης R και ο ρεοστάτης μας βοηθά να πραγματοποιήσουμε μία σειρά μετρήσεων οι οποίες καταχωρούνται στον πιο κάτω πίνακα.

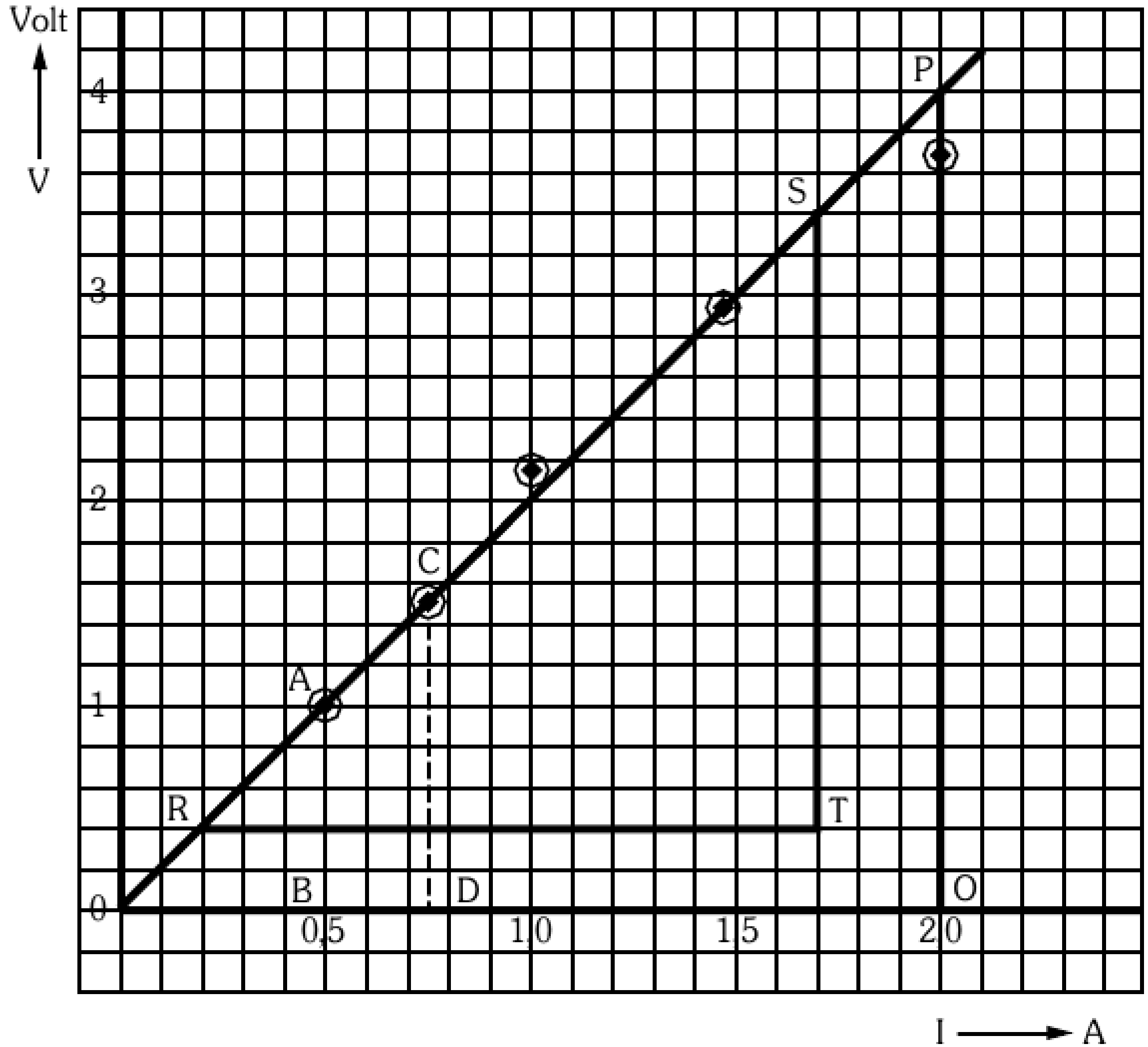


Πίνακας μετρήσεων

i	I_i A	V_i Volt	$R_i = \frac{V_i}{I_i}$ Ω	$\overline{R}$ Ω
1	0.50	1.05	2.10	2.04
2	0.75	1.45	1.90	
3	1.00	2.20	2.20	
4	1.50	3.05	2.03	
5	2.00	3.95	1.98	

Όπως φαίνεται στον πιο πάνω πίνακα η άγνωστη αντίσταση R μπορεί να βρεθεί με τη χρήση του νόμου του Ohm $\left(R = V/I\right)$. Για κάθε ζεύγος τιμών I, V υπολογίζεται η άγνωστη αντίσταση R και μετά ευρίσκεται η μέση τιμή:

Γραφική παράσταση i=i(V) [V-I] νόμος Ohm



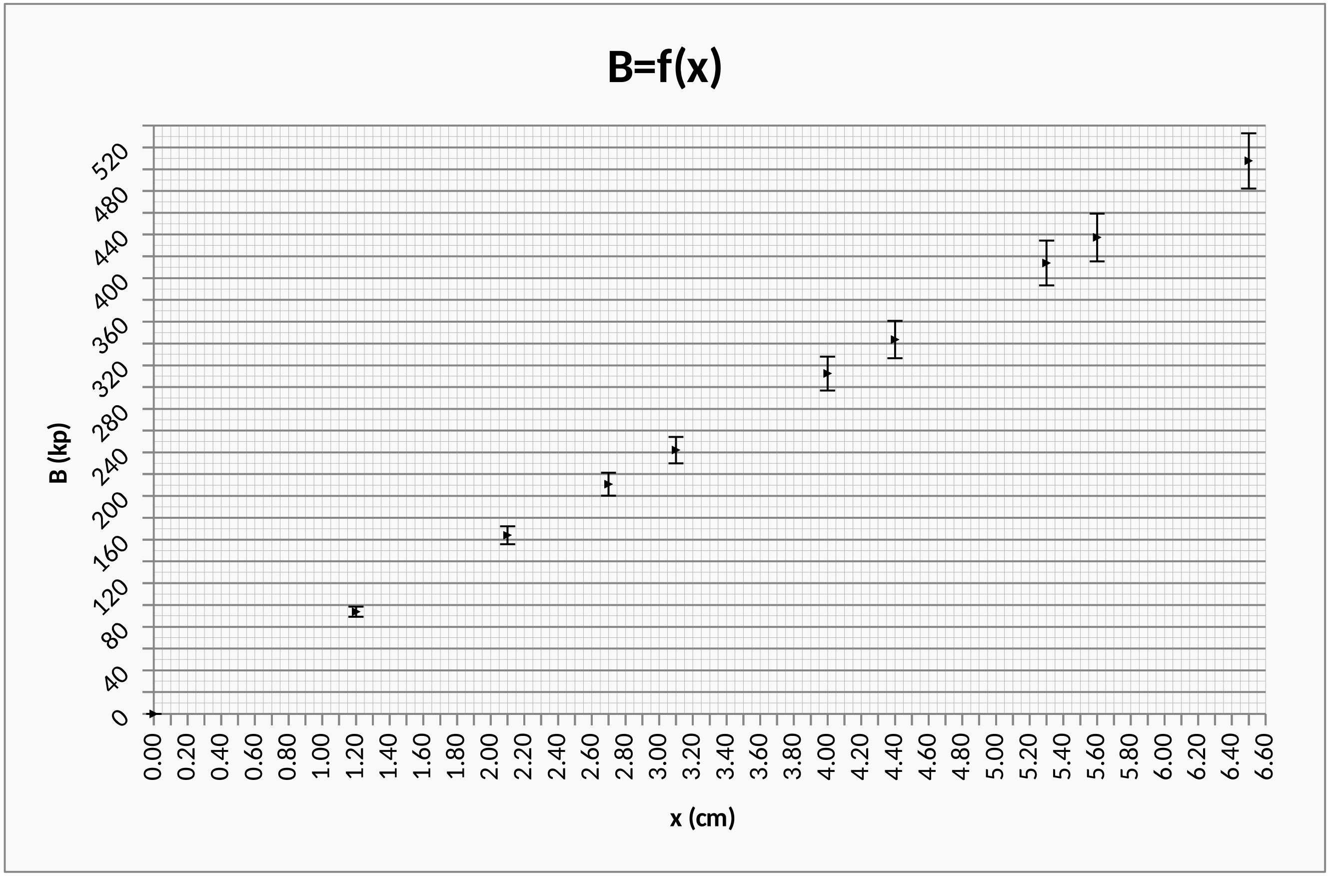
Κλίση

$$\bar{R} = κλίση = \frac{PQ}{OQ} = \frac{4.2\ V}{2.0\ A} = 2.1\ \Omega$$

Για τον υπολογισμό μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα **οποιοδήποτε τρίγωνο.**

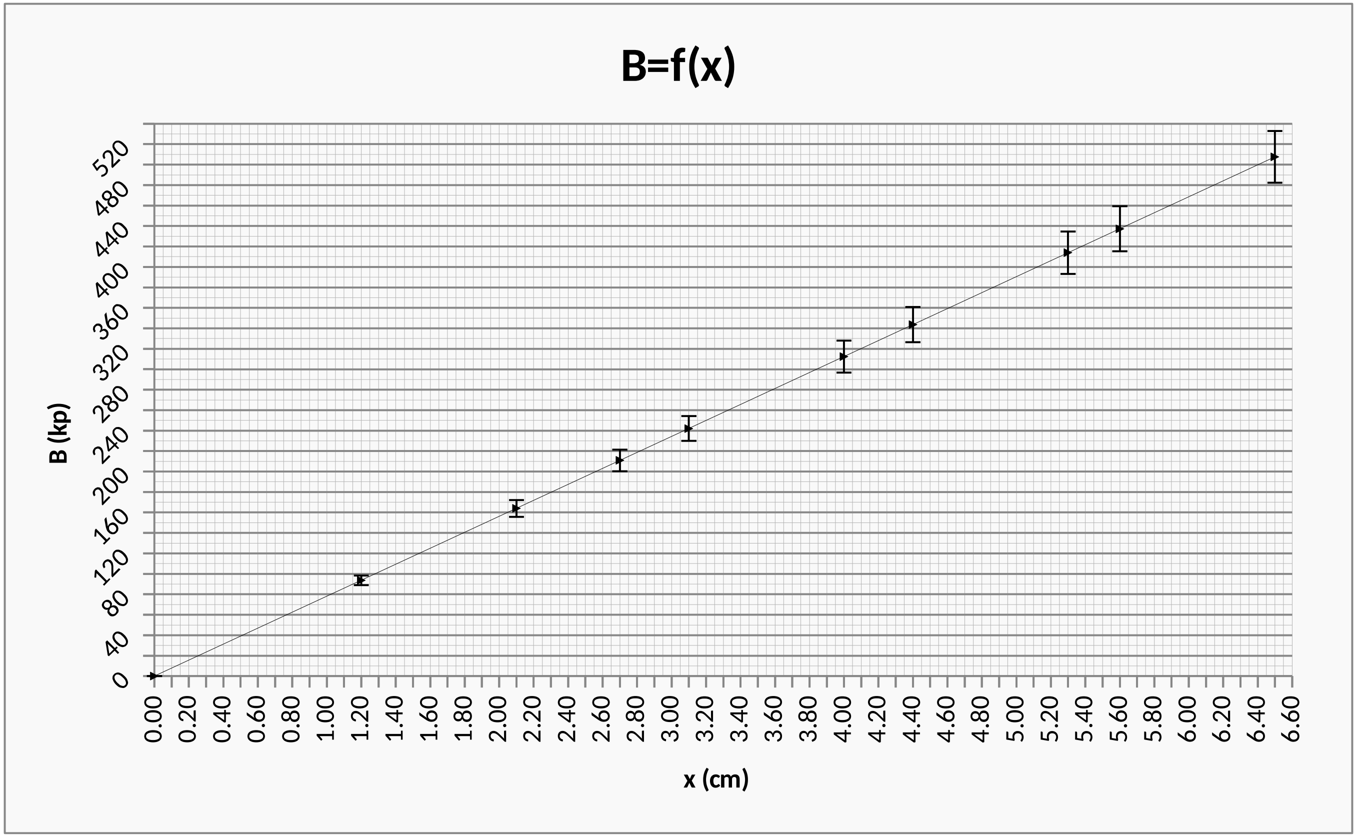
Εκτίμηση σταθεράς ελατηρίου

Έχουμε την εξίσωση B=D ·x και τον πίνακα



x (cm)	B (p)
0	0
1.2	94
2.1	164
2.7	211
3.1	242
4.0	312
4.4	344
5.3	414
5.6	437
6.5	508

Εκτίμηση σταθεράς ελατηρίου



x (cm)	B (p)
0	0
1.2	94
2.1	164
2.7	211
3.1	242
4.0	312
4.4	344
5.3	414
5.6	437
6.5	508

Εκτίμηση σταθεράς ελατηρίου

Κλίση:

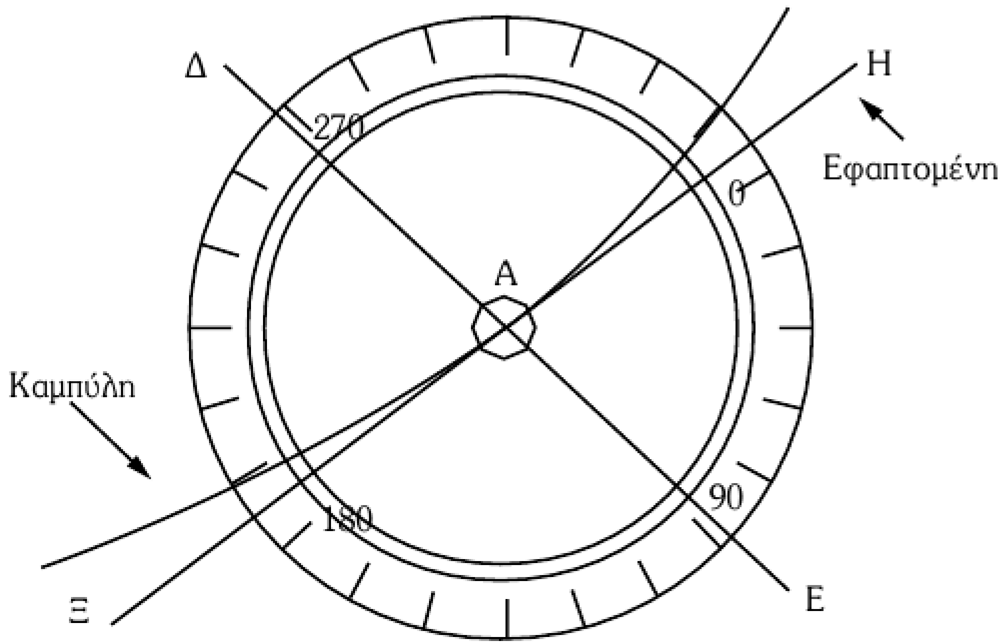
$$D = 510\ kp/6.5\ cm$$
$$= 78.1\ kp/cm$$
$$= 78.1\ kp/cm \times 9.81\ N/kp$$
$$= 766\ N/m$$

δηλαδή

$$\mathbf{D = 766\ N/m}$$

Υπολογισμοί μέσω γραφικού υπολογισμού κλίσεως καμπύλων γραφικών παραστάσεων

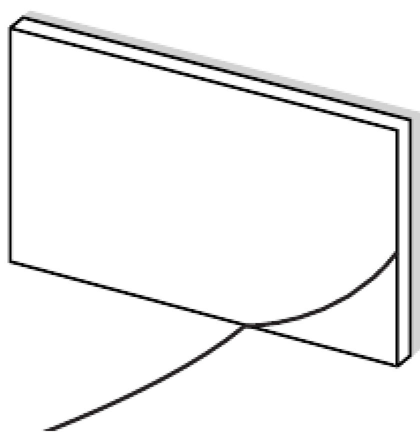
Εφαπτομένη καμπύλης



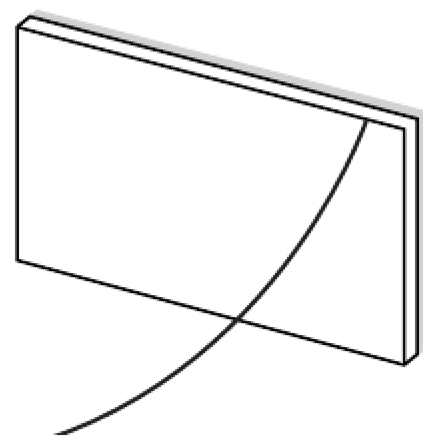
Η εφαπτομένη μιας καμπύλης σε ένα σημείο Α σχηματίζει γωνία 90^0 με την ακτίνα καμπυλότητας στο σημείο Α

Εφαπτομένη καμπύλης

Εύρεση εφαπτομένης με χρήση καθρέπτη



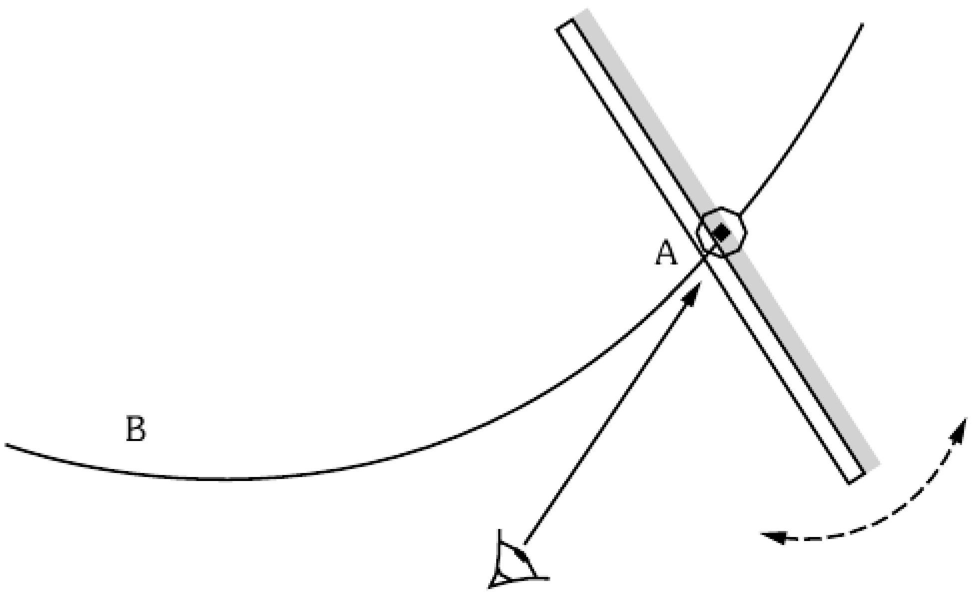
Εσφαλμένη τοποθέτηση



Ορθή τοποθέτηση

Εφαπτομένη καμπύλης

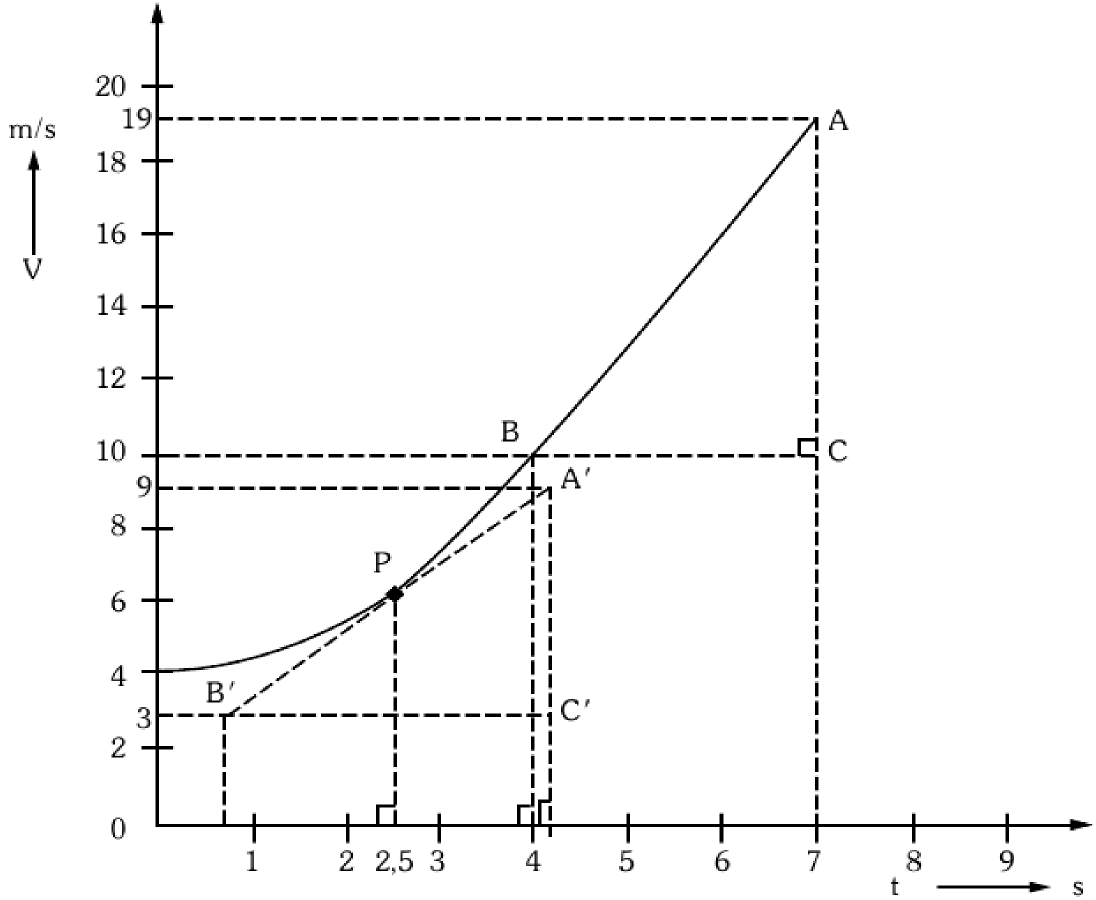
Εύρεση εφαπτομένης με χρήση καθρέπτη



Περιστρέφεται ο καθρέπτης μέχρι να υπάρχει συνέχεια στο είδωλο. Ο άξονας του καθρέπτη είναι η εφαπτομένη στο A

Παραδείγματα
(υπολογισμοί μέσω εύρεσης κλίσεως καμπύλων γραφικών παραστάσεων)

Εκτίμηση επιτάχυνσης



Σχέση ταχύτητας χρόνου σε μεταβαλλόμενη κίνηση

Εκτίμηση επιτάχυνσης

Κλίση στο σημείο P:

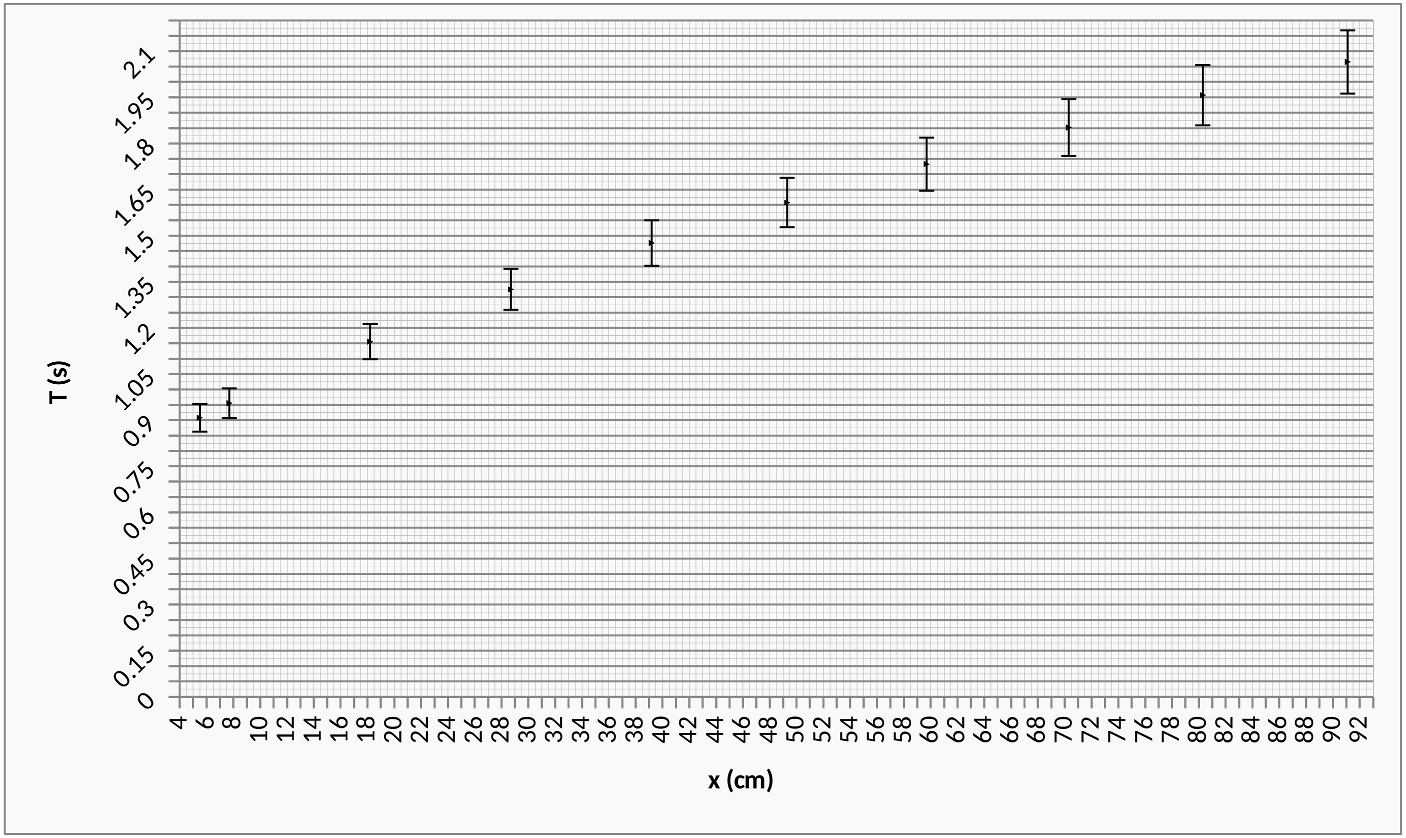
$$\alpha = \text{Κλίση} = \frac{A'C'}{B'C'} = \frac{(9-3)\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}}{(4.2-0.7)\text{s}} = 1.7\ \text{ms}^{-2}$$

Επομένως, η κλίση οδηγεί στον υπολογισμό της επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή t=2.5s (σημείο P)

Η κλίση είναι μεταβλητή με το χρόνο. Ομοίως και η επιτάχυνση.

Εκτίμηση επιτάχυνσης βαρύτητας

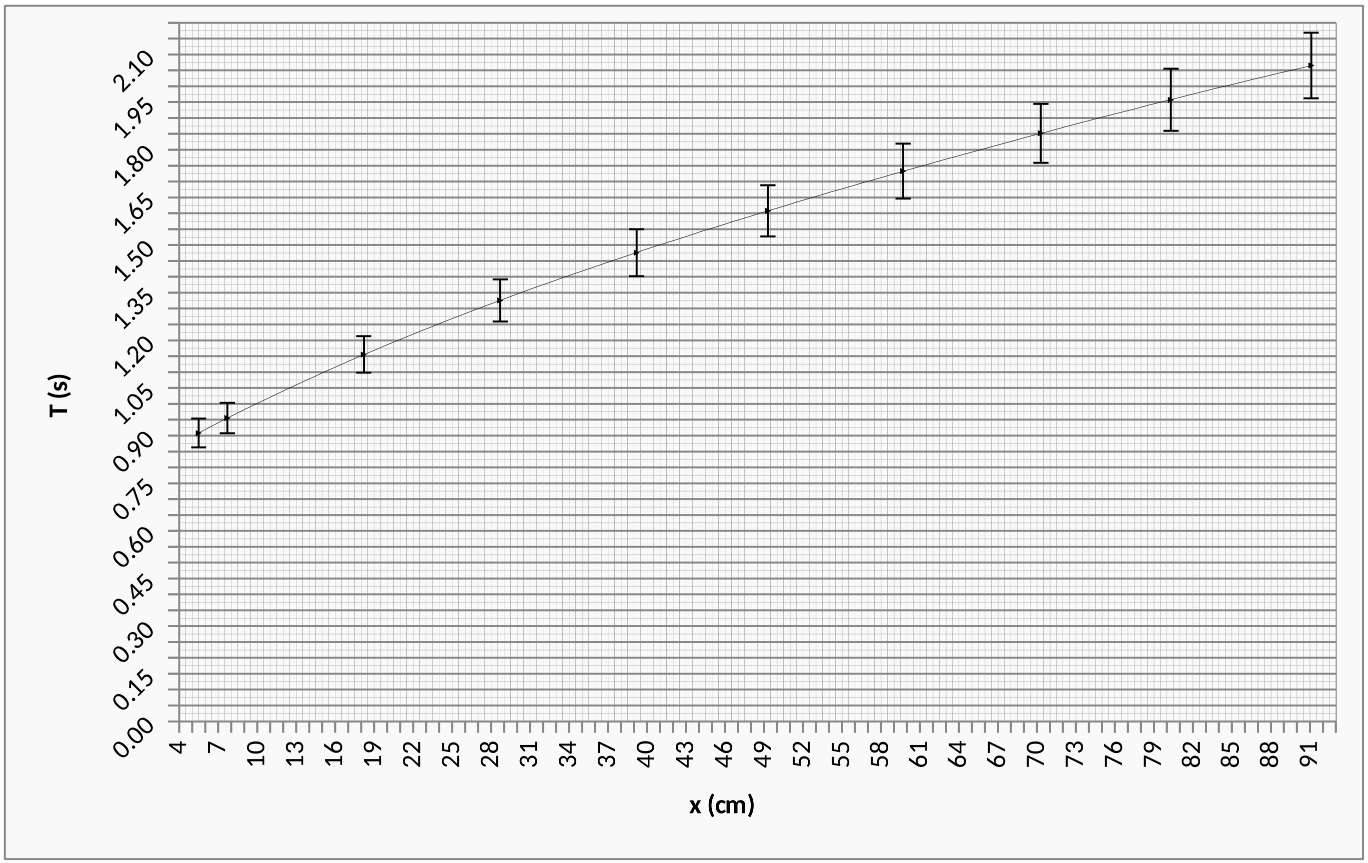
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{x+a}{g}}$$ όπου α και g είναι σταθερές:



x (cm)	T (s)
91.1	2.07
80.3	1.96
70.3	1.85
59.7	1.73
49.3	1.61
39.2	1.48
28.7	1.33
18.2	1.16
7.7	0.96
5.5	0.91

Εκτίμηση επιτάχυνσης βαρύτητας

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{x + a}{g}}$$ όπου α και g είναι σταθερές:



x (cm)	T (s)
91.1	2.07
80.3	1.96
70.3	1.85
59.7	1.73
49.3	1.61
39.2	1.48
28.7	1.33
18.2	1.16
7.7	0.96
5.5	0.91

Εκτίμηση επιτάχυνσης βαρύτητας

Κλίση στο x=40 cm [τρίγωνο:(2.10,91)-→(1.55,30)]

K=(2.10-1.55)s/(91-30)cm
=0.55 s/61 cm
=0.00901639442 s/cm
=0.00902 s/cm

Επομένως

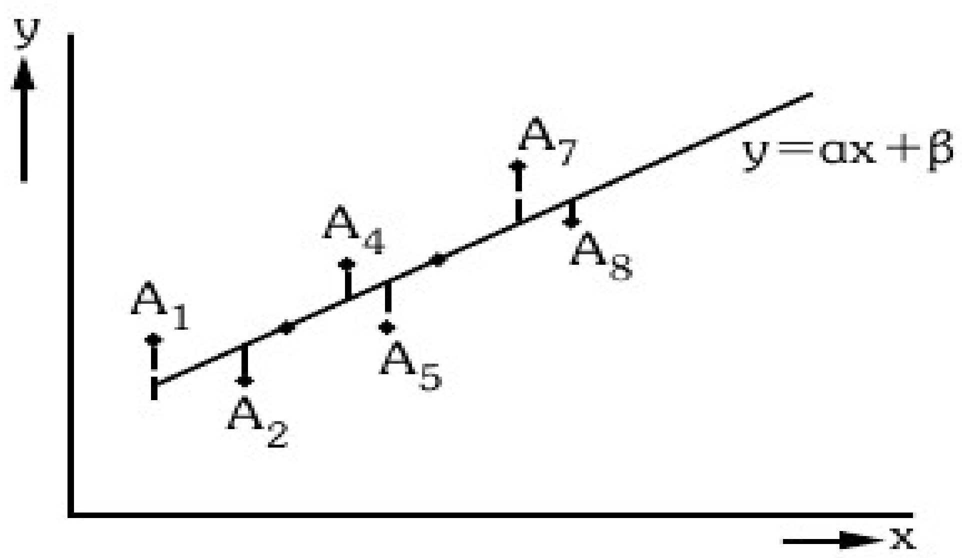
$$2\pi\cdot\sqrt{\left(\frac{x+a}{g}\right)}=0.00902\,s/cm$$

Αν η σταθερά a είναι γνωστή, υπολογίζεται το g με 3 σ.ψ.

Μέθοδοι προσδιορισμού καλύτερης ευθείας
Γραμμική παρεμβολή

Γραμμική παρεμβολή

Έστω ότι οι μεταβλητές x και y προκύπτουν από πειραματικές μετρήσεις. Εφόσον κάθε μέτρηση συνοδεύεται από σφάλματα, τα πειραματικά ζεύγη τιμών (x,y) θα ευρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας. Επισημαίνεται ότι η ευθεία δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή



Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Γραμμική παρεμβολή-Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Έστω ότι υπάρχουν πειραματικά ζεύγη τιμών (x_i,y_i) τα οποία μπορούν να προσαρμοσθούν γραμμικά.

Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων, οδηγεί στον υπολογισμό των βέλτιστων σταθερών γραμμικής παρεμβολής και των σφαλμάτων τους.

Γραμμική παρεμβολή-Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Εάν η ευθεία είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$, τότε η απόκλιση A_i ενός τυχαίου σημείου i από την ευθεία θα είναι:

$$A_i = y_i - (\alpha x_i + \beta)$$

Το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων A' όλων των σημείων είναι:

$$A' = [y_1 - (\alpha x_1 + \beta)]^2 + [y_2 - (\alpha x_2 + \beta)]^2 + \ldots [y_n - (\alpha x_n + \beta)]^2$$

ή

$$A' = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (\alpha x_i + \beta)]^2$$

όπου n είναι ο αριθμός των σημείων.

Επομένως για την χάραξη της καλύτερης δυνατής ευθείας, πρέπει το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων (δηλ. η τιμή του A') των σημείων, που προέκυψαν από τις πειραματικές μετρήσεις των μεταβλητών x, y, να είναι το ελάχιστο.

Γραμμική παρεμβολή-Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

$$\alpha = \frac{n \cdot \sum (x_i \cdot y_i) - \sum x_i \cdot \sum y_i}{\Delta}$$

$$\beta = \frac{\sum y_i \cdot \sum (x_i^2) - \sum x_i \cdot \sum (x_i \cdot y_i)}{\Delta}$$

$$\Delta = n \cdot \sum (x_i^2) - (\sum x_i)^2$$

Γραμμική παρεμβολή-Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\Delta} \cdot \sum x_i^2} \qquad \sigma_\beta = \sqrt{n \cdot \frac{\sigma^2}{\Delta}}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-2} \cdot \sum (y_i - \alpha - \beta \cdot x_i)^2$$

$$\sigma^2 \approx s^2$$

ΙΣΕΣ ΤΙΜΕΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ

Γραμμική παρεμβολή-Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\frac{1}{\Delta}\sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}} \qquad \sigma_\beta = \sqrt{\frac{1}{\Delta}\sum \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

$$\Delta = \sum \frac{1}{\sigma_i^2}\sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)^2$$

ΑΝΙΣΕΣ ΤΙΜΕΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ

Γραμμική παρεμβολή-Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Το σφάλμα σ_i θεωρείται ότι αναφέρεται **μόνο στη μεταβλητή x.** Δηλαδή

$$\sigma_i = \sigma_i(x)$$

Για να ισχύει αυτό θα πρέπει γιά όλες τις πιθανές τιμές

$$\frac{\sigma_x}{x_i - x_j} \ll \frac{\sigma_y}{y_i - y_j}$$

Όταν και όπου και οι δύο μεταβλητές έχουν **σφάλματα που δε μπορούν να αγνοηθούν** ισχύει

$$\sigma_i^2 = \sigma_i^2(x) + \sigma_i^2(y)$$

Γραμμική παρεμβολή-Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Έστω ότι είναι επιθυμητό να χαραχθεί η καλύτερη ευθεία διαμέσου των σημείων που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

α/α	xi	yi
1	1,0	5,1
2	2,0	7,2
3	3,0	8,7
4	4,0	11,1
5	5,0	12,7

$$y = \alpha \cdot x + \beta$$

Γραμμική παρεμβολή-Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

α/α	xi	yi	xi^2	xi yi
1	1,0	5,3	1,0	5,3
2	2,0	7,2	4,0	14,4
3	3,0	8,7	9,0	26,1
4	4,0	11,1	16,0	44,4
5	5,0	12,7	25,0	63,5

Γραμμική παρεμβολή-Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

$$\sum x_i = 15{,}0$$

$$\Delta = 50{,}0$$

$$\sum y_i = 45{,}0$$

$$\sigma^2 = 0{,}00445$$

$$\sum (x_i^2) = 55{,}0$$

$$\sum (x_i \cdot y_i) = 153{,}7$$

Γραμμική παρεμβολή-Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

$$\alpha \pm \sigma_{\alpha} = 1,87 \pm 0,07$$

$$\beta \pm \sigma_{\beta} = 3,40 \pm 0,02$$

Γραμμική παρεμβολή-Έλεγχος γραμμικότητας

Συντελεστής συσχετίσεως Spearman

$$r^2 = \frac{\left(n \cdot \sum x_i \cdot y_i - \sum x_i \cdot y_i\right)^2}{\left[n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right] \cdot \left[n \sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2\right]}$$

Πολλαπλή γραμμική παρεμβολή

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \ldots$$

$$y = a + b_1 x + b_2 x^2 + b x^3 + \ldots \rightarrow$$
$$y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b X_3 + \ldots$$

Πολλαπλή γραμμική παρεμβολή

Δειγματική διακύμανση

$$s_{jk}^{2}=\frac{\frac{1}{n-1}\cdot\sum\frac{1}{\sigma_{i}^{2}}\left(x_{ij}-\hat{x}_{j}\right)\cdot\left(x_{ik}-\hat{x}_{k}\right)}{\frac{1}{n}\cdot\sum\frac{1}{\sigma_{i}^{2}}}$$

$$\hat{x}_{i}=\frac{\sum x_{ij}/\sigma_{i}^{2}}{\sum 1/\sigma_{i}^{2}}¿$$

Πολλαπλή γραμμική παρεμβολή

Συντελεστής πολλαπλής συσχετίσεως Spearman

$$r_{ik} = \frac{s_{jk}^{2}}{s_{ii}\, s_{kk}}$$

Δημιουργία Γραφικής Παραστάσεως

Κατευθυντήριες Γραμμές

1. Παρουσίαση:

Όλες οι γραφικές παραστάσεις πρέπει να παρουσιάζονται σε MILIMETRE χαρτί.

2. Βαθμονόμηση Αξόνων:

Οι άξονες πρέπει να φέρουν μόνο τις βασικές βαθμονομήσεις.
Οι παρουσιαζόμενες τιμές πρέπει να υποδεικνύουν την πειραματική ακρίβεια
Όλο το εύρος των τιμών θα πρέπει να μπορεί να παρουσιασθεί. Κάθε τιμή θα πρέπει να αντιστοιχει σε γραμμή του millimetre χαρτιού.

3. Διακεκομμένες Γραμμές:

Δεν επιτρέπεται η χρήση τέτοιων.

Κατευθυντήριες Γραμμές

1. Κλίση:

Αν απαιτείται χαράσσουμε την εφαπτομένη.

Επιλέγουμε Δx και Δy με τρόπο ώστε και οι δύο αποστάσεις να είναι ακριβώς πάνω σε γραμμές του millimetre χαρτιού και να είναι μεγάλες ώστε να ελαχιστοποιείται το σχετικό σφάλμα.

Η κλίση έχει μονάδες.