

Πα.Δα.
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Υπολογιστών

Εισαγωγή στην Εργαστηριακή Φυσική

ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Δημήτριος Ν. Νικολόπουλος
Καθηγητής
Περιβαλλοντική και Ιατρική Φυσική

Μέτρηση φυσικού μεγέθους

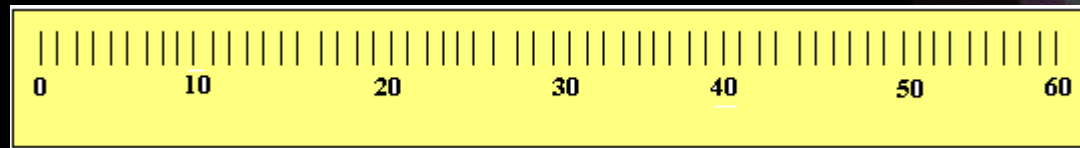
➤ Μέτρηση

- Η σύγκριση ενός μεγέθους με ένα άλλο ομοειδές το οποίο λαμβάνεται ως μονάδα.
- Απαιτείται η χρήση συγκεκριμένου οργάνου μέτρησης
- **Απλή:** Η τιμή ενός φυσικού μεγέθους προκύπτει απ'ευθείας από τις ενδείξεις καταλλήλου οργάνου. (π.χ. μήκος x)
- **Σύνθετη:** Η τιμή ενός φυσικού μεγέθους προκύπτει ως συνάρτηση απλών μετρήσεων με τη βοήθεια κατάλληλης μαθηματικής σχέσης. (π.χ. όγκος $V=x y z$)

Μέτρηση φυσικού μεγέθους

➤ Μήκος

- Έστω ότι είναι επιθυμητό να μετρηθεί το **μήκος** ενός αντικειμένου. Είναι απαραίτητη η χρήση οργάνου μέτρησης (**χάρακας**). Ο χάρακας φέρει υποδιαίρέσεις. Είναι δηλαδή **βαθμονομημένος**. Έστω ότι είναι **απαλλαγμένος** από κατασκευαστικές ατέλειες ή φθορές.

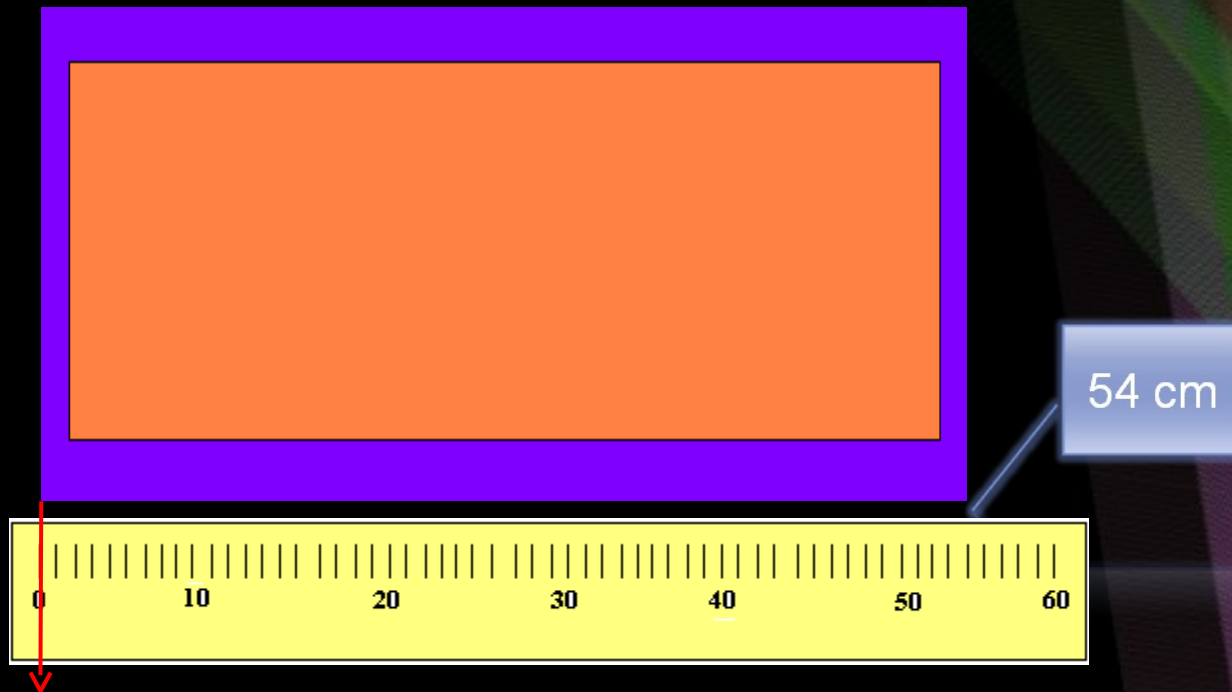


Το μέγιστο επιτρεπόμενο μήκος μέτρησης χωρίς επαναχρησιμοποίηση είναι **60 cm**.

Μέτρηση φυσικού μεγέθους

➤ Μέτρηση μήκους

- Η **ορθή χρήση** της μετρητικής διάταξης (χάρακας) απαιτεί:
 - Ορθό **μηδενισμό** (τοποθέτηση του μηδενός του χάρακα στην αρχή του αντικειμένου)
 - Ορθή **ανάγνωση** (ο πειραματιστής αναγιγνώσκει κάθετα και όχι υπό γωνία)



Μέτρηση φυσικού μεγέθους

➤ Επισήμανση:

- Δεν είναι δυνατή η ανάγνωση μήκους μικρότερου της ελάχιστης υποδιαίρεσης της διάταξης μέτρησης (στο παράδειγμα το cm).

Επομένως, είναι αδύνατο να μετρηθεί, με τη συγκεκριμένη διάταξη μέτρησης, μήκος 54,1 cm ή 54,15 cm. Ως εκ τούτου αποδεκτές τιμές μήκους μπορεί να είναι το 54,0 cm (! όχι 54 cm) και το 54,1 cm, αλλά όχι οτιδήποτε μικρότερο (54,1512 cm)

Μέτρηση φυσικού μεγέθους

➤ Η διάταξη μέτρησης

- Επιλέγεται με βάση συγκεκριμένη μέθοδο μέτρησης
- Θέτει τα μέγιστα όρια της πειραματικής ακριβείας.
- Παρέχει βέλτιστα αποτελέσματα ανάλογα με τη χρήση.

Απλή και Σύνθετη Μέτρηση (ορισμοί)

- Μετρούμενη τιμή (x)
 - Η τιμή ενός φυσικού μεγέθους η οποία προκύπτει από τις **ενδείξεις** κάποιου οργάνου.
- Πραγματική (αληθινή) τιμή (α)
 - Η αληθινή τιμή ενός φυσικού μεγέθους.
- Σφάλμα (σ)
 - Η **διαφορά** ανάμεσα στην **αληθινή** και τη **μέση μετρούμενη** τιμή
- Απόκλιση (αβεβαιότητα) (Δx)
 - Η διαφορά ανάμεσα σε μία μέτρηση και στη μέση τιμή

Απλή και Σύνθετη Μέτρηση

Επισημάνση:

- Η αληθινή τιμή (α) δεν είναι γνωστή. Προσεγγίζεται από τη μέση τιμή (μ) με όρια αυτά που καθορίζονται από το απόλυτο σφάλμα.

όπου ο όρος w καθορίζεται στατιστικά ανάλογα με τα επίπεδα σημαντικότητας (βεβαιότητα γνώσης $p=66.7\%$, 95% , 99% κ.λπ.) γνώσης του αποτελέσματος ($z=1,00-1,96-2,96$)

- Ο κύριος στόχος της Εργαστηριακής Φυσικής είναι η βελτίωση της πειραματικής ακριβείας με την ελαχιστοποίηση του απολύτου σφάλματος και των αποκλίσεων των επιμέρους μετρήσεων.

Τύποι Σφαλμάτων (ορισμοί)

➤ Συστηματικά

- **Συστηματικά** είναι τα σφάλματα που **υπεισέρονται σταθερά** στις μετρήσεις και επηρεάζουν το αποτέλεσμα πάντοτε κατά την **ίδια φορά**, είναι δηλαδή **είτε θετικά, είτε αρνητικά**.

➤ Τυχαία

- **Τυχαία** είναι τα σφάλματα που οφείλονται σε **αστάθμητους και τυχαίους** παράγοντες κατά τη διεξαγωγή των μετρήσεων ενός μεγέθους με την ίδια μέθοδο και το ίδιο όργανο. Μεταβάλλουν το αποτέλεσμα της μέτρησης **και κατά τις δύο φορές**, είναι δηλαδή **άλλοτε θετικά και άλλοτε αρνητικά**.

Τύποι Σφαλμάτων

➤ Συστηματικά

- ❑ Όργανα:
 - ✓ Βαθμολόγηση κλίμακας.
 - ✓ Ατέλειες κατασκευής
 - ✓ Φθορά
- ❑ Μέθοδος μέτρησης
- ❑ Περιβάλλον
- ❑ Παρατηρητής

➤ Τυχαία

- ❑ Όργανα:
 - ✓ Ευαισθησία
 - ✓ Αρχή λειτουργίας
- ❑ Περιβάλλον
 - ✓ Αστάθεια εξωτερικών συνθηκών (Πίεση, Θερμοκρασία, Τάση).
- ❑ Παρατηρητής
 - ✓ Εσφαλμένη ανάγνωση
 - ✓ Απροσεξία χρήσης οργάνων
 - ✓ Αδυναμία ορθής εφαρμογής μεθόδου μέτρησης
 - ✓ Λόγω παράλλαξης

Σημαντικά Ψηφία

- Από τη μετρητική διαδικασία καθορίζονται τα ψηφία μιας μέτρησης που είναι με βεβαιότητα γνωστά. **Σημαντικά ψηφία (σ.ψ.)** ενός μετρημένου μεγέθους είναι όλα εκείνα τα ψηφία που είναι **γνωστά με βεβαιότητα** καθώς και το **πρώτο αβέβαιο**. Σε κάποιες περιπτώσεις λογίζεται στα σημαντικά ψηφία ενός αριθμού και το δεύτερο αβέβαιο.

7 → 1 σ.ψ.

0,4

0,02

0,0007

7 x 10 (όχι 70!)

7 x 10² (όχι 700!)

38 → 2 σ.ψ.

7, 6

0,56

0,50 x 10

0,028 x 10²

Σημαντικά Ψηφία

521 → 3 σ.ψ.

3,14

0,693

4,20 x 10 (420!)

0,420 x 10² (420!)

420

6400 → 4 σ.ψ.

17,5 6

0,03100

7200 x 10²

Σημαντικά Ψηφία (παραδείγματα)

| | | |
|------------------------|---|--------|
| 5,552 | → | 4 σ.ψ. |
| 10,895 | → | 5 σ.ψ. |
| 0,0067 | → | 2 σ.ψ. |
| 0,000647 | → | 3 σ.ψ. |
| 6,7 x 10 ⁻² | → | 2 σ.ψ. |
| (0,0067!) | | |
| 1,00 | → | 3 σ.ψ. |
| 1,01 | → | 3 σ.ψ. |

Σημαντικά Ψηφία (παράδειγματα)

| | | | |
|-------------------------|--------|---|--------|
| 100 | | → | 3 σ.ψ. |
| 10,0 x 10 | (100!) | → | 3 σ.ψ. |
| 1,00 x 10 ² | (100!) | → | 3 σ.ψ. |
| 101 | | → | 3 σ.ψ. |
| 10,1 x 10 | (101!) | → | 3 σ.ψ. |
| 1,01 x 10 ² | (101!) | → | 3 σ.ψ. |
| 64,19 x 10 ² | | → | 4 σ.ψ. |

Σημαντικά Ψηφία

Επισήμανση:

- Το πλήθος των **σημαντικών ψηφίων (σ.ψ.)** ενός **πειραματικά μετρούμενου** μεγέθους καθορίζεται από τις πειραματικές διατάξεις και τις μεθόδους μέτρησης. Μεταβάλλεται όμως αναλόγως του ορθού ή μη τρόπου λήψης μετρήσεων.
- Το **ΠΛΗΘΟΣ** των **σ.ψ.** αισθητοποιεί την **ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΑΚΡΙΒΕΙΑ**. Και τα δύο αυτά καθορίζονται από τα **ΣΦΑΛΜΑΤΑ** των **ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ**.

Σφάλματα Μετρήσεων

Πιθανότητα Εμφάνισης (μέτρησης) (p)

➤ Διακριτές τιμές (μεγάλες διαμερίσεις)

- Το πηλίκο του πλήθους εμφανίσεως (N_i) (συχνότητα εμφάνισης) κάποιας μετρηθείσας τιμής x ευρισκομένης εντός μίας διαμέρισης δx_i ($x_i < x < x_i + \delta x_i$) ως προς το σύνολο των εμφανίσεων όλων των τιμών ($N_{ολ}$).

$$p(\delta x_i) = \frac{N_i}{N_{ολ}} = \frac{N_i}{\sum_i N_i}$$

➤ Συνεχείς τιμές (πολλές πολύ μικρές διαμερίσεις-σχεδόν συνεχείς)

- Το πηλίκο του πλήθους εμφανίσεως ($N(x)$) κάποιας τιμής x ευρισκόμενης μεταξύ x και $x+dx$ ($x < x < x+dx$) ως προς το σύνολο των εμφανίσεων όλων των τιμών.

$$p(x) = \frac{\int_x^{x+dx} N(x) \cdot dx}{\int_0^\infty N(x) \cdot dx}$$

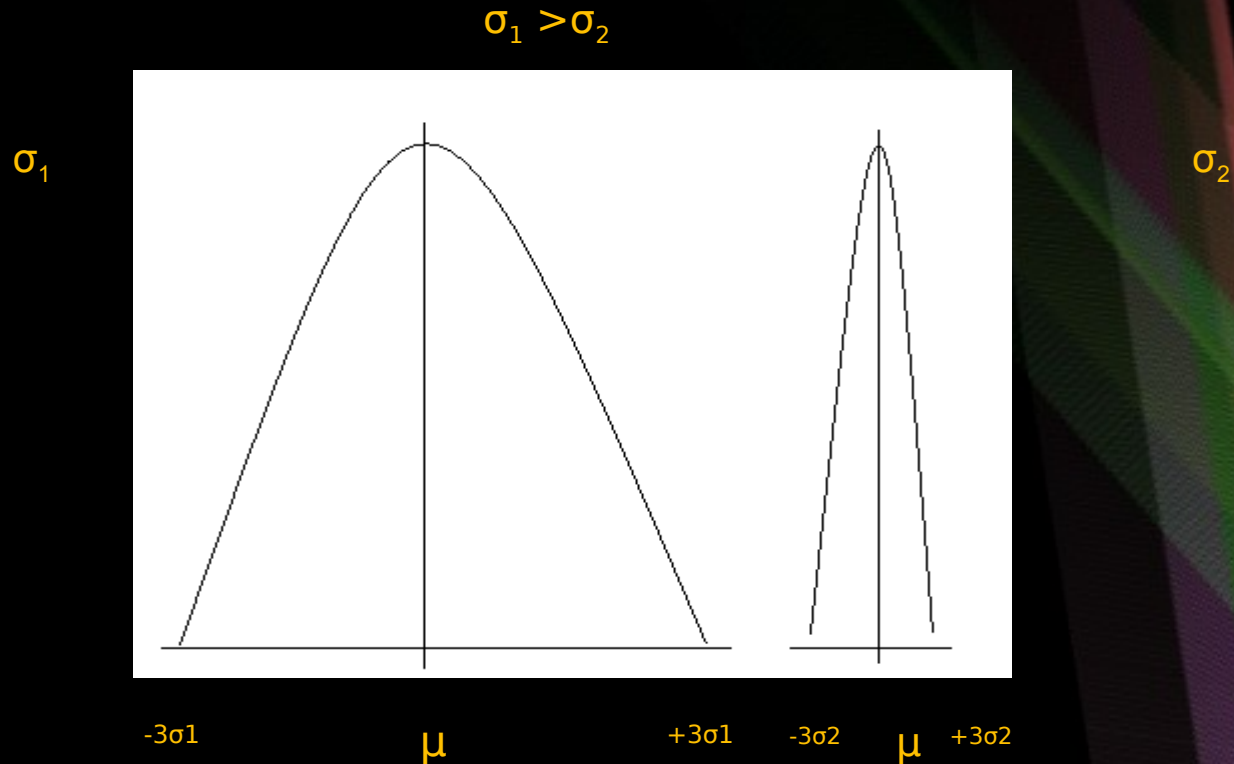
Σφάλματα Μετρήσεων

Κατανομή Πιθανότητας:

- Η συνάρτηση του τρόπου κατανομής των τιμών των πιθανοτήτων εμφάνισης για όλο το εύρος τιμών της μεταβλητής x (μετρούμενο μέγεθος)
- Για μεγάλες διαμερίσεις της μεταβλητής x ($\delta x \gg$) (μικρό πλήθος μετρήσεων) η κατανομή πιθανότητας προσεγγίζεται από ραβδογράμματα ή ιστογράμματα. Για μικρές διαμερίσεις ($\delta x \ll$) (μεγάλο πλήθος μετρήσεων) περιγράφεται από μαθηματικές συναρτήσεις.

Σφάλματα Μετρήσεων

- Μία συνήθης κατανομή την οποία ακολουθούν οι μετρήσεις φυσικών μεγεθών είναι η κανονική κατανομή ή κατανομή του Gauss.



Η κανονική κατανομή είναι **συμμετρική** ως προς τη μέση τιμή (μ). Η μέση τιμή είναι και η **πιθανότερη τιμή**. Ανάλογα με την τιμή σ η κατανομή παρουσιάζει μικρή ή μεγάλη κύρτωση.

Η πιθανότερη τιμή είναι η τιμή με τη μέγιστη πιθανότητα εμφάνισης.

Σφάλματα Μετρήσεων

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ !!!

- Οι μετρήσεις στα πλαίσια απλών Μετρήσεων Φυσικής ακολουθούν συνήθως την κανονική κατανομή.

Σφάλματα Μετρήσεων

- Μέση τιμή (average-mean value)

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \mu$$

- Σφάλμα μέσης τιμής ή απόλυτο σφάλμα (standard error)

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n \cdot (n - 1)}}$$

και n είναι το πλήθος των μετρήσεων

Σφάλματα Μετρήσεων

➤ Σχετικό σφάλμα

$$\sigma_{\sigma\chi} = \frac{\sigma}{X}$$

➤ Επί τοις εκατό σφάλμα

$$\sigma \% = \frac{\sigma}{X} \cdot 100$$

Σφάλματα Μετρήσεων

- Δειγματική διασπορά ή διακύμανση (variance)

$$s_n = \sqrt{\frac{\sum (\Delta x_i^2)}{n}} \quad \text{biased}$$

- Δειγματική διασπορά ή διακύμανση (variance)

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum (\Delta x_i^2)}{n-1}} \quad \text{unbiased}$$

και n είναι το πλήθος των μετρήσεων

Σφάλματα Μετρήσεων

➤ Τυπική απόκλιση

$$\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

Σφάλματα Μετρήσεων

- Αβεβαιότητες λόγω χρήσης οργάνων

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$
$$\sigma \approx s_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum (\Delta x_i^2)}{n-1}}$$

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (\Delta x_i^2)}{n(n-1)}}$$

και n είναι το πλήθος των μετρήσεων

ΙΣΕΣ ΤΙΜΕΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ

Σφάλματα Μετρήσεων

- Αβεβαιότητες λόγω χρήσης οργάνων

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad \sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

σ_i είναι η αβεβαιότητα της κάθε μέτρησης

ΑΝΙΣΕΣ ΤΙΜΕΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ

Σφάλματα Μετρήσεων

➤ Αβεβαιότητες στατιστικής υφής

$$\sigma = \sqrt{\mu} \approx \bar{x} \quad (\text{Poisson})$$

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}$$

**ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΚΦΡΑΣΗΣ
ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ**

Σφάλματα Μετρήσεων

ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

➤ Μέγιστο σφάλμα

$$\delta W = \left| \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \delta x \right| + \left| \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \delta y \right| + \left| \frac{\partial W}{\partial z} \cdot \delta z \right|$$

➤ Σφάλμα μέσης τιμής ή απόλυτο σφάλμα

$$\sigma(\bar{W}) = \pm \sqrt{\left| \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} \cdot \sigma(\bar{x})^2 + \left| \frac{\partial W}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} \cdot \sigma(\bar{y})^2 + \left| \frac{\partial W}{\partial z} \right|_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} \cdot \sigma(\bar{z})^2}$$

(ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ)

| Συνάρτηση | Μέγιστο σφάλμα ΔW | Μέσο σφάλμα $\sigma(\bar{W})$ |
|-------------------------|--|---|
| | Μέγιστο σχετικό σφάλμα $\frac{\Delta W}{W}$ | Μέσο σχετικό σφάλμα $\frac{\sigma(\bar{W})}{W}$ |
| $W = x \pm \psi \pm z$ | $\Delta W = \pm [\sigma(x) + \sigma(\psi) + \sigma(z)]$ | $\sigma(\bar{W}) \pm \sqrt{[\sigma(x)]^2 + [\sigma(y)]^2 + [\sigma(z)]^2}$ |
| $W = x \cdot y \cdot z$ | $\frac{\Delta W}{W} = \pm \left[\left \frac{\sigma(x)}{\bar{x}} \right + \left \frac{\sigma(y)}{\bar{y}} \right + \left \frac{\sigma(z)}{\bar{z}} \right \right]$ | $\frac{\sigma(\bar{W})}{W} = \pm \sqrt{\left[\frac{\sigma(x)}{\bar{x}} \right]^2 + \left[\frac{\sigma(y)}{\bar{y}} \right]^2 + \left[\frac{\sigma(z)}{\bar{z}} \right]^2}$ |
| $W = \frac{x}{y}$ | $\frac{\Delta W}{W} = \pm \left[\left \frac{\sigma(x)}{\bar{x}} \right + \frac{\sigma(y)}{\bar{y}} \right]$ | $\frac{\sigma(\bar{W})}{W} = \pm \sqrt{\left[\frac{\sigma(x)}{\bar{x}} \right]^2 + \left[\frac{\sigma(y)}{\bar{y}} \right]^2}$ |
| $W = x^n$ | $\frac{\Delta W}{W} = \pm n \cdot \frac{\sigma(x)}{\bar{x}}$ | $\frac{\sigma(\bar{W})}{W} = \pm n \cdot \frac{\sigma(x)}{\bar{x}}$ |

Σφάλματα Μετρήσεων

➤ ΣΕ ΚΑΘΕ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ.....

Παρουσίαση Αποτελέσματος

- Επιστημονική γραφή αποτελέσματος μέτρησης

$$\bar{x} \pm \sigma(\bar{x}) = (\dots \pm \dots) \text{ μονάδα μέτρησης}$$

$$\bar{x} \pm \sigma \% = (\dots \text{ μονάδα μέτρησης} \pm \dots \%)$$

Παρουσίαση Αποτελέσματος (στρογγυλοποίηση)

Στρογγυλοποίηση:

- Η διαδικασία εμφάνισης μόνο των **σημαντικών ψηφίων (σ.ψ.)** ενός **πειραματικά μετρούμενου** μεγέθους με τη στατιστικά ορθή αποκοπή των (μετά του πρώτου) αβέβαιων ψηφίων.
- Η στρογγυλοποίηση λαμβάνει χώρα μετά τον καθορισμό του πλήθους των σημαντικών ψηφίων. Το τελευταίο καθορίζεται με στατιστικά κριτήρια από το απόλυτο σφάλμα.

Σημαντικά Ψηφία (στρογγυλοποίηση)

Κανόνες στρογγυλοποίησης

Για τη στρογγυλοποίηση ελέγχεται το ψηφίο (αποκοπτόμενο ψηφίο- ψ_α) το οποίο ακολουθεί το τελευταίο σημαντικό ψηφίο ($\sigma.\psi_\tau$) του αριθμού που είναι επιθυμητό να στρογγυλοποιηθεί (πρώτο αβέβαιο για $n < 25$, δεύτερο αβέβαιο για $n \geq 25$). Το ψηφίο ψ_α είναι το δεύτερο αβέβαιο για $n < 25$ ή το τρίτο αβέβαιο για $n \geq 25$. Ισχύουν οι κάτωθι κανόνες:

Αν το ψηφίο ψ_α είναι μεγαλύτερο του 5 τότε αυξάνουμε το $\sigma.\psi_\tau$ κατά μία μονάδα

$$\psi_\alpha > 5 \rightarrow \sigma.\psi_\tau = \sigma.\psi_\tau + 1$$

Αν το ψηφίο ψ_α είναι μικρότερο του 5 τότε αφήνουμε το $\sigma.\psi_\tau$ όπως είναι

$$\psi_\alpha < 5 \rightarrow \sigma.\psi_\tau = \sigma.\psi_\tau$$

Αν το ψηφίο ψ_α είναι το 5 τότε

το $\sigma.\psi_\tau$ είναι άρτιο το αφήνουμε όπως είναι

$$\psi_\alpha = 5 \rightarrow \sigma.\psi_\tau = \sigma.\psi_\tau \text{ (αρτιο } \sigma.\psi_\tau)$$

το $\sigma.\psi_\tau$ είναι περιττό το αυξάνουμε κατά 1

$$\psi_\alpha = 5 \rightarrow \sigma.\psi_\tau = \sigma.\psi_\tau + 1 \text{ (περιττό } \sigma.\psi_\tau)$$

Σημαντικά Ψηφία (στρογγυλοποίηση)

5,552

→ 5,55 (3 σ.ψ.) → 5,6 (2 σ.ψ.)

1,415

→ 1,42 (3 σ.ψ.) → 1,4 (2 σ.ψ.)

10,895

→ 10,9 (3 σ.ψ.) → 11 (2 σ.ψ.)

10,985 (!)

→ 11,0 (3 σ.ψ.) → 11 (2 σ.ψ.)

124,678

→ 125 (3 σ.ψ.) → 12×10 (όχι 120) (2 σ.ψ.)

6487,555

→ 649×10 (3 σ.ψ.) → 65×10^2 (2 σ.ψ.)

Σημαντικά Ψηφία (στρογγυλοποίηση)

0,05578

→ 0,0558 (3 σ.ψ.) → 0,056 (2 σ.ψ.)

1,0078

→ 1,01 (3 σ.ψ.) → 1,0 (!) (2 σ.ψ.)

255,895

→ 256 = $25,6 \times 10^2$ (3 σ.ψ.) → 25×10^2 (2 σ.ψ.)

0,999 (!)

→ 0,100 (3 σ.ψ.) → 0,10 (2 σ.ψ.)

2,13678

→ 2,14 (3 σ.ψ.) → 2,1 (2 σ.ψ.)

Παρουσίαση Αποτελέσματος (στρογγυλοποίηση)

Καθορισμός πλήθους σ.ψ.:

Ισχύουν οι κάτωθι κανόνες:

- Για $n < 25$ το απόλυτο σφάλμα πρέπει να έχει 1 σ.ψ.
- Για $n \geq 25$ το απόλυτο σφάλμα πρέπει να έχει 2 σ.ψ.

Η μέση τιμή παρουσιάζεται με τόσα ψηφία (σ.ψ.) όσα αντιστοιχούν στην τάξη μεγέθους του (στρογγυλοποιημένου) απολύτου σφάλματος.

Παρουσίαση Αποτελέσματος (στρογγυλοποίηση)

Καθορισμός πλήθους σ.ψ.:

- $\mu=15,23467$ - $\sigma=0,167801$
 $\mu \pm \sigma = (15,2 \pm 0,2)$ μονάδα μέτρησης ($n<25$)
 $\mu \pm \sigma = (15,16 \pm 0,16)$ μονάδα μέτρησης ($n \geq 25$)
- $\mu=101,8$ - $\sigma=12,5$
 $\mu \pm \sigma = (1,0 \pm 0,1) \times 10^2$ μονάδα μέτρησης ($n<25$)
 $\mu \pm \sigma = (10,1 \pm 1,2) \times 10$ μονάδα μέτρησης ($n \geq 25$)
 $\mu \pm \sigma = (1,01 \pm 0,12) \times 10^2$ μονάδα μέτρησης ($n \geq 25$)
- $\mu=55,555$ - $\sigma=5,5555$
 $\mu \pm \sigma = (5,6 \pm 0,6) \times 10$ μονάδα μέτρησης ($n<25$)
 $\mu \pm \sigma = (5,56 \pm 0,56) \times 10$ μονάδα μέτρησης ($n \geq 25$)
 $\mu \pm \sigma = (0,556 \pm 0,056) \times 10^2$ μονάδα μέτρησης ($n \geq 25$)

Σημαντικά Ψηφία (στρογγυλοποίηση)

ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

(πρακτικοί κανόνες)

Εφαρμόζονται όταν τα επιμέρους (μετρημένα) μεγέθη:

- έχουν ευρεθεί με **διαφορετικές τεχνικές** (π.χ. Μήκος 12,3 mm και 5,3 mm)
- αφορούν μετρήσεις με ίδια τεχνική αλλά **διαφορετικής τάξης** (π.χ. Πάχος 2,001 m και 0,004 m)

➤ Πολ/μος-Διαίρεση

- Το πλήθος των **σημαντικών ψηφίων** ενός παράγωγου μεγέθους είναι ίδιο με το αντίστοιχο πλήθος του μετρημένου ή παράγωγου μεγέθους με τα **λιγότερα σημαντικά ψηφία**

$$12,3 \text{ mm} \times 5,3 \text{ mm} = 66,42 \text{ mm}^2 \rightarrow 66 \text{ mm}^2$$

$$3 \text{ σ.ψ.} \times 2 \text{ σ.ψ.} \rightarrow 2 \text{ σ.ψ.}$$

Σημαντικά Ψηφία (στρογγυλοποίηση)

ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

(πρακτικοί κανόνες-συνέχεια)

➤ Πρόσθεση-Αφαίρεση

- Μεγέθη μετρημένα με **διαφορετικές τεχνικές**
 - Το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων ενός παράγωγου μεγέθους είναι ίδιο με το αντίστοιχο πλήθος του μετρημένου ή παράγωγου μεγέθους με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία

$$125 \text{ mm} + 0,14 \text{ mm} = 125,14 \text{ mm} \rightarrow 125 \text{ mm}$$

$$3 \text{ σ.ψ.} + 2 \text{ σ.ψ.} \rightarrow 3 \text{ σ.ψ.}$$

$$0 \text{ δ.ψ.} + 2 \text{ δ.ψ.} \rightarrow 0 \text{ δ.ψ. (!)}$$

- Μεγέθη μετρημένα με ίδια τεχνική αλλά **διαφορετικής τάξης**
 - Το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων ενός παράγωγου μεγέθους είναι ίδιο με το αντίστοιχο πλήθος του κάθε επιμέρους μετρημένου ή παράγωγου μεγέθους.

$$2,0001 \text{ mm} + 0,0004 \text{ mm} = 2,0005 \text{ mm}$$

$$5 \text{ σ.ψ.} + 5 \text{ σ.ψ.} \quad 5 \text{ σ.ψ.}$$

$$5 \text{ δ.ψ.} + 5 \text{ δ.ψ.} \quad 5 \text{ δ.ψ. (!)}$$

$$1,004 \text{ mm} + 0,996 \text{ mm} = 0,008 \text{ mm}$$

$$4 \text{ σ.ψ.} + 3 \text{ σ.ψ.} \quad 1 \text{ σ.ψ.}$$

$$4 \text{ δ.ψ.} + 4 \text{ δ.ψ.} \quad 4 \text{ δ.ψ. (!)}$$

Υπολογισμός Σφάλματος

| α/α | x_i (m) | (m) | Δx_i (m) | Δx_i^2 (m ²) |
|-----------------|-----------|-------|------------------|----------------------------------|
| 1 | 4,23 | | 0,019 | 0,000361 |
| 2 | 4,25 | | -0,001 | 0,000001 |
| 3 | 4,26 | | -0,011 | 0,000121 |
| 4 | 4,24 | | 0,009 | 0,000081 |
| 5 | 4,25 | 4,249 | -0,001 | 0,000001 |
| 6 | 4,21 | | 0,039 | 0,001521 |
| 7 | 4,29 | | -0,041 | 0,001681 |
| 8 | 4,27 | | -0,021 | 0,000441 |
| 9 | 4,25 | | -0,001 | 0,000001 |
| 10 | 4,24 | | 0,009 | 0,000081 |
| | 42,49 | | | 0,004290 |

Παρουσίαση Αποτελέσματος

➤ Αποτελέσματα

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{42,49 \text{ m}}{10} = 4,249 \text{ m}$$

Παρουσίαση Αποτελέσματος

➤ Αποτελέσματα

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n \cdot (n - 1)}} = \sqrt{\frac{0,004290 \text{ m}^2}{10 \cdot 9}} =$$

$$= \sqrt{0,00004766666666 \text{ m}^2} = 0,006904110505 \text{ m}$$

$$\sigma \% = \frac{\sigma(\bar{x})}{\bar{x}} \cdot 100 = 0,164744645799$$

Παρουσίαση Αποτελέσματος

➤ Αποτελέσματα

$$\bar{x} \pm \sigma(\bar{x}) = (4,249 \pm 0,007) \text{ m}$$

$$\bar{x} \pm \sigma \% = (4,249 \text{ m} \pm 0,2 \%)$$

Παρουσίαση Αποτελέσματος

➤ Σύνθετη μέτρηση

Έστω ότι ζητείται να υπολογισθεί η οριακή ταχύτητα μιας μικρής σφαίρας για τη θέση του οποίου ισχύουν οι προηγούμενες μετρήσεις

Έστω ότι έχουν ληφθεί και μετρήσεις των αντιστοίχων χρονικών διαστημάτων. Οι τελευταίες αυτές μετρήσεις και τα αποτελέσματα τους φαίνονται έχουν ως ακολούθως:

Υπολογισμός Σφάλματος

| a/a | t_i (s) | (s) | Δt_i (s) | Δt_i^2 (s ²) |
|-------|-----------|------|------------------|----------------------------------|
| 1 | 2,3 | | 0,13 | 0,016900 |
| 2 | 2,9 | | -0,47 | 0,220900 |
| 3 | 2,5 | | -0,07 | 0,004900 |
| 4 | 2,6 | | -0,17 | 0,028900 |
| 5 | 2,2 | 2,43 | 0,23 | 0,052900 |
| 6 | 2,3 | | 0,13 | 0,016900 |
| 7 | 2,2 | | 0,23 | 0,052900 |
| 8 | 2,5 | | -0,07 | 0,004900 |
| 9 | 2,1 | | 0,33 | 0,108900 |
| 10 | 2,7 | | -0,27 | 0,072900 |
| | 24,3 | | | 0,581000 |

Παρουσίαση Αποτελέσματος

➤ Αποτελέσματα

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} = \frac{24,3 \text{ m}}{10} = 2,43 \text{ s}$$

$$\sigma(\bar{t}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta t_i)^2}{n \cdot (n - 1)}} = \sqrt{\frac{0,581 \text{ s}^2}{10 \cdot 9}} =$$

$$= \sqrt{0,0064555555 \text{ s}^2} = 0,0803467195 \text{ s}$$

Παρουσίαση Αποτελέσματος

➤ Αποτελέσματα

$$\sigma \% = \frac{\sigma(\bar{x})}{\bar{x}} \cdot 100 = 3,3064493621$$

Παρουσίαση Αποτελέσματος

➤ Αποτελέσματα

$$\bar{x} \pm \sigma(\bar{x}) = (2,43 \pm 0,08) \text{ s}$$

$$\bar{x} \pm \sigma \% = (2,43 \text{ s} \pm 3 \%)$$

Παρουσίαση Αποτελέσματος

➤ Αποτελέσματα

$$\sigma(\bar{u}) = \pm \sqrt{\left[\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{t}} \cdot \sigma(\bar{x}) \right]^2 + \left[\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\bar{x}, \bar{t}} \cdot \sigma(\bar{t}) \right]^2}$$

Παρουσίαση Αποτελέσματος

➤ Αποτελέσματα

$$\bar{u} = \frac{4,249 \text{ m}}{2,43 \text{ s}} = 1,7485596707 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\sigma(\bar{u}) = \sqrt{\left(\frac{4,249 \text{ m}}{2,43 \text{ s}} \cdot 0,007 \text{ m} \right)^2 + \left(\frac{4,249 \text{ m}}{(2,43 \text{ s})^2} \cdot 0,08 \text{ s} \right)^2}$$

$$\sigma(\bar{u}) = \sqrt{0,003313815628} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0,05756575 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Παρουσίαση Αποτελέσματος

➤ Αποτελέσματα

$$\bar{u} \pm \sigma(\bar{t}) = (1,75 \pm 0,06) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\bar{u} \pm \sigma \% = (1,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \pm 3 \%)$$

Συνολική αβεβαιότητα

Έστω ότι ένας παρατηρητής μετρά το μήκος μίας έδρας 100 φορές. Έστω ότι η αβεβαιότητα της κάθε μέτρησης είναι σταθερή και ίση προς $\sigma=0.500$ cm. Έστω ότι όλες οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν με το ίδιο όργανο το οποίο έχει πεπερασμένη και γνωστή ακρίβεια, έστω σ_i . Ας υποθεθεί ότι το πραγματικό μήκος της έδρας είναι γνωστό και ίσο προς $x_\mu=20.000$ cm. Ας υποθεθεί επίσης ότι οι πραγματικές μετρήσεις κατανέμονται κατά Gauss.

Έστω ότι ισχύει το κάτωθι:

$$100 \text{ μετρήσεις} \implies \mu \sim \langle x \rangle = 20.028 \text{ cm}, \sigma \sim s = 0.48 \text{ cm}.$$

Επειδή το χρησιμοποιούμενο όργανο δεν αλλάζει, $\sigma_i = \sigma$ και επειδή $\sigma \sim s$ έπεται ότι $\sigma_i \sim 0.48$ cm.

Τότε

$$\sigma_\mu \sim s / \sqrt{n} = s / \sqrt{100} = s / 10 = 0.48 \text{ cm} / 10 \implies \sigma_\mu \sim 0.05 \text{ cm} \text{ (1 } \sigma \text{.}\psi \text{.)}$$

Η πραγματική διακύμανση $\sigma = 20.028 \text{ cm} - 20.000 \text{ cm} = 0.028 \text{ cm}$ δε διαφέρει σημαντικά από την εκτίμησή της μέσω των 100 μετρήσεων (0.05 cm)

Συνολική αβεβαιότητα

Ένα πείραμα πραγματοποιήθηκε για τον υπολογισμό της τάσης μιάς συστοιχίας κελιών.

Ο παρατηρητής πραγματοποιεί 40 μετρήσεις με ένα όργανο-1. Ευρίσκει αποτέλεσμα $\mu_1=1,022 \text{ V}$ και διακύμανση $s_1=0.01 \text{ V}$.

Στη συνέχεια πραγματοποιεί άλλες 10 μετρήσεις με ένα όργανο-2. Ευρίσκει αποτέλεσμα $\mu_2=1,018 \text{ V}$ και διακύμανση $s_2=0.004 \text{ V}$ (μία τάξη μεγέθους).

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}} = \frac{\sum \frac{1.022}{0.01^2} + \sum \frac{1.018}{0.04^2}}{\sum \frac{1}{0.01^2} + \sum \frac{1}{0.004^2}} = \frac{40 \frac{(1.022)}{0.01^2} + 10 \frac{(1.018)}{0.04^2}}{\frac{40}{0.01^2} + \frac{10}{0.004^2}} =$$

$$0.39 (1.022) \text{ V} + 0.61 (1.018) \text{ V} = 1.0196 \text{ V}$$

Συνολική αβεβαιότητα

Η συνολική αβεβαιότητα είναι

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}} = \sqrt{\frac{1}{\sum \frac{1}{0.01^2}} + \frac{1}{\sum \frac{1}{0.04^2}}}$$

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\left(\frac{40}{0.01^2} + \frac{10}{0.04^2}\right)} = 0.0010 \text{ V}$$

Συνολική αβεβαιότητα

Παρ'ότι έγιναν 4 φορές περισσότερες μετρήσεις (40) με μεγάλη αβεβαιότητα (0.01V) η μέση τιμή είναι περίπου 2 φορές πιο ευαίσθητη (0.39-0.61) στη δεύτερη φάση των μετρήσεων η οποία συνοδεύεται από μικρότερη διασπορά.

Το τελικό αποτέλεσμα (0.0010V) είναι καλύτερο από κάθε επιμέρους αποτέλεσμα. Πράγματι, αυτό ισχύει αφού:

$$\sigma_1(\bar{x}) = \frac{0.01}{\sqrt{40}} = 0.0016 \text{ V} \quad \sigma_2(\bar{x}) = \frac{0.004}{\sqrt{10}} = 0.0013 \text{ V}$$